2019 기대모의고사 Vol.1
수학 가형 <1회> 해설

이 교재의 문제가 포함되어 있는 타 교재 혹은 학원 수업물이 있다면
카카오톡 플러스친구 '기대기대' 로 제보, 혹은
kidae6150@naver.com 메일 부탁드립니다.
(해설집 표지 2Page 참고)

문제	답	문제	답	문제	답
1	②	11	②	21	②
2	③	12	⑤	22	2
3	①	13	④	23	3
4	②	14	④	24	15
5	⑤	15	③	25	5
6	④	16	④	26	32
7	②	17	⑤	27	16
8	③	18	③	28	50
9	①	19	①	29	11
10	①	20	⑤	30	10

1. $\vec{a}+2\vec{b}=(4,\,1)$ 이므로 모든 성분의 합은 5이다.

2. $x\to0$일 때 $\dfrac{e^x-1}{x}\to1$, $\cos x\to1$로 수렴하므로 정답은 1.

3. $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$로부터 $\mathrm{E}(X^2)=8$이다.

4. $a=\dfrac{2\times3+1\times0}{1+2}=2$, $b=\dfrac{2\times6+1\times(-3)}{1+2}=3$
$c=\dfrac{2\times0+1\times3}{1+2}=1$ 이므로 정답은 6이다.

5. $2^3+a=4$이므로 $a=-4$.
$2^x-4=12$에서 $x=4$이므로, 정답은 4이다.

6. 여사건을 이용하여, 두 눈의 합이 11, 12일 때의 확률을 1에서 빼주면 된다. 두 눈의 합이 11인 경우에는 (6, 5), (5, 6)이 있고 12인 경우에는 (6, 6)이 있으므로, 두 눈의 합이 11, 12일 때의 확률은 $\dfrac{2+1}{36}=\dfrac{1}{12}$이다.
따라서 정답은 $1-\dfrac{1}{12}=\dfrac{11}{12}$이다.

7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=A$ (A는 상수) 라 하면
$f(x)=\cos x+\dfrac{A}{\pi}$이므로 $A=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x+\frac{A}{\pi}\right)dx=\left[\sin x+\frac{A}{\pi}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$
에서 $A=2$.

따라서 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{\pi}$

8. $2\vec{a}-t\vec{b}$와 $\vec{b}$가 서로 수직이므로 $(2\vec{a}-t\vec{b})\cdot\vec{b}=0$ 이고 이로부터 $2\vec{a}\cdot\vec{b}=t|\vec{b}|^2$을 알 수 있다.
문제에서 주어진 벡터들을 대입하면 $16=4t$. 따라서 $t=4$ 이다.

9. 부분적분법을 활용해주면
$$\int_1^{\sqrt{e}}x\ln x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^{\sqrt{e}}-\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{2}x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2\right]_1^{\sqrt{e}}$$
$=\dfrac{1}{4}$이다.

10. 구의 중심을 $\mathrm{C}(2,2,0)$라 하고, 직선과 구의 접점 P를 $(2t+1,\,t,\,2t+2)$로 두자.

직선의 방향벡터와 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$가 수직이어야 하므로,
$(2t-1,t-2,2t+2)\cdot(2,1,2)=0$이다.
이로부터 $t=0$임을 알 수 있고, 따라서 $\mathrm{P}(1,0,2)$이다.

구의 반지름은 $\overline{\mathrm{CP}}$의 길이이므로 $r=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$.

11. 합성함수 미분법에 의하여 $g'(0)=f(0)f'(0)$이다.
$\{f(x)\}^2=e^{3x}+x^2$ 역시 합성함수 미분법에 의하여
$2f(0)f'(0)=3$이므로 $g'(0)=\dfrac{3}{2}$이다.

12. 직선 AB가 x축의 양의 방향과 이루는 각도를 θ라 하면, $\tan\theta=2$이다.
이 때 직선 AC의 기울기가 될 수 있는 값은
$\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$이다.
$\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2-1}{1+2}=\dfrac{1}{3}$, $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2+1}{1-2}=-3$이므로
$9M=3$이다.

13. 두 점 A, C가 x축 위에 있으므로 삼각형 ABC의 넓이 $S(\theta)$는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times|\mathrm{B}$의 y좌표$|$ 로 구할 수 있다.

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$에서 점 P가 선분 AB의 중점임을 알 수 있기 때문에 점 B의 y좌표는 $2\sin\theta$이고, 삼각형 OPA에서 $\angle\mathrm{AOP}=\theta$이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=\sec\theta-1$.

$\therefore S(\theta)=\sin\theta\left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right)$이고 $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{1}{2}$이다.

(위의 풀이는 $\theta>0$일 때를 전제로 쓰인 풀이이다.
$\theta\to0+$인 상황만 구하면 되므로 상관없다.)

14. 두 삼각형 PFH, PF′H의 둘레의 길이의 차는

$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{F'H}}+\overline{\mathrm{HP}}-(\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{FH}}+\overline{\mathrm{HP}})=\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{F'H}}-\overline{\mathrm{FH}}$인데

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}$는 쌍곡선의 정의에 의하여 쌍곡선의 주축의 길이,

$\overline{\mathrm{F'H}}-\overline{\mathrm{FH}}$는 $\overline{\mathrm{F'F}}$와 같다.

