2015학년도 수능 수학영역 B형

2015학년도 수능 수리영역 등급컷 (원점수 기준)

	수학 A형	수학 B형
1등급	96	100
2등급	92	96
3등급	84	88
4등급	67	80
5등급	42	65
6등급	27	47

2015학년도 수능은 역대 수능 중에서도 손에 꼽힐 만한 물수능이었습니다. 난도 조절에 실패하였고 실수로 한두 문제만 틀려도 등급이 엄청나게 하락하는 문제를 야기했습니다. 난도 조절 실패의 원인은 다음과 같습니다.

- 무한등비급수 문제 삭제하여 공비를 구하는 시간이 줄어듬
- 어려운 지표/가수 문제가 삭제됨 (4점짜리, 고난도)
- 격자점 문제(30번)가 상당히 쉽게 출제됨 (4점짜리, 고난도)
- 평가원에서 변별력을 위해 출제한 문제 수가 적었음 (20번, 29번, 30번 (홀수형 기준))

무한등비급수 문제 삭제와 어려운 상용로그 지표/가수 문제의 삭제는 2017학년도 수능부터 시행될, 개편되는 수학 교육과정이 어느 정도 미리 반영된 결과입니다. 2017학년도부터 수능을 보는 학생들에게 적용되는 새로운 수학 교육과정에서는 상용로그의 지표/가수 내용이 삭제되었고, 삼각함수의 삼각형에의 응용 내용이 고교 과정에서 삭제되었기 때문입니다. 2015학년도 수능 수리영역 B형에서 학생들이 가장 많이 틀린 문제 10개를 같이 살펴보도록 하겠습니다.

선정문제 ▶ 9, 13, 14, 19, 20, 21, 26, 28, 29, 30

01 무한급수와 정적분

9. 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$의 값은? [3점]

① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $2\ln 2$ ④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$

쉬워 보이지만 살짝만 삐끗하면 틀리는 문제야. n과 k가 포함된 항을 적당히 x로 치환하면 되는데, 이때 적분 구간과 dx를 설정할 때 잘못하면 계산 실수를 할 가능성이 높아요.

학생A 기본 개념 부족 [오답비율 80%]

저는 무한급수 정적분으로 바꾸는 문제는 항상 어려워서 그냥 안 풀었어요.

(사실 이 정도면 4등급 이하입니다)

학생B 계산 실수 [오답비율 20%]

이거 쉬운 문제잖아?
$\frac{k}{n}=x$로 치환하면 되지?

(그리곤 적분 구간 혹은 dx 처리 과정 중 실수)

[미분과 적분] 기본 개념

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$에서 누구를 x로 치환할꼬?

음, $1+\frac{2k}{n}=x$로 치환해 버리자.

그러면 $\Delta x=\frac{2}{n}$가 되어 버리니

$dx=\frac{2}{n}$가 되어 버리고,

적분 구간은

$k=1$일 때 $x=1+\frac{2}{n}$이고 $n\to\infty$이므로 $x=1$

$k=n$일 때 $x=3$이 되는구먼?

따라서 구해야 하는 적분값은

$\int_{1}^{3} f(x)dx=\Big[\ln x\Big]_{1}^{3}=\ln 3$

9. 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$의 값은? [3점]

① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $2\ln 2$ ④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$

[적분]

$1+\frac{2k}{n}=x$

$\int_{1}^{3} f(x)dx$

$[\ln x]_{1}^{3}$

사고의 흐름

(1) 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$

$Q.\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$?

▲ 분수함수 $f(x)=\frac{1}{x}$

▲ 무한급수를 구하라고?

▲ 시그마 안의 $f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$, 이건 전개해도 우리가 못 푸는 녀석이니 정적분으로 고쳐야겠구나?

▲ 무한급수를 정적분으로 고쳐서 풀 때에는 변수, 적분 구간, dx처리에 조심해야지.

▶ 적정 풀이 시간 : 1분 ~ 2분

정적분과 무한급수

가장 기초적인 부분이지만, 의외로 어려워하는 친구들이 많다. 적분 변수를 지혜롭게 잡는 것, 그리고 적분 변수에 따라 달라지는 적분 구간과 dx처리에 조심하자.

KEYWORD 적분 변수, 적분 구간, dx

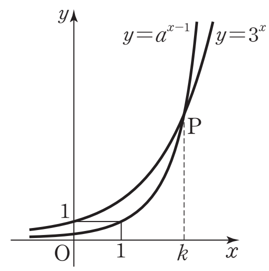
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$$

$x=a+\frac{b-a}{n}k$	(1) 구간의 양 끝값 정하기 : $k=1$: $x=a$ (n이 무한대로 가니까!) $k=n$: $x=b$ (2) dx 구하기 : $\Delta x=\left(a+\frac{b-a}{n}\times 2\right)-\left(a+\frac{b-a}{n}\times 1\right)=\frac{b-a}{n}$ (k에 2, 1를 넣어서 빼보자!) (3) 표현 바꾸기 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx$
$x=\frac{b-a}{n}k$	(1) 구간의 양 끝값 정하기 : $k=1$: $x=0$ (n이 무한대로 가니까!) $k=n$: $x=b-a$ (2) dx 구하기 : $\Delta x=\left(\frac{b-a}{n}\times 2\right)-\left(\frac{b-a}{n}\times 1\right)=\frac{b-a}{n}$ (k에 2, 1를 넣어서 빼보자!) (3) 표현 바꾸기 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}=\int_0^{b-a} f(a+x)dx$
$x=\frac{k}{n}$	(1) 구간의 양 끝값 정하기 : $k=1$: $x=0$ (n이 무한대로 가니까!) $k=n$: $x=1$ (2) dx 구하기 : $\Delta x=\left(\frac{1}{n}\times 2\right)-\left(\frac{1}{n}\times 1\right)=\frac{1}{n}$ (k에 2, 1를 넣어서 빼보자!) (3) 표현 바꾸기 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{1}{n}\times(b-a)$ $=(b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)dx$

memo

02 ~ 03 새로 나오는 두 문제 처리의 정석

[13~14] $a>3$인 상수 a에 대하여 두 곡선 $y=a^{x-1}$과 $y=3^x$이 점 P에서 만난다. 점 P의 x좌표를 k라 할 때, 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+k}}{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+1}+1}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

14. 점 P에서 곡선 $y=3^x$에 접하는 직선이 x축과 만나는 점을 A, 점 P에서 곡선 $y=a^{x-1}$에 접하는 직선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 H$(k, 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AH}}=2\overline{\mathrm{BH}}$일 때, a의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

매년 13번과 14번 문제는 한 세트로 같이 나오는 커플 문제야. 13번 문제는 3점, 14번 문제는 4점이지. 14번을 시작으로 이후의 객관식 문제들은 모조리 '4점'짜리 문제들이야. 당연히 13번은 쉽고 14번은 조금 까다로운 문제가 출제되겠지만, 14번 문제는 조금만 머리를 굴려서 '아이디어'를 얻게 되면 계산 과정과 풀이 시간이 많~이 줄어들게 되니 이번 기회에 맛보고 가자.

학생A	13번 문제에서 쓸데없이 고민을 많이 함 14번 문제에서 계산 과정이 너무 길어짐 [오답비율 90%]

쌤~ 13번 문제는 a가 3보다 크니까 금방 풀 수 있었는데, 14번은 $\overline{\mathrm{AH}}=2\overline{\mathrm{BH}}$라는 조건 이용하려고 보니까 계산이 더럽던데요?

학생B	14번 문제에서 손쉬운 접근 방법을 찾지 못함 [오답비율 10%]

14번 문제를 좀 간단하게 접근하는 방법 없나요? 작년에도 그랬지만, 14번 문제는 조금 머리를 쓰면 쉽게 풀리던데, 어떻게 공부하고 훈련하면 그런 아이디어를 쉽게 얻을 수 있을까요?

[수열의 극한] 기본 개념

〈13번〉

지수 자리에 위치한 n이 무한대로 달려가고 있으니 밑의 범위를 살펴야 한다. (이건 생 기초! 기본 중의 기본)

문제에서 $a>3$이라고 친절하게 알려주었으므로,

$\frac{a}{3}>1$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+k}}{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+1}+1}=\frac{\infty}{\infty}$의 형태가 되고

지수 자리에 있는 $(n+k)$와 $(n+1)$의 대소를 비교해야 한다.

즉, $\left(\frac{a}{3}\right)^{k-1}$을 계산해야 한다.

점 P는 두 곡선의 교점이니

$a^{x-1}=3^x$라고 두고 $x=k$를 대입해 보면

$a^{k-1}=3^k$

여기서 우리는 원하는 값인 $\left(\frac{a}{3}\right)^{k-1}$을 얻을 수 있다.

양변을 3^{k-1}로 나누면 $\left(\frac{a}{3}\right)^{k-1}=3$

(1) $a>3$인 상수 a

(2) 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=3^x$

(3) 두 곡선이 점 P에서 만남

(4) 점 P의 x좌표를 k

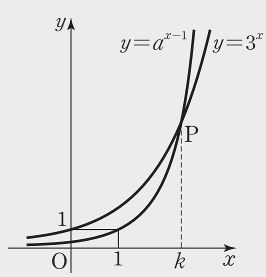
$Q.\ \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+k}}{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+1}+1}=?$

▲ 극한값을 묻고 있네? 그런데 지수 자리에 n이 있구먼?

▲ 밑의 범위에 따라 달라지니까 밑 $\frac{a}{3}$를 살펴보자.

▶ 적정 풀이 시간 : 1분 ~ 3분

한편, 그래프를 살피게 되면 $x=0$일 때 $y=3^x$의 그래프는 $(0,\ 1)$을 지나게 된다. 한편, $x=1$일 때 $y=a^{x-1}$의 그래프는 $(1,\ 1)$을 지나게 되지? 따라서 아래 그림처럼 $y=1$과 $y=a^{x-1}$이 만나는 점의 x좌표는 1이 된다. k는 1보다 오른편에 있으니 $k>1$임을 알 수 있다.



이 부분을 적는 이유는, 거의 수능에서 처음으로 x축과 y축의 비율이 다른(1 : 1이 아닌) 그림이 출제되었기 때문이다. (y축의 1의 위치와 x축의 1의 위치가 확연히 다르지?) 보통 수능에서의 그림은 정확하게 그려지는 편인데, 이런 일도 있으니 앞으로 너무 그림에 의존하지 마세요.

13. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{a}{3}\right)^{n+k}}{\left(\dfrac{a}{3}\right)^{n+1}+1}$ 의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[극한]

$a > 3$

$\underline{a^{k-1}} = \underline{3^k}$

$\dfrac{a}{3} > 1$ 이니

$\left(\dfrac{a}{3}\right)^{k-1} = \dfrac{3^k}{3^{k-1}}$

$= 3$

지수 자리에 n이 있는 극한값의 처리

지수 자리에 n이 보이면 밑의 절댓값을 살펴야 하는 것에 주의하자.

KEYWORD 절댓값 비교 & 5가지 경우

1. 절댓값 비교 : 무한대로 달려가는 n이 지수 자리에 있을 때, 밑의 절댓값이 클수록 속도가 크다!

[ex] $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+(-6)^n}{10^n}=0$: 10^n이 가장 빠른 속도로 증가!! 나머지 의미가 없다!

$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+4^n}{2\times5^n}=\frac{1}{2}$: 5^n이 가장 빠른 속도로 증가!! 나머지 의미가 없다!

2. 5가지 경우 : 무한대로 달려가는 n이 지수 자리에 있고, 밑이 미지수로 주어지는 경우!

$\lim_{n\to\infty}x^n$
$\begin{cases} x>1 : \infty \ (\text{계수 비교}) \\ x=1 : 1 \ (\text{1대입}) \\ -1<x<1 : 0 \ (x^n\text{항 삭제}) \\ x=-1 : \begin{cases} n=2k & : 1 \\ n=2k+1 & : -1 \end{cases} \ (n\text{이 짝수, 홀수일 때 다 해보고 두 경우 값이 같다면 수렴값이 존재}) \\ x<-1 : \begin{cases} n=2k & : +\infty \\ n=2k+1 & : -\infty \end{cases} \ (n\text{이 짝수, 홀수일 때 다 해보고 두 경우 값이 같다면 수렴값이 존재}) \end{cases}$

[ex] $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+1}{2x^n-1}$

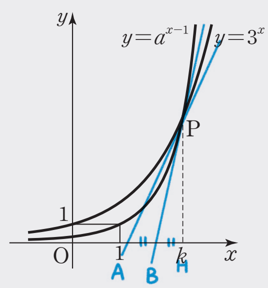
풀이

$$\begin{cases} x>1 : \infty \to \frac{1}{2} \\ x=1 : 1 \to \frac{2}{1} \\ -1<x<1 : 0 \to \frac{1}{-1} \\ x=-1 : \begin{cases} n=2k & : 1 \to \frac{2}{1} \\ n=2k+1 & : -1 \to \frac{0}{-3} \end{cases} \to \text{값이 없다.} \\ x<-1 : \pm\infty \to \frac{1}{2} \end{cases}$$

[지수와 로그] 발상의 전환

〈14번〉

일단, 그림을 먼저 그려야 정상이다.



문제에서 $\overline{AH}=2\overline{BH}$라고 했으니

$\overline{AB}=\overline{BH}$가 된다.

직선 BP의 기울기$=2\times$(직선 AP의 기울기)이므로

$(a^{x-1})'_{x=k}=2\times(3^x)'_{x=k}$

$a^{k-1}\times\ln a=2\times 3^k\times\ln 3$

한편, 13번에서 $a^{k-1}=3^k$이므로

$\ln a=2\ln 3$

따라서 $a=9$

14. 점 P에서 곡선 $y=3^x$에 접하는 직선이 x축과 만나는 점을 A, 점 P에서 곡선 $y=a^{x-1}$에 접하는 직선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 H$(k, 0)$에 대하여 $\overline{AH}=2\overline{BH}$일 때, a의 값은? [4점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

[함수]

기울기

$(3^x)'_{x=k}\times 2=(a^{x-1})'_{x=k}$

$3^k\cdot\ln 3\cdot 2=a^{k-1}\cdot\ln a$

$a^{k-1}=3^k$

$2\cdot\ln 3=\ln a$

(1) $a>3$인 상수 a

(2) 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=3^x$

(3) 두 곡선이 점 P에서 만남

(4) 점 P의 x좌표를 k

(5) 점 P에서 곡선 $y=3^x$에 접하는 직선이 x축과 만나는 점을 A

(6) 점 P에서 곡선 $y=a^{x-1}$에 접하는 직선이 x축과 만나는 점을 B

(7) H$(k, 0)$

(8) $\overline{AH}=2\overline{BH}$

Q. $a=$?

▲ 어디 보자. 그러니까 점 P에서 두 곡선에 각각 접선을 그렸다 이건데……

▲ $\overline{AH}=2\overline{BH}$ 이걸 이용하려면 점 A, B, H의 좌표를 구해서 점과 점 사이 거리 공식을 써야 하나?

▲ 근데, 그러면 계산이 지저분하잖아?

▲ 일단 그림을 그려 놓고 머리를 써 보자.

▲ 아? 그림에서 $\overline{AH}=2\overline{BH}$이니까 $\overline{AB}=\overline{BH}$구먼?

▲ 그러면 직선 BP의 기울기가 직선 AP기울기의 2배라고 세우면 편해. 왜냐? 그냥 미분계수를 이용하면 되니까. 역시 난 천재야.

▶ 적정 풀이 시간 : 1분 ~ 5분

숨어 있는 기울기 찾기

일차함수에서 배웠던 '기울기'는 다양한 형태로 등장한다. 복잡하게 생긴 식을 기하학적인 의미인 '기울기'로 읽는 순간 문제 풀이가 100배는 쉬워진다.

KEYWORD 기울기의 사촌 $=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}, \dfrac{y\text{에 대한 일차식}}{x\text{에 대한 일차식}}, \dfrac{\Delta x}{\Delta y}, \dfrac{x\text{에 대한 일차식}}{y\text{에 대한 일차식}}$

1. $x^2+y^2=1$ 위의 점에 대하여 $\dfrac{y-3}{x-5}$의 최댓값과 최솟값은?

– 중심이 원점인 단위원 위의 움직이는 점 (x, y)로부터 고정된 원 밖의 점 $(5, 3)$에 이르는 직선의 '기울기'를 살피자.

2. 두 번 미분이 가능한 함수 $f(x)$

$x_1<x_2<x_3$인 모든 x_1, x_2, x_3에 대해 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

– 기울기가 점점 증가하고 있다? 아래로 볼록한 곡선이구나? $f'(x)$는 증가함수, $f''(x)>0$

3. $x^2+y^2=1$ 위의 점에 대하여 $\dfrac{x-3}{y-5}$의 최댓값과 최솟값은?

– 중심이 원점인 단위원 위의 움직이는 점 (x, y)로부터 고정된 원 밖의 점 $(5, 3)$에 이르는 직선의 '기울기의 역수'를 살피자.

4. 함수 $f(x)$ 위의 동점 $\mathrm{P}(x, y)$에 대해서 $\dfrac{4y+5}{2x-6}$의 최댓값과 최솟값은?

– $\dfrac{4y+5}{2x-6}=\dfrac{2y+\frac{5}{2}}{x-3}=2\times\left(\dfrac{y-\left(-\frac{5}{4}\right)}{x-3}\right)$: $\mathrm{P}(x, y)$와 점 $\left(3, -\dfrac{5}{4}\right)$를 잇는 직선의 기울기의 2배

04 내적의 기하학적 의미 파악하기

19. 좌표공간에서 직선 l : $\frac{x}{2}=6-y=z-6$과 평면 α가 점 $\mathrm{P}(2,\ 5,\ 7)$에서 수직으로 만난다. 직선 l 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$와 평면 α 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=6$일 때, $a+b+c$의 값은? (단, $a>0$) [4점]

① 15　② 16　③ 17　④ 18　⑤ 19

좌표공간에서 직선과 평면 사이의 위치 관계를 바탕으로 '내적'의 의미를 음미하면 쉽게 풀 수 있었던 문제야. '내적'의 정의와 기하학적 의미를 정확하게 알지 못할 경우 계산량이 많은, 돌아가는 풀이를 선택해야 하기에 시간 소요가 많았던 문제지. 이번 기회에 내적 한 번 더 잡고 가보자.

학생A 내적의 기하학적 의미를 모른 채로 그림을 그리지 않고 수식적으로만 접근함
[오답비율 90%]

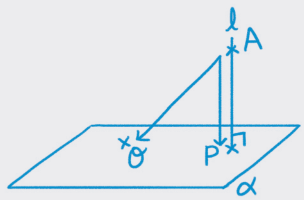
저는 일단…… 직선을 매개화시켜서 t에 대해서 표현하고 평면 α와 수직으로 만나는 걸 식으로 세우려고 했는데 안되더라고요.

학생B 내적의 기하학적 의미를 생각지 못하고 계산 과정이 긴 풀이로 돌아감
[오답비율 10%]

일단 그림을 그렸고 상황은 이해를 했어요.
그런데, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=6$을 이용하려면 세 점 A, P, Q의 좌표가 필요하더라고요?
P는 있는데, Q의 좌표를 어떻게 잡을지 모르겠더라고요.

[공간도형, 벡터] 기본 개념

상황이 복잡하니, 그림을 그려보자.



$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=6$

이 조건을 이용해보자.

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=(x,\ y,\ z$좌표 곱의 합$)$

$=|\overrightarrow{AP}|\times|\overrightarrow{AQ}|\times\cos\theta$

$=$어느 한 벡터를 다른 벡터에 수직으로 꽂은 정사영의 길이와 다른 벡터의 길이의 곱

$=|\overrightarrow{AP}|^2=6$ (위에서 주어짐)

따라서 $|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{6}$

문제에서 P의 좌표는 주어져 있으니

이제 A의 좌표를 처리해보자.

$A(a,\ b,\ c)$를 그대로 이용하면 변수가 $a,\ b,\ c$ 세 개나 되니 귀찮지?

A는 직선 l 위에 있으니 이제 한 문자로 매개화하자.

$\frac{x}{2}=6-y=z-6=k$

$A(a,\ b,\ c)=(2k,\ 6-k,\ k+6)$

$|\overrightarrow{AP}|^2=(2k-2)^2+(1-k)^2+(k-1)^2=6$

$6k^2-12k=0$에서 $k=0,\ 2$

으잉? 답이 두 개가 나온다고?

문제로 다시 돌아가보자.

$a>0$ 보이지?