따라서 $10=2+2\sqrt{1+a^2}$에서 $a^2=15$임을 알 수 있다.
즉 쌍곡선의 점근선은 $y=\pm\sqrt{15}x$이고, 점 F는 $(4,0)$이므로 점 $(4,0)$과 직선 $y=\pm\sqrt{15}x$ 사이의 거리는 $\sqrt{15}$임을 알 수 있다.
따라서 $l^2=15$.

15. 곡선 $y=\sin ax\left(0\le x\le\frac{\pi}{a}\right)$는 직선 $x=\frac{\pi}{2a}$에 대하여

대칭이므로 선분 AB 역시 직선 $x=\frac{\pi}{2a}$에 대하여 대칭이여야

한다. 그리고 한 변의 길이가 1이므로 A, B의 x좌표는 각각

$\frac{\pi}{2a}+\frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{2a}-\frac{1}{2}$이다.

점 C가 x축 위에 있으므로, 점 A, B의 y좌표는 정삼각형의

높이인 $\frac{\sqrt{3}}{2}$와 같아야 한다. 따라서 $\sin a\left(\frac{\pi}{2a}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(혹은 $\sin a\left(\frac{\pi}{2a}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$)여야 한다.

즉, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{a}{2}\right)=\cos\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$로부터 $\frac{a}{2}=\frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi\cdots$ 이

가능한데 이 중 $0<a\le\pi$인 a는 $a=\frac{\pi}{3}$임을 알 수 있다.

16. 우선 (나) 조건으로부터 5명의 학생들에게 각각 1병의 사이다를 우선적으로 나눠 줘야 한다.
남은 2병의 사이다를 5명의 학생들에게 나누어 줘야 하므로 이 경우의 수는 ${}_5\mathrm{H}_2$.
(가)조건으로부터 각 학생들이 받은 사이다의 수만큼 콜라를 우선적으로 나눠 줘야 한다. 이후 남은 3병의 콜라를 5명의 학생들에게 나누어 줘야 하므로 이 경우의 수는 ${}_5\mathrm{H}_3$.

따라서 정답은 ${}_5\mathrm{H}_2\times{}_5\mathrm{H}_3=525$ 이다.

17. $\mathrm{P}(|X|\ge m)=\mathrm{P}(X\ge m)+\mathrm{P}(X\le -m)=\frac{1}{2}+\mathrm{P}(X\le -m)$

이므로 $\mathrm{P}(X\le -m)=\mathrm{P}(X\ge 60)$이다. 확률밀도함수는 $x=m$에 대하여 대칭이므로, $-m$과 60의 평균이 m이다. 따라서 $m=20$.

X가 $m=20,\ \sigma=10$인 정규분포를 따르므로 $\overline{X}$는

$m=20,\ \sigma=\frac{10}{\sqrt{16}}=\frac{5}{2}$인 정규분포를 따른다.

따라서 $\mathrm{P}(\overline{X}\le 25)=\mathrm{P}(Z\le 2)=0.9772$이다.

18. $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라고 두자.
$x<0$에서 $g'(x)=-e^{-x}(1-x)$이고 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $f(0)=0,\ f'(0)=-1$이다.
따라서 $b=-1,\ c=0,\ f(x)=x^3+ax^2-x$.

$g''(x)$를 구해보면 $g''(x)=\begin{cases}(2-x)e^{-x} & (x<0)\\ 6x+2a & (x>0)\end{cases}$이다.

$i)\ a\ge0$일 때,
$x<0$에서 $g''(x)>0$이고 $x\ge0$에서도 $g''(x)\ge0$이므로 $g(x)$의 변곡점이 존재하지 않는다.

$ii)\ a<0$일 때,
$\lim_{x\to0+}g''(x)=2a<0$이고 $\lim_{x\to0-}g''(x)=2>0$이므로 $x=0$의 좌, 우에서 $g''(x)$의 부호가 바뀌었다. 따라서 $x=0$에서 변곡점을 갖는다.
또한 $6x+2a=0,\ x=-\frac{a}{3}$에서도 $g''(x)$의 부호변화가 있으므로

변곡점은 총 2개이며 두 변곡점의 x좌표의 합은 $-\frac{a}{3}+0$이다.

따라서 $n=2,\ a=-3$이고, $f(x)=x^3-3x^2-x$에서
$f(n)=f(2)=8-12-2=-6$임을 알 수 있다.

출제자의 한마디

변곡점을 판단하는 기준은 $f''(x)$의 값이 0인지가 아닌
$f''(x)$의 부호변화가 있는지를 체크하는 것이다.
이 문제처럼 $f''(x)\ne0$ 여도 변곡점을 가질 때도 있으며,
$f''(x)=0$ 여도 변곡점을 갖지 않을 때도 있다.

19. $ab<6$를 만족시키는 자연수 순서쌍 (a,b)은
$(5,1), (4,1), (3,1), (2,2), (2,1), (1,5), (1,4), (1,3), (1,2), (1,1)$
로 총 10개이고, $(5,1), (1,5)$일 때 $a+b$는 최댓값 6을 갖는다.

$\therefore p=6$

a, b는 자연수이고, c는 음이 아닌 정수이므로
$a=a'+1, b=b'+1$로 두면 $a+b+c=a'+b'+c+2=n$에서
$a'+b'+c=n-2$이다.
이를 만족시키는 순서쌍 (a', b', c)의 개수는
${}_3\mathrm{H}_{n-2}={}_n\mathrm{C}_{n-2}={}_n\mathrm{C}_2$이다.
$\therefore f(n)=\dfrac{n(n-1)}{2}$

조건부확률에 의하여
$g(n)=\dfrac{10}{\dfrac{n(n-1)}{2}}=\dfrac{20}{n(n-1)}$이다. (10은 $ab<6$를 만족시키는 자연수 순서쌍 (a, b)의 개수)

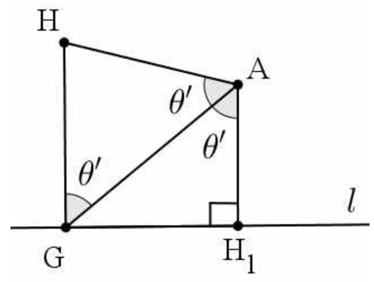
따라서 $f(2p)\times g(p)=44$이다.

출제자의 한마디
보통 '확률에서는 중복조합을 쓰면 안된다.' 는 말을 많이 들었을 것이다. 하지만, 각각 근원사건의 확률이 같은 경우, 중복조합으로 구한 경우의 수로도 확률을 구할 수 있다.
확률문제에서 중복조합을 사용할 경우, 근원사건의 확률에 대한 고민을 한 후 사용해주자.

20. ㄱ. 정육각형이므로 선분 AB, CF, DE가 모두 평행하므로 점 F에서 평면 α까지의 거리는 점 E에서 평면 α까지의 거리의 절반이다. 따라서 직선 EF와 평면 α 위에 있는 점 G에 대하여 선분 EG의 중점이 F임을 알 수 있다. 즉 $\overline{\mathrm{FG}}=\overline{\mathrm{FE}}=2$.

ㄴ. $\overline{\mathrm{FG}}=\overline{\mathrm{FA}}=2$ 이고 $\angle\mathrm{GFA}=\pi-\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{1}{3}\pi$ 이므로 삼각형 FGA은 정삼각형이다. 따라서 F에서 선분 AG까지의 거리가 $\sqrt{3}$이다. 또한 직선 AF와 평면 α 사이의 예각의 크기가 $\dfrac{\pi}{6}$이므로 점 F에서 평면 α 까지의 거리는 $2\times\sin\dfrac{\pi}{6}=1$이다.
위의 결과에 따라 삼각형 AFG와 평면 α의 사이각을 θ라 하면, $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.
따라서 삼각형 AFG의 평면 α로의 정사영의 넓이는
$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\right)=\sqrt{2}$이다.

ㄷ. $\overrightarrow{\mathrm{GP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GF}}=0$에서 두 직선 GP, GF가 수직임을 알 수 있다.
점 F에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면, 삼수선의 정리에 의하여 직선 GH, GP 역시 수직이다.
ㄴ.에서 구한 정보들을 이용하면 $\overline{\mathrm{HG}}=\overline{\mathrm{HA}}=2\cos\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}$이고,
이를 그림으로 그리면 다음과 같다.



(직선 l은 직선 GP이고 $\overline{\mathrm{AP}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AH_1}}$.)
$\overline{\mathrm{AG}}=2$이므로 이등변삼각형 HGA에서 $\cos\theta'=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이고, 따라서
$\overline{\mathrm{AH_1}}=\overline{\mathrm{AG}}\cos\theta'=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

출제자의 한마디
점 G는 직선 AB 위의 점이다. 두 평면 위에 동시에 있는 점들은 하나의 직선을 이루는데, 지금 이 문제에 표시된 모든 점들은 정육각형을 포함하는 어떤 평면 β 위에 있다. 즉, A, B, G는 두 평면 α, β 위에 있으므로, 이 세 점은 한 직선(두 평면의 교선) 위에 있다.

21. 출제의도 : 미분을 통해 그래프의 개형을 그림으로써 근의 개수를 판별하는 이과의 전통적인 21번 문제. 하지만 n의 값에 따라 극값을 가지는 x가 포함될 수도, 포함되지 않을 수도 있기 때문에 평범한 미분개형문제보다 어렵게 생각 될 것으로 판단된다.

$x>e^n$일 때, $f(x)=(\ln x)^3-3\ln x+3n$이고 $f'(x)=\dfrac{3(\ln x)^2-3}{x}$
$0<x<e^n$일 때, $f(x)=(\ln x)^3+3\ln x-3n$이고
$f'(x)=\dfrac{3(\ln x)^2+3}{x}$ 이다.