$k=2$

따라서 $A=(4,\ 4,\ 8)$

(1) 좌표공간

(2) 직선 l : $\frac{x}{2}=6-y=z-6$

(3) 평면 α

(4) 직선 l과 평면 α가 점 $P(2,\ 5,\ 7)$에서 수직으로 만남

(5) 직선 l 위의 점 $A(a,\ b,\ c)$

(6) 평면 α 위의 점 Q

(7) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=6$

(8) $a>0$

$Q.\ a+b+c=?$

▲ 일단 상황이 좀 복잡하네? 그림을 그려봐야겠다.

▲ 이게 결국 점 A의 위치를 결정하라는 것 같은데……

▲ $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=6$ 조건을 보니 이거 내적을 좌표곱의 합으로 바라보면 A, P, Q 세 점의 좌표가 필요하네?

▲ 근데, 이거 Q의 좌표도 모르고 A도 지금 미지수로 표현되어 있잖아?

▲ 그러면 좌표로 바라보지 말고, 내적의 기하학적 의미를 생각해볼까?

▲ 아하, 두 벡터의 내적은 한 벡터를 다른 벡터에 수직으로 찍어서 그 정사영된 길이를 다른 벡터의 길이에 곱하는 것이었지?

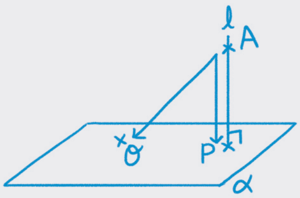
▲ 지금 $\overrightarrow{AP}$가 평면 α에 수직이니까? 이거 길이 보이는구먼?

▶ 적정 풀이 시간 : 2분 ~ 5분

19. 좌표공간에서 직선 $l: \frac{x}{2} = 6 - y = z - 6$과 평면 α가 점 P(2, 5, 7)에서 수직으로 만난다. 직선 l 위의 점 A(a, b, c)와 평면 α 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 6$일 때, $a+b+c$의 값은? (단, $a > 0$) [4점]

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

[공간도형]



$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = |\overrightarrow{AP}|^2 = 6$

$\therefore |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{6}$

$A(a, b, c)$

$= (2k, 6-k, k+6)$

$\overline{AP}^2 = (2k-2)^2 + (1-k)^2 + (k-1)^2 = 6$

$6k^2 - 12k + 6 = 6$

$6k^2 - 12k = 0$

$\therefore k = 0, \underline{\underline{2}}$ ($\because a > 0$)

$A = (4, 4, 8)$

내적을 바라보는 시각을 기르자. 벡터의 내적은 좌표곱의 합으로만 바라보면 절대 아니되옵니다.

KEYWORD 내적은
(1) 좌표곱의 합 (2) 길이× 길이× 코사인 세타 (3) 수직으로 찍고 곱한다.

1. 벡터의 내적을 바라보는 방법

점 $\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$, $\mathrm{B}(x,\ y,\ z)$에 대해서 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$라고 하자.

(1) 좌표곱의 합

- 의미 : 주어진 벡터를 좌표로 표현하고 좌표곱의 합을 이용함.
- 표현 : $\vec{a}\cdot\vec{b}=ax+by+cz$
- 활용 : 벡터를 좌표로 표현하기가 쉬운 경우.
  계산이 필요하기는 하지만, 좌표가 주어진 경우 손쉽게 처리가 됨.

(2) 길이× 길이× 코사인 세타

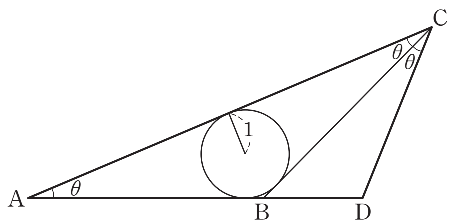
- 의미 : 주어진 두 벡터의 길이의 곱에 두 벡터가 이루는 각의 코사인값을 곱함.
- 표현 : $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$
- 활용 : 두 벡터의 크기(길이)를 구하기가 쉽고, $\cos\theta$를 손쉽게 구할 수 있는 경우.

(3) 수직으로 찍고 곱한다

- 의미 : 주어진 두 벡터 중 한 벡터를 다른 벡터에 정사영시키고 그때 탄생하는 정사영된 벡터의 크기(길이)를 나머지 벡터의 크기(길이)에 곱함.
- 표현 : $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\times|$$\vec{b}$를 $\vec{a}$에 정사영시켜서 탄생하는 새로운 벡터$|$
- 활용 : 두 벡터 사이의 각을 구하기는 어렵지만, 한 벡터를 다른 벡터에 정사영시킨 길이를 손쉽게 구할 수 있는 경우. 보통 수직이 보이는 경우에 빈번하게 사용됨.

05 이것은 고3 문제가 아니므니다. 중3~고1 도형 문제입니다.

20. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 외접하고 $\angle CAB = \angle BCA = \theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 연장선 위에 점 A가 아닌 점 D를 $\angle DCB = \theta$가 되도록 잡는다. 삼각형 BDC의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to +0} \{\theta \times S(\theta)\}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$ [4점]



① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{8}{9}$ ③ $\frac{10}{9}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{14}{9}$

이 문제는 2015학년도 수능 문제 중 가장 어려웠던 객관식 문제야. 중2~고1까지의 과정 중 익히게 되는 '기하학적 센스'를 얼마나 잘 갖추었는지를 확인하는 문제로 고2 혹은 고3 과정 중에 배우는 수학적 내용과는 무관해. 잘 알다시피 삼각함수의 극한은 아주 단순한 계산일 뿐이기 때문이야. 이번 기회에 수능에서 자주 묻는 도형 관련 내용들을 짚어보고 가자.

학생A $S(\theta)$를 θ로 표현하지 못함 [오답비율 90%]

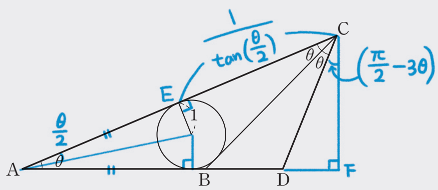
아놔, 이 문제.
$S(\theta)$를 θ에 대한 함수로 표현을 해야 하는데,
보조선을 어떻게 그려야 할지 전혀 모르겠어요.
코사인정리? 사인정리?
이런 문제 어떻게 접근하면 쉽나요?

학생B 극한 계산 과정에서 과도한 시간 소요 [오답비율 10%]

$S(\theta)$는 어찌저찌 해서 처리는 했는데요,
극한값 계산하다가
고통스러워서 죽는 줄 알았어요.
좀 쉽고 간단하게 푸는 방법은 없어요?

[극한] 기하학적 센스

사고의 흐름을 꼭 읽어보자.
우리는 두 가지 목표를 가지고 있다.
$\overline{BC}$의 길이 그리고 $\overline{DC}$의 길이.



(1) $\overline{BC}$의 길이 : 내접원의 중심과 접점을 잇기

원과 접선이 보이면 중심과 접점을 이어보자.

이렇게 하는 이유는? $\overline{BC}$는 주어진 이등변삼각형 ABC에 포함되어 있는 세 변 중 하나이기 때문이다. 이등변삼각형 ABC에서 문제에서 주어진 조건은 '내접원의 반지름이 1', 그리고 $\angle BAC=\angle BCA=\theta$ 두 가지다.

$\overline{BC}$의 길이를 l이라 하면

$l\cos\theta=\dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$가 된다.

이 식은 다음에서 유래한다.

$\overline{AE}=\overline{EC}=\overline{BC}\times\cos\theta$

$\overline{AE}$의 길이는 내접원의 반지름의 길이가 1이고 O는 내접원의 중심이므로

$\angle OAE=\angle OAB=\dfrac{\theta}{2}$이니 $\dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$가 된다.

이 부분이 어렵다면 삼각형에서 주어진 각도를 바탕으로 변의 길이를 표현하는 연습을 해보자.

(2) $\overline{DC}$의 길이 : 점 C에서 $\overline{AD}$의 연장선에 수선 내리기

$\overline{DC}$는 주어진 이등변삼각형과 같이 엮기엔 상당히 까다로운 위치에 있다. 만약 우리가 그림과 같이 F라는 점을 잡게 되면 커다란 직각삼각형 ACF와 작은 직각삼각형 DCF를 이용할 수 있다.

(1) 반지름의 길이가 1인 원
(2) 이등변삼각형 ABC
(3) 원은 이등변삼각형에 내접
(4) $\angle DCB=\theta$
(5) 삼각형 BDC의 넓이는 $S(\theta)$
(6) $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$

$Q.\ \lim_{\theta\to+0}\{\theta\times S(\theta)\}$?

▲ 딱 보기에 복잡해 보이네?

▲ 삼각형 BDC의 넓이를 구해야 하는데, 일단 삼각형의 넓이를 어떻게 구하는지 되새겨 보자.

▲ $\dfrac{1}{2}\times$밑변$\times$높이 : 일단 이렇게 구하려면 $\overline{BD}$의 길이 구하고 높이 따로 구해야 하는데 복잡해 보이는데……

▲ $\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$: 일단 사잇각은 문제에서 주어진 $\angle BCD$를 이용하면 되고, $\overline{BC}$와 $\overline{DC}$의 길이를 구해야 하네? 한편, $\overline{BC}$는 이등변삼각형의 변 중 하나이니 할만 할 것 같은데? 이걸로 가보자.

▲ 일단, 내접원이 보이니 접점과 원의 중심을 잇고 시작해 보자. 그리고 $\overline{DC}$의 길이를 구하기 위해서 점 C에서 변 $\overline{AD}$의 연장선에 수선을 내려 보자.

▶ 적정 풀이 시간 : 3분 ~ 5분

$\overline{\mathrm{DC}}$의 길이를 m이라고 하면

$$m\cos\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)=\frac{2}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\sin\theta \text{가 된다.}$$

이 식은 다음에서 유래한다.

$\overline{\mathrm{CF}}=\overline{\mathrm{AC}}\sin\theta=\overline{\mathrm{DC}}\cos(\angle\mathrm{DCF})$

$$\overline{\mathrm{AC}}=2\overline{\mathrm{AE}}=\frac{2}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$\angle\mathrm{DCF}=\pi-\frac{\pi}{2}-\theta-2\theta=\frac{\pi}{2}-3\theta$ (큰 직각삼각형 ACF에서)

(3) 이제 계산해보자.