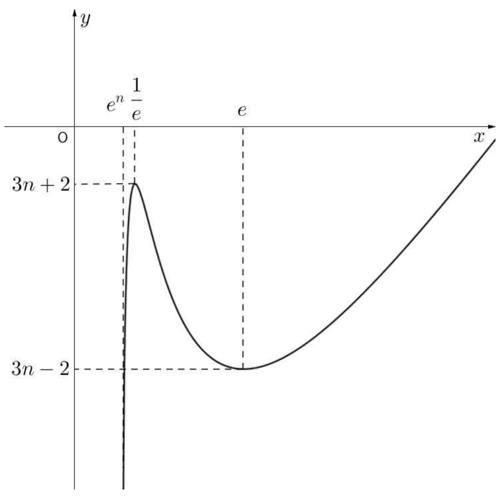
$0<x<e^n$에서는 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이므로 극점이 존재하지 않는다. 반면, $x>e^n$에서는 $x=e, \dfrac{1}{e}$에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 극점이 존재한다.

하지만, $x=e, \dfrac{1}{e}$가 항상 $x>e^n$에 포함되는 것이 아니기 때문에, n의 범위를 나누어 $f(x)$를 그려줘야 한다.

$i)$ $n\geq 1$일 때,
$x>e^n$일 때에도 $e^n\geq e$, 즉 $x>e$이므로 이 범위에선
$f'(x)=\dfrac{3(\ln x)^2-3}{x}$이고, 이 역시 항상 양수이므로 $f(x)$는 전구간에서 증가함수이다.
따라서 $f(x)=k$의 해가 3개가 되도록 하는 정수 k가 없으므로 $g(n)=0$.

$ii)$ $n<-1$일 때,
$e^n<e^{-1}$이므로 $x=e, \dfrac{1}{e}$가 모두 $x>e^n$에 포함된다. 따라서
$f(x)$는 $x=\dfrac{1}{e}$에서 극댓값 β, $x=e$에서 극솟값 α를 가진다.

따라서 $\beta=f\left(\frac{1}{e}\right)=-1-3|1+n|$, $\alpha=f(e)=1-3|1-n|$인데,
$1+n<0$, $2<1-n$이므로 $\beta=3n+2$, $\alpha=3n-2$이고 그래프를 그리면 다음과 같다.

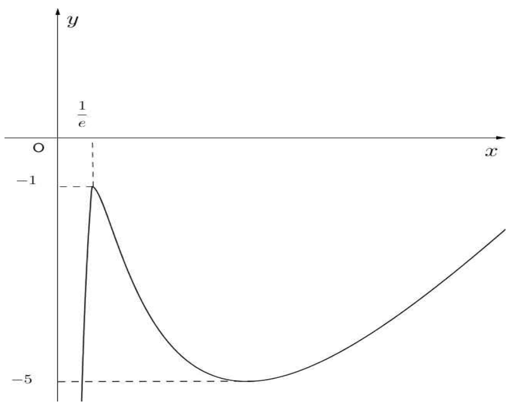


따라서 $f(x)=k$의 해가 3개가 되도록 하는 k는
$3n-2<k<3n+2$를 만족시키는 k이고, 가능한 k값들은
$3n-1$, $3n$, $3n+1$로써 n의 값에 관계없이 항상 3개다.

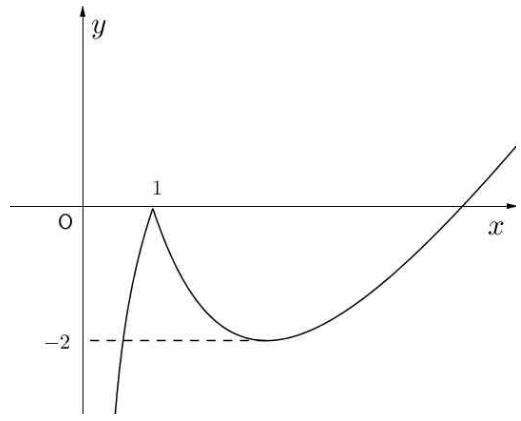
따라서 $n<-1$일 때, $g(n)=3$

iii) $n=-1, 0$일 때

먼저 $n=-1$일 때, *ii*)와 같이 $x=\frac{1}{e}$에서 극댓값을 가지지만, 그 점에서 미분가능하지 않는 그래프를 가진다.



이 역시 가능한 k값들은 -2, -3, -4이므로 $g(-1)=3$이다.
$n=0$일 때, $x=\frac{1}{e}$은 범위 $x>e^n=1$에 포함되지 않아서 극댓값이 없다고 착각할 수 있다.
하지만, $x>1$일 때 $f'(x)=\frac{3(\ln x)^2-3}{x}$이므로 $f'(x)<0$이고
$x<1$일 때 $f'(x)=\frac{3(\ln x)^2+3}{x}$이므로 $f'(x)>0$이다. 즉,
$x=1$의 좌, 우에서 $f'(x)$의 부호변화가 있고, $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 가짐을 알 수 있다.
(즉, 극대점에서 미분이 불가능하지만, 극대점임은 틀림없다.)
극솟값은 $x=e$에서 가지므로 극댓값은 $f(1)=0$, 극솟값은 $f(e)=-2$이다. 따라서 $k=-1$일 때만 $f(x)=k$가 세 근을 가지므로 $g(0)=1$이다.