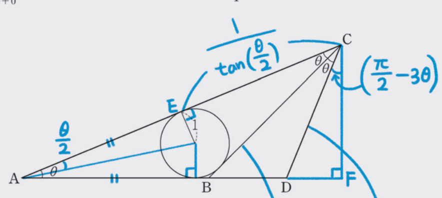
$$\lim_{\theta\to0}\{\theta S(\theta)\}=\frac{1}{2}lm\times\sin\theta\times\theta$$

$$=\frac{\theta}{2}\,\frac{1}{\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}}\,\frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)\tan\frac{\theta}{2}}\sin^2\theta$$

$$=\frac{\theta^3}{(\cos\theta)3\theta\,\frac{\theta^2}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}\cos\theta}=\frac{4}{3}$$

이 계산 과정이 어렵다면 너만의 솔루션을 읽어보자.

20. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 외접하고 $\angle\mathrm{CAB}=\angle\mathrm{BCA}=\theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 연장선 위에 점 A가 아닌 점 D를 $\angle\mathrm{DCB}=\theta$가 되도록 잡는다. 삼각형 BDC의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to+0}\{\theta\times S(\theta)\}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① $\frac{2}{3}$　② $\frac{8}{9}$　③ $\frac{10}{9}$　④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{14}{9}$

[극한&도형]

$$l\cdot\cos\theta=\frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$m\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)=\frac{2}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cdot\sin\theta$$

$$\theta\cdot S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot l\cdot m\cdot\sin\theta\cdot\theta$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{1}{c\theta\, t\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cdot\frac{2}{c\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)\cdot t\left(\frac{\theta}{2}\right)}\sin^2\theta\cdot\theta$$

$$=\frac{1}{c\theta\cdot3\theta\cdot\frac{\theta^2}{4}}\cdot\theta^3$$

$$=\frac{1}{\frac{3}{4}\cdot c\theta}=\frac{4}{3}$$

1. 삼각형의 기본 성질과 오심

KEYWORD 외우는 것이 아니라, 그림을 그릴 줄 알면 된다.

1. 삼각형의 기본 성질

(1) 세 변의 길이는 양수, 세 각의 합은 180도

(2) 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크다.

(3) 코사인 제2법칙과 각도 판정

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$\begin{cases} A>\dfrac{\pi}{2} : \cos A<0 \rightarrow a^2>b^2+c^2 \\ A=\dfrac{\pi}{2} : \cos A=0 \rightarrow a^2=b^2+c^2 \ (\text{피타고라스의 정리}) \\ A<\dfrac{\pi}{2} : \cos A>0 \rightarrow a^2<b^2+c^2 \end{cases}$$

2. 기억해야 할 삼각형

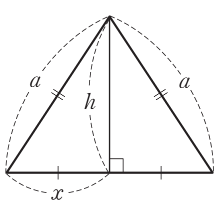
(1) 이등변 삼각형

– 두 변의 길이가 같다.

– 두 각의 크기가 같다.

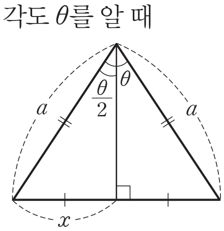
– 길이 표현 연습 : 원에서 현의 길이를 구할 때 아주 많이 쓰여!

① 높이 h를 알 때



밑변$=2x=2\sqrt{a^2-h^2}$

② 각도 θ를 알 때



밑변$=2x=2a\sin\dfrac{\theta}{2}$

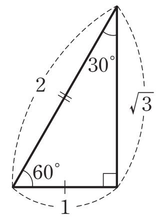
(2) 정삼각형

– 세 변의 길이가 같다.

– 내심, 외심, 무게중심, 수심이 일치한다.

– 넓이$=\frac{\sqrt{3}}{4}$(한변의 길이)^2

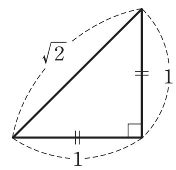
– 절반으로 잘랐을 때, 길이의 비



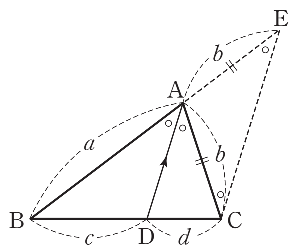
(3) 직각 삼각형

– 외심은 빗변의 중점

– 직각 이등변 삼각형의 길이의 비

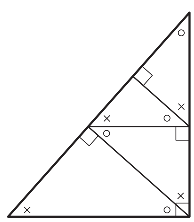


(4) 각의 이등분선과 길이의 비



$\boldsymbol{a:b=c:d}$

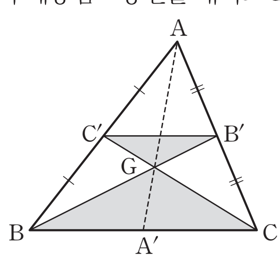
(5) 직각 삼각형 안의 직각 삼각형



직각 삼각형 안에 수선을 내려서 삼각형을 만들면,
보이는 모든 직각 삼각형들은 모조리 닮음!

3. 삼각형의 오심 : 그림을 그려서 성질을 끄집어내자!

(1) 무게중심 : 중선을 내리고 보자!



– 세 중선(꼭짓점에서 마주보는 변의 중점에 내린 선)의 교점

– $\overline{AG}:\overline{GA'}=\overline{BG}:\overline{GB'}=\overline{CG}:\overline{GC'}=2:1$

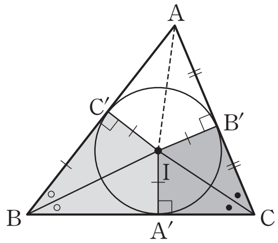
– $\triangle ABC=S$일 때

$\triangle AGC=\triangle BGC=\triangle AGB=\frac{1}{3}S$

$$\triangle AC'G = \triangle BGC' = \triangle BGA' = \triangle CGA' = \triangle CGB' = \triangle AGB' = \frac{1}{6}S$$

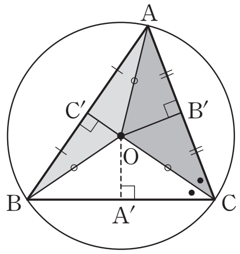
– 인기쟁이

(2) 내심 : 내접원을 그리고 보자!



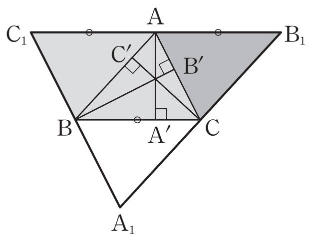
– 세 내각의 이등분선의 교점
– 중심으로부터 세 변까지의 거리가 모조리 내접원의 반지름으로 같다!
– $S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

(3) 외심 : 외접원을 그리고 보자!



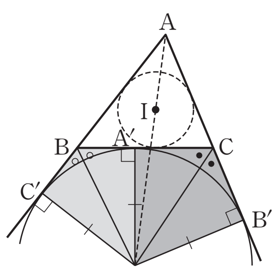
– 세 변의 수직 이등분선의 교점
– 중심으로부터 세 꼭짓점까지의 거리가 모조리 외접원의 반지름으로 같다!
– 사인법칙과 함께 기억해두자!

(4) 수심 : 수선을 내리고 보자!



– 세 꼭짓점에서 마주보는 변에 내린 수선의 교점
– 잘 등장하지 않는다.

(5) 방심 : 방접원을 그리고 보자!



– 두 외각의 이등분선과 한 내각의 이등분선의 교점
– 삼각형에는 3개의 방심이 있다.
– 그림에서 I는 내심이다.
– 잘 등장하지 않는다.

2. 삼각형의 닮음, 합동 그리고 넓이

KEYWORD 비슷한 모양, 닮은 꼴? → 닮음! → 닮음비!

1. 삼각형의 닮음 : 서로 닮은 삼각형들을 찾을 수 있어야 한다!

(1) 두 각 같으면 닮음!

(2) 세 변의 길이의 비가 같으면 닮음!

2. 삼각형의 합동 : 서로 합동인 삼각형들을 찾을 수 있어야 한다!

(1) 세 변의 길이가 같으면 합동!

(2) 두 변과 사잇각이 같으면 합동!

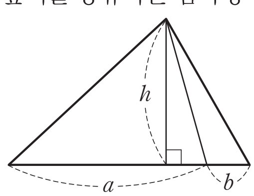
(3) 두 각과 한 변이 같으면 합동!

3. 삼각형의 넓이

(1) 서로 닮은 삼각형의 넓이

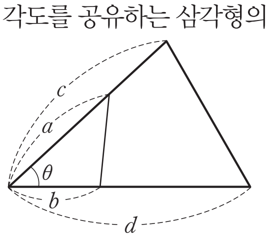
닮음비가 $a : b$ → 넓이의 비는 $a^2 : b^2$

(2) 높이를 공유하는 삼각형의 넓이



높이가 같다면, 넓이의 비 $=$ 밑변의 비

(3) 각도를 공유하는 삼각형의 넓이



각도를 공유한다면,

넓이의 비 $=$ 변 길이의 곱의 비

[ex] 왼쪽 그림에서 두 삼각형의 넓이의 비는

$\frac{1}{2}ab\sin\theta : \frac{1}{2}cd\sin\theta = ab : cd$

3. 원, 접선, 할선정리, 원주각과 중심각

KEYWORD 원이 나온다?
식보다는 기하학적 성질을 이용한 접근!

1. 원

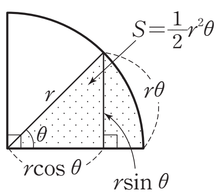
(1) 원의 정의 : 한 정점으로부터 일정한 거리 $r(>0)$만큼 떨어져 있는 점들의 집합

(2) 원의 방정식 : $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$

– 중심이 $(p,\ q)$이고 반지름이 r인 원의 방정식

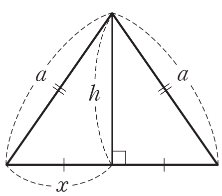
– x^2과 y^2의 계수가 동일한 이차식

(3) 부채꼴



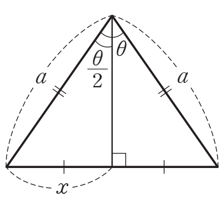
(4) 현의 길이 : $a=r$

① 높이 h를 알 때



밑변$=2x=2\sqrt{a^2-h^2}$

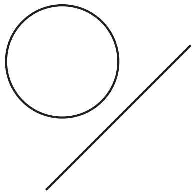
② 각도 θ를 알 때



밑변$=2x=2a\sin\frac{\theta}{2}$

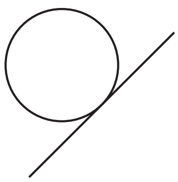
2. 원과 직선

(1) 원과 직선이 만나지 않는다.



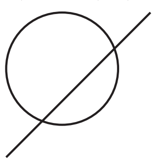
- $d>r$: 원의 중심으로부터 직선까지의 거리 > 원의 반지름
- 원의 방정식과 직선의 방정식을 연립 → $D<0$

(2) 원과 직선이 한 점에서 만난다.(접한다)



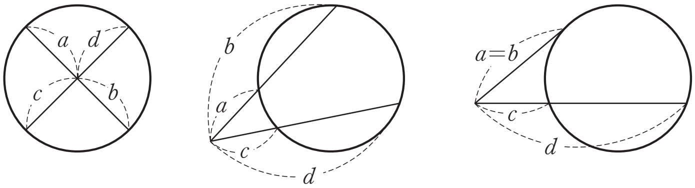
- $d=r$: 원의 중심으로부터 직선까지의 거리 = 원의 반지름
- 원의 방정식과 직선의 방정식을 연립 → $D=0$
- 원점을 중심으로 하고 반지름이 r인 원에 접하는 직선(기울기 m)
  $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$
- 원 위의 점 $(p,\ q)$에서의 접선의 방정식
  $(y-q)=m(x-p)$라 두고, $d=r$을 쓴다.

(3) 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만난다.



- $d<r$: 원의 중심으로부터 직선까지의 거리 < 원의 반지름
- 원의 방정식과 직선의 방정식을 연립 → $D>0$

3. 할선 정리 : $ab=cd$ (삼각형의 닮음에 의하여)

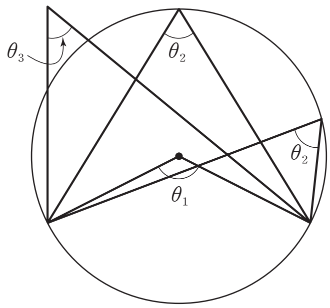


4. 원주각과 중심각

(1) 원주각은 중심각의 크기의 절반

(2) 정해진 호에 대하여, 모든 원주각의 크기는 동일

(3) 원 내부의 각 > 원주각 > 원 외부의 각



$\theta_1 > \theta_2 > \theta_3$

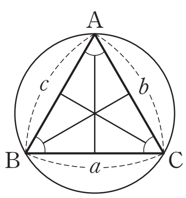
$2\theta_2 = \theta_1$

4. 사인법칙과 코사인법칙

KEYWORD

(1) 사인법칙 "마주 보는 한 쌍의 변과 각 or 외접원의 반지름"
(2) 코사인 제1법칙 "두 변과 두 각"
(3) 코사인 제2법칙 "두 변과 사잇각 or 세 변"

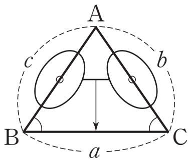
1. 사인법칙 : 마주 보는 한 쌍의 변과 각, 외접원



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

- 세 변의 길이의 비는 마주 보는 각도의 사인값의 비와 동일하다.
  ($a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$)
- 외접원의 반지름을 알고, 한 각을 알면 마주 보는 변의 길이를 구할 수 있다.
- 외접원의 반지름을 알고, 한 변의 길이를 알면 마주 보는 각의 크기를 구할 수 있다.
- 세 각 A, B, C : $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$
- 삼각형의 종류를 묻는 문제에 주로 사용된다.

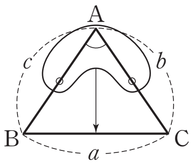
2. 코사인 제1법칙



$a=c\cos B+b\cos C$

- 두 변과 두 각을 알면 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있다.
- 삼각형의 경우 세 각의 합이 180도이므로, 어떤 각이든 2개의 각만 알면 나머지 각도 자동으로 알 수 있기에, 추가적으로 두 변의 길이를 안다면 코사인 제1법칙을 사용할 수 있다.
- 두 개의 변, 두 개의 각이 필요하므로 자주 쓰이지 않는다.

3. 코사인 제2법칙



$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ or $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

- 두 변과 사잇각을 알면 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있다.
- 세 변의 길이를 알면, 모든 각의 코사인 값을 알 수 있다.
- 세 가지 정보(두 변, 하나의 각도)로 많은 것을 이끌어낼 수 있다.
- 시험에 단골 손님으로 등장.

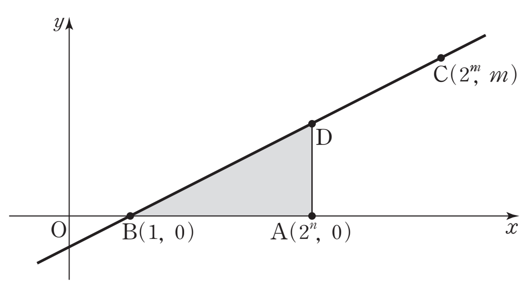
memo

06 자연수 조건이 포함된 부등식을 처리할 수 있니?

21. 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 m을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [4점]

> (가) 점 A의 좌표는 $(2^n,\ 0)$이다.
>
> (나) 두 점 $\mathrm{B}(1,\ 0)$과 $\mathrm{C}(2^m,\ m)$을 지나는 직선 위의 점 중 x좌표가 2^n인 점을 D라 할 때, 삼각형 ABD의 넓이는 $\frac{m}{2}$보다 작거나 같다.

① 109　② 111　③ 113　④ 115　⑤ 117



객관식 문제의 맨 마지막 녀석으로, 꽤나 난도가 있었던 문제야. 수학 (나)형의 30번 문제에 자주 등장하던 '격자점 문제'와 풀이가 일맥상통하는 녀석으로 정답을 구하기 위해서는 자연수 조건이 포함된 부등식을 꼼꼼하게 처리할 수 있어야 했어. 자연수 혹은 정수 조건의 두 가지 변수(x, y)가 포함된 부등식을 처리하는 방법을 잘 알고 있으면 이런 문제에 당황하지 않을 수 있단다.

학생A 부등식을 세우는 데 실패 [오답비율 40%]

이거 그냥 보니까 복잡하게 생겨서
저는 그냥 안 풀고 패스했어요.
객관식 마지막 문제는 보통 어렵잖아요?

학생B m의 값을 구하고 더하는 과정에서 실수를 함 or 부등식을 풀 때 시간이 많이 걸림 [오답비율 60%]

부등식은 쉽게 세웠거든요?
그런데 n, m에 값 대입해가면서 m값 구하다가
시간 다갔어요.
제대로 구해 놓고 더하다가 실수했어요.

[경우의 수] 기본 개념

일단 삼각형 ABD의 넓이를 구하기 위해선 D의 좌표가 필요하다.

D는 직선 BC 위의 점이니 직선 BC의 방정식을 구해보자.

$y=\frac{m}{2^m-1}(x-1)$

점 D의 x좌표는 2^n이니

$\mathrm{D}\left(2^n,\ \frac{m(2^n-1)}{2^m-1}\right)$

이제 삼각형 ABD의 넓이가 $\frac{m}{2}$보다 작거나 같다는 조건을 이용해보자.

$S=\frac{1}{2}\times(2^n-1)\times\frac{m(2^n-1)}{2^m-1}\leq\frac{m}{2}$

n, m은 자연수이니 양변에 (2^m-1)을 곱해서 정리하면

$(2^n-1)^2\leq 2^m-1$

이제 이 부등식을 만족하는 n, m의 값을 찾아야 한다.

문제에서 n이 주어졌을 때 가능한 m 값 중 가장 작은 녀석을 a_n으로 정의를 했고, 위의 부등식에서 n이 포함된 항이 m이 포함된 항보다 더 크게 변하고 있으므로 n을 기준으로 m을 찾는 것이 현명하다.

$n=1$: $m=1$

$n=2$: $m=4$

$n=3$: $m=6$

$n=4$: $m=8$

$n=5$: $m=10$

…

$n=10$: $m=20$

따라서 $\sum_{n=1}^{10} a_n=\left(2\sum_{k=1}^{10} k\right)-1=2\times 55-1=109$

(1) 자연수 n

(2) 점 $\mathrm{A}(2^n,\ 0)$

(3) 두 점 $\mathrm{B}(1,\ 0)$, $\mathrm{C}(2^m,\ m)$을 지나는 직선 위의 점 중 x좌표가 2^n인 점 D

(4) 삼각형 ABD의 넓이$\leq\frac{m}{2}$

(5) 위의 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 $m=a_n$

$Q.\ \sum_{n=1}^{10} a_n$?

▲ 흐아, 주어진 조건이 복잡해 보이는구먼. 일단 그림을 그려야겠네?

▲ 점 B는 고정되어 있고, A, C가 이동하는구먼? 그에 따라서 D도 달라지고?

▲ 가장 작은 자연수 m을 a_n이라고 표현을 했네? 이게 뭔 소리야? 아, n이 정해지면 그걸 만족하는 자연수 m이 여러 개 있는데 그 중 가장 작은 걸 a_n이라 한다는 이야기구먼?

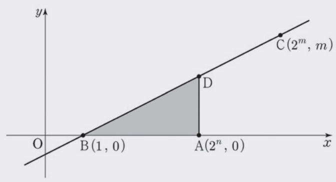
▲ 직선 BC 위의 점 D를 먼저 찾아보자. D의 좌표를 구하고 삼각형 ABD의 넓이를 식으로 표현해보자.

▲ 삼각형 ABD의 넓이$\leq\frac{m}{2}$ 이 조건을 써보니 n, m 두 문자가 표현된 부등식이 나오는데? 어떻게 풀지?

21. 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 m을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [4점]

> (가) 점 A의 좌표는 $(2^n, 0)$이다.
> (나) 두 점 B(1, 0)과 $C(2^m, m)$을 지나는 직선 위의 점 중 x좌표가 2^n인 점을 D라 할 때, 삼각형 ABD의 넓이는 $\frac{m}{2}$보다 작거나 같다.

① 109 ② 111 ③ 113 ④ 115 ⑤ 117



[함수]

직선 BC : $y=\frac{m}{2^m-1}(x-1)$

$D\left(2^n, \frac{m(2^n-1)}{2^m-1}\right)$

△ABD의 넓이

$S=\frac{1}{2}\times(2^n-1)\times\frac{m(2^n-1)}{2^m-1}\le\frac{m}{2}$

$(2^n-1)^2\le 2^m-1$

$n=1 : m=1$
$n=2 : m=4$
$n=3 : m=6$
$n=4 : m=8$

$n=5 : m=10$
$n=6 : m=12$
⋮
$n=10 : m=20$

$110-1$

$\therefore 109$

▲ 아, 문제에서 n, m은 둘 다 자연수였지? 그러면 대입해가면서 풀어보면 되는데⋯⋯ n, m 중 누구를 기준으로 해서 세면 좋을까?