위에서 구한 $g(n)$을 종합하면
$n\geq 1$일 때, $g(n)=0$
$n\leq -1$일 때, $g(n)=3$
$n=0$일 때, $g(n)=1$이므로

$$\sum_{m=1}^{20} g(m-10)=(g(-9)+\cdots+g(-1))+g(0)+(g(1)+\cdots+g(10))$$
$$=3\times 9+1\times 1+0\times 10=28\text{이다.}$$

22. $(ax+2)^4=(ax)^4+{}_4C_1(ax)^3 2^1+\cdots$ 이므로 x^3의 계수는 $8a^3$이다. 이 값이 64여야 하므로 $a^3=8\Rightarrow a=2$ 이다.

23. 미분가능한 함수 $f(x)$의 그래프가 원점에서 x축에 접하므로 $f(0)=0$, $f'(0)=0$이다. $g(x)=f(x)e^{-x}+3x$을 미분한 후 $x=0$을 대입하면 $g'(0)=(f'(0)-f(0))e^0+3=3$임을 알 수 있다.

24. $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$ 로부터

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$임을 알 수 있다.

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$ 이므로 $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$이다.

따라서 $45\times \mathrm{P}(A^C\cap B)=15$.

25. 점 $(2, 0)$은 $t=1$일 때의 점이다.
$\frac{dy}{dt}=e^t\left(\frac{1}{t}+\ln t\right)$, $\frac{dx}{dt}=2t+1$이므로 $t=1$일 때 $\frac{dy}{dx}=\frac{e}{3}$이다.
따라서 접선의 방정식은 $y=\frac{e}{3}(x-2)$이며 $\mathrm{A}(2,\ 0)$,
$\mathrm{B}\left(0,\ -\frac{2}{3}e\right)$이므로 삼각형OAB의 넓이는 $\frac{2}{3}e$이다.

따라서 $p+q=5$이다.

26. 학생들이 나열되는 자리를 왼쪽부터 순서대로
A, B, C, D, E, F라 하자.
총 6명의 학생들이 일렬로 나열되는데, 각 학년의 학생이 3명씩이므로 (가)조건에 따르면 A, C, E에 1학년, B, D, F에 2학년이 배치되거나 A, C, E에 2학년, B, D, F에 1학년이 배치되어야 한다.

따라서 A, C, E에 1학년, B, D, F에 2학년이 배치되는 경우의

수에 2배를 해주면 정답이 나올 것이다.

각 학년의 학생들을 나열하는 방법의 수는 각각 $3!$이므로 총 경우의 수는 $3!\times3!$이다.
하지만, 1학년의 남학생과 2학년의 남학생이 이웃하지 않으므로 두 남학생이 각각 A, B/B, C/C, D/D, E/E, F에 배치되는 경우의 수를 빼줘야 한다. 이러한 경우는 5가지이고, 나머지 자리에 각 학년의 학생들을 나열하는 방법의 수는 각각 $2!$이다.
따라서 정답은 ${}_2C_1\times(3!\times3!-5\times2!\times2!)=32$ 이다.

27. 타원의 한 초점이 $(2,\ 0)$이므로 $a=12$이다.
즉, 단축의 길이가 $4\sqrt{3}$인데, 타원과 포물선이 만나는 교점 사이의 거리도 $4\sqrt{3}$이다.
타원과 포물선은 x축 대칭인 그래프를 갖는데, 이를 통해 타원과 포물선의 두 교점은 x좌표가 서로 같음을 알 수 있다.
또한 타원 위의 점 중 x좌표가 같은 두 점 사이의 거리의 최댓값은 단축의 길이이므로,

단축의 길이 $=4\sqrt{3}=$ 타원과 포물선이 만나는 교점 사이의 거리

라는 정보를 통해 두 교점은 타원의 단축 위에 있음을 알 수 있다.

교점 중 하나를 점 A라 하자. 선분 AF의 길이는 타원의 장축의 길이의 절반인 4이므로, 포물선의 정의에 의하여 포물선의 준선은 점 A에서 x축 방향으로 -4만큼 떨어진 $x=-4$임을 알 수 있다.

포물선의 꼭짓점은 준선이 x축과 만나는 점과 초점을 잇는 선분의 중점이므로, $(-1,\ 0)$을 꼭짓점으로 갖는다.
따라서 $b=1,\ p=2-(-1)=3$이다.

따라서 $a+b+p=12+1+3=16$.

28. $\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$을 만족시키는 양수 k에 대하여 신뢰도 $\alpha\%$의 신뢰구간 $a\le p\le b$에 대하여 $b-a=2k\times\dfrac{\sqrt{\hat{p}\hat{q}}}{\sqrt{n}}$로 알려져 있다. (단, $\hat{p}$는 표본비율이며 $\hat{q}=1-\hat{p}$이다.)

문제 조건에서 $n=100,\ \hat{p}=0.1$이므로 대입해보면
$l_\alpha=2k\times\dfrac{\sqrt{0.1\times0.9}}{\sqrt{100}}=\dfrac{3}{50}k$이다.

$\mathrm{P}(Z\le tl_\alpha)=\dfrac{\alpha+100}{200}=\dfrac{\alpha}{200}+\dfrac{1}{2}$으로부터

$\mathrm{P}(Z\le tl_\alpha)-\dfrac{1}{2}=\mathrm{P}(0\le Z\le tl_\alpha)=\dfrac{\alpha}{200}=\mathrm{P}(0\le Z\le k)$를

만족시켜야 하므로 $tl_\alpha=k$에서 $t=\dfrac{50}{3}$, $3t=50$임을 알 수 있다.

출제자의 한마디

$\dfrac{\alpha}{200}=\mathrm{P}(0\le Z\le k)$이 만족하는 이유는 확률변수 Z는 평균이 0인 표준정규분포이므로, Z의 확률밀도함수는 0을 기준으로 좌우대칭인 함수이기 때문이다.

$\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$ 조건이 어색한 학생들은 보통의 통계문제를 풀 때, 신뢰도 95%의 95란 숫자와, 뒤에 나오는 $\mathrm{P}(|Z|\le1.96)=0.95$의 95란 숫자가 같은 것만 체크한 후 k를 1.96이라고 '무의식적'으로 잡고 풀었을 가능성이 높다.

이 문제는 기존에 풀어본 적이 있어서 풀 수 있는 문제가 아닌, 완전 개념형 문제이다.

본인이 15학년도에 확률밀도함수의 대칭성을 이용한 문제를 냈을 때도 '왜 이런 소재로 준킬러 문제를 내냐'는 평이 있었다. 하지만 16학년도, 17학년도 평가원, 수능이 볼 수 있듯 확률과 통계 중요트렌드가 되었다. **확통의 처음과 끝은 '개념'임을 간과하지 말자.**

cf. 3년간의 검토동안 대부분의 검토진들이 '실력이 어중간한 학생들이 이 문제를 틀리고 자존심 때문에 욕할 것 같다. 하지만 실제론 좋은 개념형 문제이다.' 라고 평한 문제이다.

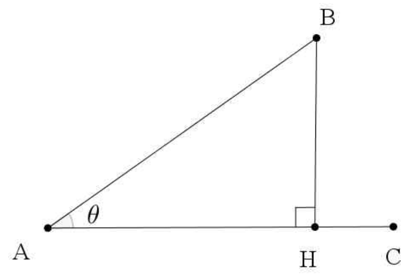
29. 구 위의 점에 대한 벡터 내적, 합의 최대, 최소를 묻는 문제의 경우 스타트는 항상 '구의 중심을 시점으로 하는 벡터로 분해' 하는 것이 좋다.

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}$로 벡터분해하면 $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$는 크기는 $\sqrt{3}$이고 방향은 어느 방향이든 다 가질 수 있는 벡터이기 때문에, $\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}$의 값은 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$가 결정이 됐을 때 $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$를 같은 방향으로 결정해주면 내적값이 최대가 될 것이다.

이제 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}$가 최대일 때의 상황을 구해보자.

(cf. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}$가 각각 최대인 상황이 '동시에' 이루어질 수 있기 때문에 가능한 풀이이다. 비슷한 문제풀이 구조를 띄는 문제로는 2016학년도 수능 29번이 있다.)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|\times\cos\theta$를 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\times(|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|\times\cos\theta)$의 관점으로 보면, 두 점 C, E를 선분 AB에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\times(|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|\times\cos\theta)=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{H_1H_2}}|$와 같다.
(단, θ가 예각일 때)
==
(참고)



위 그림에서 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AH}| \times |\overrightarrow{AC}|$ (단, θ가 예각)

위 개념은 실전에서 매우 자주 사용되므로 꼭 알아두자.
==

$\overrightarrow{AB}$는 고정된 벡터이고 점 C 역시 고정된 점이므로, E의 수선의 발 H_2가 점 C의 수선의 발 H_1으로부터 멀리 떨어져 있을 때 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = |\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{H_1H_2}|$가 최대가 나온다.

따라서 최대인 경우는 그림에 있는 정육면체의 오른쪽 면 위에 점 E가 있을 때임을 알 수 있다.

(참고 : 만약 점 E가 오른쪽 면이 아닌 왼쪽 면에 있다면 두 벡터의 사잇각이 둔각이 나와 최솟값이 나오게 된다.)

따라서 이 상황에서 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = |\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{H_1H_2}|$의 값은 $8 \times 1 = 8$이다. … ①

이제 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CE}$의 최댓값을 결정해보자. 점 E의 위치는 정육면체의 특정한 한 면(문제의 그림 기준 오른쪽 면) 위에 있어야 함이 결정된 상태이다.
또한 $\overrightarrow{BD}$는 점 E의 위치에 관계없이 $\overrightarrow{CE}$와 같은 방향을 가질 수 있고 크기가 $\sqrt{3}$으로 고정되어 있으므로, 결국 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CE}$의 값은 $|\overrightarrow{CE}|$에 의해 결정된다.

정육면체의 오른쪽 면이 구와 만나는 네 점 중 하나가 E일 때, $|\overrightarrow{CE}|$은 최댓값 $\sqrt{3}$을 가짐을 알 수 있고, 따라서 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CE}$의 최댓값은 $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ … ②

①, ②에 의하여 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{CE}$의 최댓값은 11임을 알 수 있다.