▲ 당연히 n이지. 왜냐고? 제곱이 포함되어 있는 항이니까 1이 변화할 때 n이 포함된 항의 변화량이 m이 포함된 부분의 변화량보다 더 크지.

▶ 적정 풀이 시간 : 1분 30초 ~ 5분

정수, 자연수 조건이 포함된 부등식 처리법

정수 혹은 자연수 조건이 주어져 있는 상태에서 두 개 이상의 변수가 포함된 부등식은 처리하기가 곤란한 경우가 많다. 이 경우에는 한 가지 원칙을 가지고 접근하면 쉽다. '하나를 기준으로 잡고 나머지를 센다'. 기준으로 삼는 변수는 '가장 크게 움직이는 녀석'이면 좋다.

KEYWORD 크게 움직이는 녀석을 기준으로 잡고 침착하게 센다.

[ex] 두 자연수 n, m에 대하여 $10n+3m=50$을 만족시키는 두 자연수 n, m의 값을 각각 구하시오.

풀이 (방법1) **n을 기준으로 세기**

$n=1$: $3m=40$, 해없음

$n=2$: $3m=30$, $m=10$

$n=3$: $3m=20$, 해없음

$n=4$: $3m=10$, 해없음

$n=5$: $3m=0$, 해없음

따라서 $n=2$, $m=10$

(방법2) **m을 기준으로 세기**

$m=1$: $10n=47$, 해없음

$m=2$: $10n=44$, 해없음

$m=3$: $10n=41$, 해없음

$m=4$: $10n=38$, 해없음

$m=5$: $10n=35$, 해없음

$m=6$: $10n=32$, 해없음

$m=7$: $10n=29$, 해없음

$m=8$: $10n=26$, 해없음

$m=9$: $10n=23$, 해없음

$m=10$: $10n=20$, $n=2$

$m=11$: $10n=17$, 해없음

$m=12$: $10n=14$, 해없음

$m=13$: $10n=11$, 해없음

$m=14$: $10n=8$, 해없음

$m=15$: $10n=5$, 해없음

$m=16$: $10n=2$, 해없음

따라서 $n=2$, $m=10$

위의 두 방법을 비교해 보면 n을 기준으로 세는 것이 더 빠르고 편하다는 것을 알 수 있다. 그 이유는 무엇일까? n의 계수는 10, m의 계수는 3이다. 이는 n이 포함된 항이 더 크게 움직인다는 것을 의미한다. 즉, $10n+3m=50$이라는 식에서 n은 1을 증가시키면 $10n$의 값은 10이 늘어나지만 m은 1을 증가시키면 $3m$의 값은 3이 늘어난다는 의미이다. 우리는 더해서 50이 되는 조합을 찾아야 한다. 그렇다면 n, m 중 어떤 변수를 1씩 증가시키면서 찾는 편이 더 빠를까? 일반적으로 많은 변수 중 가장 크게 변하는 변수를 기준으로 세는 편이 유리하다. 다만, 가끔씩은 비록 많은 변수들 중에 가장 빠르게 변하지는 않지만 먼저 처리해 버리면 편한 경우도 있으니 융통성을 가질 필요는 있다.

memo

07 중복조합 문제를 바라보는 눈

26. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $a \times b \times c$는 홀수이다.
> (나) $a \le b \le c \le 20$

중복조합과 관련해서 출제된 주관식 문제야. 그다지 어렵지 않은 문제지만, 역시나 수능 문제이기에 한 번에 공식을 써서 풀리는 성질의 것은 아니었어. 잊지 마. ${}_n\mathrm{H}_r$과 같은 공식을 써서 한 큐에 풀리는 주관식 문제는 수능에서 출제되지 않아. 중복조합의 원리를 알고 있으면 어떤 문제가 나오든 쉽게 처리할 수 있단다.

학생A 중복조합의 공식만 아는 경우 [오답비율 80%]

선생님 저는 중복조합 공식 알거든요?
근데 이건 어떻게 풀어야 하는지 모르겠더라고요.
내신 문제나 모의고사 문제는 쉽게 풀었는데.

학생B 원리에 대한 몰이해에서 비롯된 사소한 계산 실수 [오답비율 20%]

아, 되게 쉬운 문제인데 급하게 풀다가 마지막에 실수했어요.
중복조합 공식 가끔씩 쓰다가 실수해요.
안 틀리는 방법 없나요?

[경우의 수] 기본 개념

$a\times b\times c$가 홀수라고 했으니 a, b, c는 모두 홀수겠구먼?
$a\le b\le c\le 20$라고 했으니 20 이하의 자연수 중 홀수를 3개를 중복 허용해서 고르면 끝.

바보같이 공식 쓰지 말고, 원리를 생각해.
중복조합은? '콩'
$1'+3'+5'+\cdots+19'=3$
자연수화 시키면
$1''+3''+\cdots+19''=13$
12개의 사이 공간 중 9개를 택하면 되니
답은 ${}_{12}C_9={}_{12}C_3=220$

26. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $a\times b\times c$는 홀수이다. → 모조리 홀수
> (나) $a\le b\le c\le 20$

[경우의 수]
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19
에서 중복허용 3개 홀수뽑기
$1'+3'+\cdots+19'=3$
$\ge 0 \quad \cdots \quad \ge 0$

$\tilde{1}+\cdots+\tilde{19}=13$
13개를 10등분

$\therefore {}_{12}C_9={}_{12}C_3$
$=\dfrac{12\times 11\times 10}{6}$
$=220$

사고의 흐름

(1) 자연수 a, b, c
(2) $a\times b\times c$는 홀수
(3) $a\le b\le c\le 20$
Q. 순서쌍 (a, b, c)의 개수?

▲ 일단, $a\times b\times c$가 홀수라고 했으니 a, b, c 모조리 홀수

▲ $a\le b\le c\le 20$라고 했으니 어디 보자. 20보다 작거나 같은 홀수 중에서 중복을 허용해서 3개를 택하면 되는구나?

▲ 공식 어떻게 쓰지? 아니야. 귤쌤이 중복조합은 '콩'을 떠올리라고 했어.

▲ 아하, 1, 3, 5, 7, …, 19의 개수의 합이 3이라고 하면 되겠네?

▲ $1'+3'+5'+\cdots+19'=3$

▲ 그런데 죄다 0 이상이니 자연수화 시켜야 하지?

▲ $1''+3''+\cdots+19''=13$

▲ 이제 콩 13개를 10등분하자.

▶ 적정 풀이 시간 : 1분 30초 ~ 3분

중복조합을 바라보는 시각

중복조합 문제는 $_{n}H_{r}$ 공식을 기억하는 것보다 원리를 이해하는 것이 중요하다. 수능은 내신이 아니다. 중복조합 문제는 매년 주관식으로 한 문제 정도씩 출제되고 있다.

KEYWORD 콩, 자연수화

1. 중복조합 문제의 풀이

(1) 중복이 허용된 조합인지 확인

(2) '선택 횟수'를 바탕으로 등식 세우기

(3) 자연수화 시키기

(4) 콩의 분배 문제로 생각해서 조합으로 손쉽게 처리

memo

08 손쉬운 이항분포 문제

28. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)=\int_0^x (a-t)e^t\,dt$의 최댓값이 32이다. 곡선 $y=3e^x$과 두 직선 $x=a$, $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [4점]

이 문제는 적분된 함수를 다시 미분하는 원리를 모르는 학생들−적분 후에 미분하면 그냥 t자리에 x 대입하면 된다고 생각하는−조차도 맞출 수 있도록 쉽게 출제된 녀석이야. 일단 주어진 함수를 미분한 후에는 부분적분의 개념만 알면 손쉽게 풀 수 있었지. 한 번에서 두 번 정도만 더 꼬였으면 많은 학생들이 틀렸을 법한 문제야. 이번 기회에 두 가지를 배우고 넘어가보자. (1) 적분 후 미분하는 방법 (2) 부분적분

학생A 시간 부족
[오답비율 99%]

28번쯤 오니 시간이 10분밖에 안 남아서 저는 28, 29, 30번 풀지 않고 그냥 푼 문제 확인하고 마킹했어요.

학생B 계산 실수
[오답비율 1%]

짱 쉬운데 계산 실수했어요.
부분적분 하다가요. 흑흑.

[미분과 적분] 기본 개념

일단, $f(x)$를 표현하는 식에 적분변수 t가 보이고 x는 적분 구간에 있으니 x에 대해서 미분해 버리자.

$f(x)=\int_0^x ae^t\,dt-\int_0^x te^t\,dt$이니까 x에 대해서 미분을 하면

$f'(x)=ae^x-xe^x=(a-x)e^x$

(왜 이렇게 $f(x)$의 식을 전개한 후에 미분하는지 생각해 보세요)

$f'(x)=(a-x)e^x$에서 $e^x>0$이니 결국 부호에 영향을 주는 녀석은 $(a-x)$이고 결국 $x=a$에 $f(x)$가 극댓값이자 최댓값을 갖는구나.

($f(x)$가 $x<a$에서 증가하고 $x>a$에서 감소하므로)

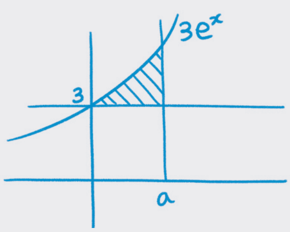
문제에서 $f(x)$의 최댓값이 32라고 했으니

$32=\int_0^a(a-t)e^t\,dt=a(e^a-1)-\Big[te^t-e^t\Big]_0^a=e^a-a-1$

안타깝게도 우리가 풀 수 없는 방정식이지?

a의 값은 못 구하지만, 일단 내버려두자.

문제에서 묻는 건 '**곡선 $y=3e^x$과 두 직선 $x=a$, $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이**'이니, 그림을 그려 보면 다음과 같다.



식으로 표현하면

$\int_0^a(3e^x-3)dx=3(e^a-1)-3a=3(e^a-a-1)$

우변, 좀 낯이 익지?

아까 구한 식의 3배잖아.

따라서 답은 96.