출제자의 한마디

벡터의 구성요소는 방향과 크기이다. 중심이 O인 원 위의 점 P에 대한 벡터가 있을 때 $\overrightarrow{OP}$가 나오게끔 벡터분해를 해주면 $\overrightarrow{OP}$는 방향 무제한, 크기 고정인 벡터이기 때문에 벡터 간 계산 값의 최대, 최소를 결정할 때 자유분방하게 활약할 수 있다.

물론, 원 나왔을 때 무조건 이렇게 하면 풀린다! 라고 하는 것은 아니다.
'첫 시도로 해볼 만한 제일 괜찮은 풀이' 정도일 뿐이다.

30. (가)조건에서 방정식 $\left(\int_2^x f(t)dt - f(4)\right)\left(\int_4^x f(t)dt - f(2)\right) = 0$ 의 해 중 두 개가 2, 4임을 알 수 있으므로 $x = 2, 4$를 대입해보자.

$x = 2$를 저 식에 대입하면 $f(4)\left(f(2) - \int_4^2 f(t)dt\right) = 0$이다.

따라서 $f(4) = 0$이거나 $f(2) = \int_4^2 f(t)dt$여야 한다. …①

또한, $x = 4$를 저 식에 대입하면 $\left(f(4) - \int_2^4 f(t)dt\right)f(2) = 0$이다.

따라서 $f(2) = 0$이거나 $f(4) = \int_2^4 f(t)dt$여야 한다. …②

결론적으로 ①, ②에서 각각 두 경우 중 최소한 한 경우씩을 만족해야 하므로, 4개의 케이스가 나온다.

i) $f(4) = 0$ and $f(2) = 0$ 일 때, 실수 전체 집합에서 증가한다는 조건에 모순이 되므로 불가능하다.

ii) $f(4) = 0$ and $f(4) = \int_2^4 f(t)dt$일 때,

$f(4) = 0 = \int_2^4 f(t)dt$인데, $f(x)$는 실수 전체 집합에서 증가하는 함수이고 $f(4) = 0$이므로 구간 $(2, 4)$에서 함수 $f(x)$는 음의 함숫값을 갖고, 따라서 $\int_2^4 f(t)dt$의 값은 0이 될 수 없다.

(자세히 말하면 $\int_2^4 f(t)dt$는 음수여야 한다.)

iii) $f(2) = 0$ and $f(2) = \int_4^2 f(t)dt \left(= -\int_2^4 f(t)dt\right)$일 때,
ii)에서와 비슷하게 $f(x)$가 증가함수이고 $f(2) = 0$이므로 구간 $(2, 4)$에서 함수 $f(x)$는 양의 함숫값을 갖기 때문에 $\int_2^4 f(t)dt$의 값은 0이 될 수 없다. 따라서 모순.

i) ~ iii)이 모두 불가능하므로, 결국
$f(4) = \int_2^4 f(t)dt$ and $f(2) = \int_4^2 f(t)dt \left(= -\int_2^4 f(t)dt\right)$
만 가능함을 알 수 있고, 이 두 식에서 $f(4) = a$라 하면 $f(2) = -a$임을 알 수 있다.
($\because$ (나)조건에서 함수 $y = f(x)$의 그래프는 점 $(4, f(4))$ 에 대한 대칭이므로)
(참고로, $f(x)$는 증가하는 함수이므로 $f(4) = a$는 당연히 양수여야 할 것이다.)

이제 (나)조건과 (다)조건을 융합해서 보자. (나)조건은 점대칭, (다)조건은 적분관계식을 주었는데, 익숙한 조건이 아닌가?
바로 18학년도 6평 30번 문제에서 사용된 점대칭함수의 적분이다.

점대칭함수의 적분에 의하여 $\int_3^5 f(x)dx$의 값은 네 점 $(3, 0)$, $(5, 0)$, $(3, f(4))$, $(5, f(4))$를 꼭짓점으로 하는 직사각형의

넓이인 $2f(4)$와 같으므로,

(<u>해설 마지막의 추가해설(유도과정)을 반드시 읽어보도록 하자.</u>)

$\int_3^5 f(x)dx = \int_4^5 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx = 2f(4)$이다.

$\int_4^5 f(x)dx = 2f(4) - \int_3^4 f(x)dx$를 (다)조건에 대입하면

$2f(4) - \int_3^4 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx = 2f(4) - \int_2^4 f(x)dx = f(4)$

$=2$ 이므로 $f(4)=2$이다.

출제자의 한마디
해설의 편의를 위해 정적분의 구간을 나눠 두 정적분으로 만드는 '번거로운 것'을 했지만, 실전풀이는 증가하는 점대칭함수의 그래프를 그려서 해석할 수 있어야 한다.

따라서 $f(6)$의 값을 구하면 되는데,

$f(4)=2$, $f(2)=-2$이고 $f(x)$는 $(4, 2)$에 대한 점대칭함수이므로

$f(6)+f(2)=2f(4)$에서 $f(6)=6$임을 알 수 있다.

이제, A의 원소 중 $2, 4$가 아닌 것들을 파악해 보자.

$f(4)=2$, $f(2)=-2$를 대입해보면

$\left\{ x \,\middle|\, \left(\int_2^x f(t)dt - 2\right)\left(\int_4^x f(t)dt + 2\right) = 0 \right\}$인데,

$\int_2^x f(t)dt - 2 = \int_2^x f(t)dt - \int_2^4 f(t)dt = \int_4^x f(t)dt$이므로 결국

$\int_4^x f(t)dt\left(\int_4^x f(t)dt + 2\right) = 0$의 해를 찾으면 된다.

$\int_4^x f(t)dt$의 값이 0이거나 -2인 x를 모두 찾기 위해 함수

$g(x) = \int_4^x f(t)dt$의 그래프를 그려보자.

$g(2) = -\int_2^4 f(t)dt = -2$, $g(4)=0$이고 $g'(x)=f(x)$이다.

또한 $g'(x)=f(x)=0$을 만족시키는 $x=\alpha$는 구간 $(2, 4)$에 오직 하나 존재할 것이고 ($\because f(2)f(4)=-4<0$이고 $f(x)$는 증가함수이므로 사이값 정리에 의하여)

함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 가질 것이다.

그 극솟값은 $f(2)$의 값인 -2보다 작으므로

($\because$ 구간 $(2, \alpha)$에서 $f(x)<0 \Leftrightarrow g'(x)<0$이므로 $g(x)$는 감소함수이다.)

결론적으로 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2, $g(x)=-2$의 서로 다른 실근의 개수도 2가 되어 $n(A)$의 값은 4가 된다.

따라서 $f(6)+n(A)=6+4=10$.

['점대칭함수의 적분에 의하여 $\int_3^5 f(x)dx$의 값은 네 점 $(3, 0)$, $(5, 0)$, $(3, f(4))$, $(5, f(4))$를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이인 $2f(4)$와 같으므로~' 에 대한 추가해설(유도과정)]

ⓐ $f(x)=0$인 x는 3보다 작다. (즉, $f(3)>0$)

pf) $f(4) = \int_2^4 f(t)dt$를 보자.

$f(4)$는 $(3, 0)$, $(4, 0)$, $(3, f(4))$, $(4, f(4))$를 꼭짓점으로 갖는 직사각형의 넓이와 같다.

만약 $f(x)=0$인 x가 3 이상이라 가정하면, (귀류법)

$\int_3^4 f(t)dt$의 값은 이 직사각형의 넓이와 같을 수 없다.

(=직사각형의 넓이보다 항상 작은 값을 갖게 된다.)

심지어 $\int_2^3 f(t)dt$의 값은 $f(t)$가 구간 $(2, 3)$에서 음수이므로 정적분 값도 음수이다.

이는 조건에 모순이므로 $f(x)=0$인 x는 3보다 작다.

또한 $f(x)$는 증가함수이므로, $x \geq 3$이면 $f(x)>0$.

ⓑ $\int_3^5 f(t)dt = 2f(4)$

pf) 정적분의 값=둘러싸인 넓이가 되려면, 적분구간 내에서 $f(t)$의 부호가 바뀌지 않아야 한다. (부호가 양수이면 그대로, 부호가 음수이면 정적분의 값에 -1을 곱해줘야 둘러싸인 넓이)

ⓐ에서 $x \geqq 3$이면 $f(x)>0$임을 보였으므로 적분구간 3~5에서 $f(t)$의 부호는 바뀌지 않는다.

즉, 정적분의 값=둘러싸인 넓이이고, $f(x)$는 $(4, f(4))$에 대해 점대칭이므로

$x=3$, $y=f(4)$, $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이와

$x=5$, $y=f(4)$, $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 같다.

$\int_3^5 f(t)dt$에서 $x=5$, $y=f(4)$, $y=f(x)$로 둘러싸인 부분을 $x=3$, $y=f(4)$, $y=f(x)$로 둘러싸인 부분으로 옮겨주면 점 $(3, 0)$, $(5, 0)$, $(3, f(4))$, $(5, f(4))$를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이인 $2f(4)$와 같음을 알 수 있다.

($cf.$ 적분구간 내에서 함숫값의 부호가 바뀌지 않아야 기하학적으로 증명이 되지만, 사실 (가)식을 적분구간 $[0, 1]$에서 적분한 후 좌변의 적분에 치환적분을 적당히 적용시켜주면 함숫값의 부호에 상관없이 $\int_3^5 f(t)dt = 2f(4)$임을 보일 수 있다.)

1회 예상 등급컷, 난이도 탑 3			
등급컷	원점수	난이도 Top	문제번호
1등급	92	1위	30번 ★
2등급	88	2위	29번 ★
3등급	83	3위	21번

★ Warning ★

- 위 자료는 저자 및 검토진들의 주관적인 생각과 경험을 근거로 예상한 자료이므로 '참고'만 하세요.
- 예상등급컷은 11월 기준입니다.
  (6 ~ 9월에는 좀 더 어렵게 느낄 수 있습니다.)