(거봐. 내가 내버려두라고 했잖아. 쓸모가 있다고)

사고의 흐름

(1) 양수 a

(2) 함수 $f(x)=\int_0^x(a-t)e^t\,dt$의 최댓값이 32

Q. 곡선 $y=3e^x$과 두 직선 $x=a$, $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이?

▲ 일단 함수가 적분 형태로 표현이 되어 있네? $f(x)$인데 x는 적분 구간에 있구나? 미분을 해서 t를 없애 버리겠어.

▲ 미분을 하고 도함수의 부호를 살펴보니 $x=a$에서 극댓값이나 최댓값을 가지는구나? 문제에서 최댓값이 32라고 했네?

▲ 최댓값=극댓값=32를 이용해서 식을 하나 더 적어볼 수 있어. 음, a의 값을 직접 구하는 데에는 무리가 있구먼. 일단 내버려두자. 쓸모가 있겠지.

▲ 그림을 그리고 문제에서 묻는 적분값을 계산해보니, 아하? 아까 구한 a가 포함된 식을 이용해야 하는구먼.

▶ 적정 풀이 시간 : 1분 30초 ~ 5분

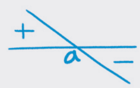
28. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)=\int_{0}^{x}(a-t)e^{t}\,dt$의 최댓값이 32이다. 곡선 $y=3e^{x}$과 두 직선 $x=a$, $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [4점]

[함수]

$f = a\int_{0}^{x} e^{t}dt - \int_{0}^{x} te^{t}dt$

$f' = a\cdot e^{x} - x\cdot e^{x}$

$= (a-x)e^{x}$



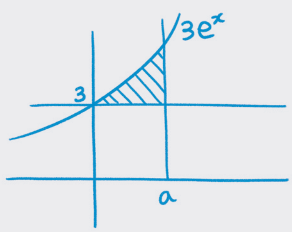
$x=a$ 에서 극대

$f(a)=32$

$f(a) = a(e^{a}-1) - [te^{t}-e^{t}]_{0}^{a}$

$= a(e^{a}-1) - a\cdot e^{a} + e^{a} - 1$

$= e^{a} - a - 1 = 32$



$\int_{0}^{a}(3e^{x}-3)dx$

$= 3(e^{a}-1) - 3a$

$= 96$

적분 형태를 미분하기 & 부분적분

적분 형태를 미분하는 경우 생각없이 하는 친구들이 많아요. 조심해야 합니다. 부분적분은 수능에 거의 매년 출제되고 있는 녀석인데, 이번에 자주 나오는 식 형태를 머릿속에 넣어두시면 좋습니다.

KEYWORD 전개 후 미분, te^t

1. 적분되어 있는 형태를 미분하기

$f(x)=\int_a^x g(f,\ t)dt$의 형태로 되어 있는 녀석들은 보통 양변을 x에 대해서 미분을 하면서 출발한다. 하지만 무턱대고 '적분식 안의 t 대신에 x를 대입한다'라고 기억하고 있으면 틀리는 경우가 있다. (사실 수학적으로는 틀린 이야기이기도 하고요) 제대로 배우고 넘어가보자.

[ex] $f(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt$

풀이 자, 양변을 x에 대해서 미분해보자.

'적분식 안의 t 대신에 x를 대입한다' : 그러면 뭐지? $f'(x)=(x-x)f(x)=0$ 맞나?

정신 차리세요, 이 사람아. 이렇게 풀자.

$$f(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt=\int_0^x xf(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$$

(x는 적분변수 t와 무관하니 적분 밖으로 뺄 수 있다)

이제 미분한다.

$$f'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(t)dt$$

정답이 0이 아니지?

다음을 기억하자.

(1) 번거롭더라도 적분식을 해체한다. (전개)

(2) '적분변수'를 파악하고 적분변수와 무관한 문자는 적분식 밖으로 빼낸다.

(3) 차분하게 하나씩 미분한다.

2. 부분적분

부분적분은 언제 쓴다? 미분하면 사라지는 '쓰레기'가 보일 때 사용한다.

그러면 수능에 자주 나오는 부분적분 문제는?

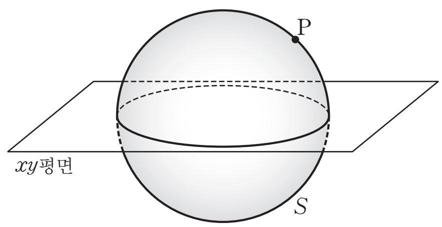
$$\int xe^x\,dx=xe^x-e^x$$

이건 기억해두면 편한 녀석이다.

09 열린 조건을 문제에 적합한 경우로 한정지을 수 있니?

29. 좌표공간에서 구 $S: x^2+y^2+z^2=50$과 점 $\mathrm{P}(0, 5, 5)$가 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 원 C에 대하여 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 $\frac{q}{p}\pi$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

> (가) 원 C는 점 P를 지나는 평면과 구 S가 만나서 생긴다.
> (나) 원 C의 반지름의 길이는 1이다.



주관식 문제 중 29번과 30번은 학생들을 당황시킬 수 있던 문제였어. 29번은 발상의 전환이, 30번은 날카로운 눈과 차분한 계산력이 필요했지. 29번 문제는 전형적인 수능 공간도형 문제로 '복잡하고 열린 조건'을 문제에서 요구하는 상황에 맞도록 '제한시켜서 식을 세우는 능력'을 묻고 있어. 사실 이것만 된다면 그 이후의 풀이는 중학교 2학년 ~ 고등학교 1학년 수준의 기하학적 개념으로도 충분했던 문제야.

학생A 아예 식을 세우지 못함
[오답비율 90%]

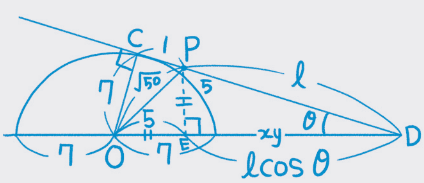
문제가 무슨 말인지도 모르겠고,
어디서부터 출발해야 할지도 모르겠어요.

학생B 답을 2π로 구함
or 최댓값이 아닌 최솟값을 구함
[오답비율 10%]

이거 그냥 평행할 때가 최대 아닌가요?
이거 저는 답이 다르게 나왔는데, 왜 틀렸죠?

[공간도형] 발상의 전환

이 문제는 다양한 풀이가 가능하다.
하지만 출발점은 같다.
'원 C를 지나는 평면과 xy평면 사이의 각이 가장 작은 경우를 찾자'
일단 원 C는 xy평면과 평행할 수 없다.
(왜냐하면 P를 지나면서 반지름이 1로 고정되어 있기 때문이다. P를 지나고 xy평면에 평행인 원의 반지름은 1이 아니라 5)
자, 그러면 P를 지나면서 xy평면과 이루는 각이 가장 작은 경우를 어떻게 찾을까? 그림을 그려보자.
3차원 문제는 일단 2차원으로 제대로 줄이기만 해도 많이 편해진다고 했지? 아래 그림은 xy평면에 수직이고 $\overline{\mathrm{OP}}$를 포함하는 평면으로 자른 단면이다. (점 P는 yz평면 위의 점이니 결국 yz평면으로 잘랐다는 이야기)



일단 P는 구 위의 고정된 점이고, $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{50}$이다.
한편, 원 C는 반지름이 1이고, C를 원의 중심이라고 하면 $\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{50-1}=7$이다. (원 C의 반지름 이용)
즉, C가 위치할 수 있는 공간은 위 그림에서 O를 중심으로 하고 반지름이 7인 원주 위라는 이야기.
한편, 원 C는 점 P를 지나야 하니 $\overline{\mathrm{CP}}=1$이어야 하지.
이 조건을 만족하는 경우는 두 가지이다.
이들 두 가지 경우 중 $\overline{\mathrm{CP}}$가 $\overline{\mathrm{OD}}$와 이루는 각이 작은 경우는 위 그림에 표시된 지점에 점 C가 위치한 경우야.
우리는 무엇을 구해야 하지?
위의 그림에서 바로 $\angle\mathrm{PDO}$의 코사인 값이 필요해.

사고의 흐름

(1) 좌표공간
(2) 구 S : $x^2+y^2+z^2=50$
(3) 점 $\mathrm{P}(0,\ 5,\ 5)$
(4) 원 C
 – 점 P를 지나는 평면과 구 S가 만나서 생긴다.
 – 반지름의 길이 : 1
(5) p, q는 서로 소인 자연수
Q. 원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값?

▲ 아따, 복잡하다 복잡해. 일단 묻는 게 뭔지 살펴보자.
▲ C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값?
▲ 정사영의 넓이가 최대가 되려면 최대한 원 C와 xy평면이 이루는 각이 작아야 하는 거지?
▲ 음? 이거 그냥 원 C가 xy평면이랑 평행할 때 최대 아닌가? 이러면 너무 쉬운데?
▲ 아, 이거이거 원 C의 반지름이 1이고 점 P를 무조건 지나야 하니까, xy랑 평행하게 못 만들 수도 있을 것 같네?
▲ 그러면 P를 지나면서 xy평면과 가장 작은 각을 이루도록 원 C를 만들면 되는 거지?

▶ 적정 풀이 시간 : 2분 ~ 10분

$\overline{\mathrm{PD}}=l$이라고 하면 $\overline{\mathrm{DE}}=l\times\cos\theta$

(E는 P에서 $\overline{\mathrm{OD}}$에 내린 수선의 발)

우리가 모르는 건 l, θ 두 가지 변수이니 식 2개가 필요해.

(1) 점 P의 y, z좌표는 모두 5

직각삼각형 PED에서 $\overline{\mathrm{PE}}=5=l\sin\theta$

(2) $\overline{\mathrm{OC}}=7$

직각삼각형 OCD에서 $\overline{\mathrm{OC}}=7=(5+l\cos\theta)\sin\theta$

이 둘을 연립하면

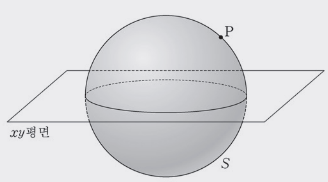
$5\sin\theta+5\cos\theta=7$

이제 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서 $\cos\theta$와 $\sin\theta$의 값을 구할 수 있지? 두 가지 경우가 나오고, 둘 중 $\cos\theta$ 값이 더 큰 경우를 구하면 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$.

따라서 정사영의 최댓값은 $\dfrac{4}{5}\pi$

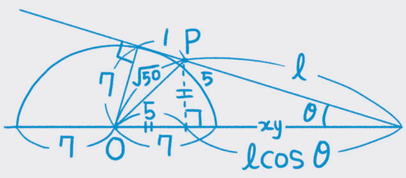
29. 좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+z^2=50$과 점 $\mathrm{P}(0, 5, 5)$가 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 원 C에 대하여 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 $\dfrac{q}{p}\pi$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) 원 C는 점 P를 지나는 평면과 구 S가 만나서 생긴다.
(나) 원 C의 반지름의 길이는 1이다. $d=7$



[공간도형]

최대한 두 평면 사이의 각이 작아야 한다!



$l\sin\theta=5$

$(5+l\cos\theta)\cdot\sin\theta=7$

$5S+5C=7$

$S^2+C^2=1$

$S^2+C^2=\dfrac{49}{25}-2SC=1$

$\therefore SC=\dfrac{12}{25}$

$C=\dfrac{4}{5}$ ($\because$ Max)

$\therefore 9$

어려운 수능 공간도형 문제를 바라보는 시각

수능에서 29번쯤에 출제되는 어려운 공간도형&벡터 문제의 경우 출제 의도가 명확하다. '다양한 경우가 가능한, 열린 조건 하에서 문제에서 요구하는 방향에 맞게 자유도를 줄일 수 있는가?' 이 경우 접근법은 정형화되어 있다. 단지, 훈련이 많이 필요할 뿐이다.

(1) 움직이는 점 혹은 도형이 무엇인지 살핀다.
(2) 문제에서 요구하는 방향에 맞는 특정 상황을 찾는다.
(3) (2)에 맞게 3차원 문제를 2차원화 시킨다.
(4) 기하학적인 성질을 활용해서 식을 세운다.
(5) 단순한 계산을 통해 답을 구한다.

KEYWORD 2차원화, 기하학적 성질 이용

10 생뚱맞은 함수를 보고 귀납적으로 접근할 수 있니?

30. 함수 $f(x)=e^{x+1}-1$과 자연수 n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=100|f(x)|-\sum_{k=1}^{n}|f(x^k)|$$

이라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

아마도 가장 높은 오답률을 자랑하는 문제일 거야. 보통 수학 B형의 30번 문제는 발상의 전환이 필요한 미적분 문제가 출제되지만, 올해의 경우 수학 A형과 비슷하게 발상의 전환보다는 '시간 투자'가 많이 필요한 문제가 출제되었어. 그럼에도 불구하고 맨 마지막에 위치했기 때문에 많은 학생들이 틀렸던 문제지. 이유는 단순해. 계산이 은근 까다로웠기 때문이야. 사실 이렇게 바보같이 출제했기 때문에 수학 B형의 1등급 커트라인이 비정상적으로 높았고 물수능이라는 오명을 쓰게 된 거야.

학생A 시간 부족으로 못 건드림 [오답비율 98%]

시간 너무 빡빡했는데 딱 보니까 어려워 보여서 패스했어요.

학생B 계산 실수 [오답비율 2%]

이거 제대로 풀고 맨 마지막에 더하다가 실수했어요. 아놔, 선생님 이번 수능 좀 쉬웠죠?

[미분] 기본 개념

어휴, 좀 작작 더럽게 만들지. $g(x)$ 꼬라지 하고는.
일단 절댓값이 보여.
$f(x)$는 미분이 가능하지만, 절댓값을 씌우면…….
경우를 나누자. 당황하지 마. 절댓값? 경우를 나눈다.

(1) $|f(x)|$

$$|f(x)|=|e^{x+1}-1|=\begin{cases} x\geq -1 : e^{x+1}-1 \\ x<-1 : 1-e^{x+1} \end{cases}$$

: 미분 불가

(2) $|f(x^k)|$

$$|f(x^k)|=|e^{x^k+1}-1|=\begin{cases} x^k\geq -1 : e^{x^k+1}-1 \\ x^k<-1 : 1-e^{x^k+1} \end{cases}$$

k가 짝수 : $e^{x^k+1}-1$

k가 홀수 : $x^k+1=x^{2m-1}+1=\begin{cases} x\geq -1 : e^{x^k+1}-1 \\ x<-1 : 1-e^{x^k+1} \end{cases}$

하아. 고통스럽지?
이제 감이 조금 왔어야 정상이야.
k가 홀수인지 짝수인지에 따라 $|f(x^k)|$가 달라지니,
n에 직접 값 넣어가면서 시그마 풀어봐야겠지?

$n=1 : g(x)=100|f|-|f|=99|f|\ : X$

$n=2 : g(x)=100|f|-|f|-|f(x^2)|$
$\qquad\qquad =99|f|-e^{x^2+1}+1 : X$

$n=3 : g(x)=99|f|-e^{x^2+1}+1-|f(x^3)|$

$$=\begin{cases} x\geq -1 : 99(e^{x+1}-1)-e^{x^2+1}+1 \\ x<-1 : 99(1-e^{x+1})+e^{x^2+1}-1 \end{cases} : X$$

감이 오니?
$f(x^k)$에서 k가 짝수인 녀석들은 $x=-1$에서 항상 미분이 되지만, k가 홀수인 녀석들은 문제를 일으키고 있어.
(그러니 우리는 k가 홀수인 놈들만 살피면 된다.)
이거 맨 앞에 있는 $99|f|$를 죽여야지 미분이 되겠지?
$n=3$일 때 좌미분계수와 우미분계수(k가 홀수인 녀석들에 대해서만 살핀다. 짝수인 놈들은 미분이 되잖아. 문제아는 k가 홀수인 놈들이야.)를 비교해 보면,

사고의 흐름

(1) 함수 $f(x)=e^{x+1}-1$
(2) 자연수 n
(3) 함수
$g(x)=100|f(x)|-\sum_{k=1}^{n}|f(x^k)|$
(4) $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능
Q. 가능한 모든 자연수 n의 합은?

▲ 일단 이거 $g(x)$가 더럽네? 절댓값에 시그마에, 어휴. 이거 어떻게 하지?
▲ 당황하지 말자. 귤쌤이 뭐라고 했지? 절댓값이 보이면? '경우를 나누자'
▲ $g(x)$를 보면 절댓값 안에 $|f(x)|$와 $|f(x^k)|$가 보이잖아? 일단 이 둘을 살펴보자.
▲ 이런 시밤바. 둘 다 미분이 안되는데? 게다가 $|f(x^k)|$는 k가 짝수인지 홀수인지에 따라 또 따져야 하는데?
▲ 아? 뭐라고? k가 짝수인지 홀수인지 따져야 한다고? 오? 이거 n에다가 숫자 넣어가면서 직접 해보면 될 것 같은데?
▲ 가자. 시간은 좀 걸릴 것 같지만 차분하게 계산하자.

▶ 적정 풀이 시간 : 2분 ~ 15분

$$\begin{cases} x \geq -1 : 99-3=96 \\ x < -1 : -99+3=-96 \end{cases}$$

$n=5$일 때는 어떨까?

$$\begin{cases} x \geq -1 : 99-3-5=91 \\ x < -1 : -99+3+5=-91 \end{cases}$$

아하, 결국 3부터 시작해서 홀수를 어디까지 더해야 99를 상쇄시킬 수 있을까의 질문으로 이어져. $3+5+\cdots+19=99$이고 (1부터 연속한 n개의 홀수의 합은 n^2이니 $10^2-1=99$에서 1부터 연속한 10개의 홀수의 합은 100이라는 점을 이용하자. 1부터 시작해서 10번째 홀수는 19야.)

결국 $n=19$일 때 비로소 더럽던 $99|f|$가 사라질 수 있게 되고 미분이 가능하다.

$n=20$은 어떨까? 애초에 k가 짝수일 때는 미분이 가능하게 $|f(x^k)|$가 나오니 괜찮지?

$n=21$은? 안되겠지? 왜냐? 미분했을 때, 99는 지워지지만 뒤에 새롭게 '21'이 태어날 테니까.

따라서 가능한 $n=19$, 20

30. 함수 $f(x)=e^{x+1}-1$과 자연수 n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=100|f(x)|-\sum_{k=1}^{n}|f(x^k)|$$

이라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

[함수]

ⓘ $|f(x)| = |e^{x+1}-1|$

$$= \begin{cases} x \geq -1 : e^{x+1}-1 \\ x < -1 : 1-e^{x+1} \end{cases}$$ 미분 X

$|f(x^k)| = |e^{x^k+1}-1|$

$$= \begin{cases} x^k \geq -1 \cdot e^{x^k+1}-1 \\ x^k \leq -1 \cdot 1-e^{x^k+1} \end{cases}$$

k가 짝수 ⇒ $e^{x^k+1}-1$

k가 홀수 ⇒ $x^{2m-1}+1$

$$\begin{cases} x \geq -1 : e^{x^k+1}-1 \\ x < -1 : 1-e^{x^k+1} \end{cases}$$

99를 지워야 한다.

$3+5+7+\cdots+19=99$

$\cdots$ $n=20$, 19

⇒ 39

ⓘⓘ $n=1$

$g=100|f(x)|-|f(x)|$

$=99|f(x)|$: X

$n=2$

$g=100|f|-|f|-|f(x^2)|$

$=99|f|-e^{x^2+1}+1$: X

$n=3$

$g=99|f|-e^{x^2+1}+1-|f(x^3)|$

$$= \begin{cases} x \geq -1 : 99(e^{x+1}-1)-e^{x^2+1}+1 \\ x \leq -1 : 99(1-e^{x+1})+e^{x^2+1}-1 \end{cases}$$

30번 문제의 해법

수능 문제의 맨 마지막 문제인 30번 문제는 주로 두 가지 타입으로 출제된다. 발상의 전환이 필요하거나 혹은 시간이 많이 필요하거나. 보통 수학 A형은 시간이 많이 필요하고, 수학 B형은 발상의 전환이 필요하였으나 올해 수능의 경우엔 A형과 B형 모두 시간이 많이 필요한 문제로 출제되었다. 그 말인즉, '귀납적인 접근'이 필요하다는 이야기이다. 맨 마지막 30번 문제를 위한 다음 키워드를 기억하도록 하자. 어설프게 30번 문제에 시간 쏟느니, 앞부분의 못 푼 다른 문제들을 살피고 이미 푼 문제들을 확인하고 마킹 체크하는 편이 유리하다.

KEYWORD 20분 이상 시간이 남지 않으면 30번은 패스해라.

memo

memo

memo