(부록)

수능 해부학

21, 29, 30

Prologue

<21, 29, 30을 대하는 근본 원칙>

1. 30번은 나머지 29문제를 완벽하게 풀고, 검산도 했는데도 20분이 남으면 건드린다.

2. 복잡하게 보이는 상황은 항상 둘로 나누어서 살핀다.
(1) 고정된 것 : 정점, 고정된 도형, x만 포함된 함수
(2) 움직이는 것 : 동점, x가 아닌 변수(t)가 포함된 녀석

3. 출제자가 생각하는 특이한 상황, 즉 정답 상황에 해당하는 그림을 최대한 빨리 예상할 수 있는 감각을 기르면 큰 도움이 된다.
(어차피 시험장에서는 최대한 빨리 답을 구하는 것이 최선임)

4. 평소 어려운 문제를 풀 때에는
(1) 최소 2개 이상의 방법으로 풀어봐야 한다.
(시험장에서 늘 하던 방법으로 했는데 막히면 어쩌려구?)
(2) 지면 사용과 시간 사용을 줄이는 방법을 지향해야 한다.
(그래야 다른 문제들 볼 시간도 생기고 검산하기도 쉽다)

5. 문제를 푸는 순서
(1) 29를 푼다. (최대 10분 투자)
(2) 21을 푼다. (최대 15분 투자)
(3) 조건 1이 충족된다는 전제 하에 30을 푼다. (최대 20분 투자)

6. 21, 29, 30을 손대기 위해서는 나머지 27문제를 40분~60분 사이에 끊는 것이 선행되어야 한다.

Chapter I.

21. 최소 두 가지 이상의 상황이 벌어지는 미분과 적분 문제

[단원] 미분과 적분
[함수] 다항함수 + 초월함수
[필수요소]
(1) 처음 보는 형태의 함수
(2) 최소 2개 이상의 경우 생성
(3) 압축적이고 간접적인 표현

[설계 과정]
(1) 미분과 적분 중 택 1
　① 미분 : 미분과 적분2의 고급 미분 스킬이 사용됨
　② 적분 : 미분과 적분2의 고급 적분 스킬이 사용됨
(2) 대수함수의 선택 : 다항함수, 분수함수, 무리함수
(3) 초월함수의 종류 선택 : 지수, 로그, 삼각
(4) 새로운 함수의 형태 생성 : (2), (3)의 혼합
(5) 정답 상황에 해당하는 그림과 식 생성
(6) (5)를 간접적인 방법으로 제시
　① 한 번에 정답을 찾는 것이 불가능해야 함
　② 정답을 포함하는 다양한 경우가 생성되어야 함
　③ 개념에 대한 정확한 이해 없이는 풀 수 없어야 함

[평가요소]
(1) 미분과 적분의 정성적 의미를 알고 있는가? (기계적 사용 지양)
(2) 함수, 방정식, 부등식의 관찰에 있어서 차원을 자유롭게 넘나들 수 있는가? ($f-level$, $f'-level$, $\int f-level$)
(3) 함수의 그래프를 최대한 정확하게 그리고 면밀하게 관찰할 수 있는가?
(4) (3)으로부터 다양한 경우를 찾고, 그 중 정답 상황을 찾아낼 수 있는가?

- 풀이의 실마리 -

1. 어려운 문제를 바라볼 때 : Divide & Conquer (나누어서 살피자)
   (1) 고정된 것 + 변하는 것
   (2) 그릴 수 있는 것(쉬운 것) + 그릴 수 없는 것(어려운 것)

2. 항상 쉬운 것 먼저 처리한다.
   (1) 그릴 수 있는 건 그래프를 그린다.
   그래프를 그릴 때에는 크고 정확하게 딱 한번 그린다.

   (2) 그래프를 그릴 때에는
   - f-level에서 해야 할 것
     a. 지나는 쉬운 점 : y절편
     b. 중요한 점 : x절편(방정식의 근)
     c. 정의역의 양 극단의 수렴, 발산, 점근선 여부
     ※ 미분하지 아니하고 그냥 그래프를 그리는 능력이 2017학년도, 2018학년도 수능 30번에서 모두 중요했다는 것을 명심하자.

   - f'-level에서 해야 할 것
     a. 부호 : 함수의 증가 감소 파악
     b. 부호의 변화 : 극값
     c. 도함수의 극대와 극소 : 변곡점의 존재 여부

   - f''-level에서 해야 할 것
     변곡점 파악

3. 경우가 나누어지는 것에 익숙해지자.
   (1) 21, 30은 경우가 반드시 나누어진다.
   (2) 생성된 여러 가지 경우 중에 정답 상황을 찾으면 된다.

4. 출제자가 생각한 정답 상황의 그림을 상상하자.
   가장 아름답고 하나로 확정될 수 있는 '특정한 상황'의 그림이 보통 출제자가 생각하는 정답상황이다.

- 미분 다시 바라보기 -

1. 미분을 왜 해야 하는가?
   그래프를 정교하게 그리기 위해서
   (미분하지 않고서도 웬만한 함수의 그래프를 그릴 수 있어야 한다)
   함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래의 Framework로 그린다.

<table>
<tr><td>레벨</td><td>해야 할 것</td></tr>
<tr><td>f</td><td>① 정의역 범위 확인
② 정의역의 양 극단에서의 수렴, 발산여부 확인 : 점근선이 있니?
- 점근선이 있다면 접선 개수 셀 때 긴장해야 한다.
③ 쉬운 점 확인 : $x=0,1,-1$ 등을 넣어서 쉽게 파악할 수 있는 점
④ 근 확인 : $f(x)=0$을 만족하는 근이 쉽게 보인다면 체크</td></tr>
<tr><td colspan="2">미분이 필요하다면 미분을 한다</td></tr>
<tr><td>f'</td><td>① 부호에 영향을 주지 않는 녀석들은 눈길을 주지 말자.
② 부호 변화를 관찰한다.
③ ②로부터 원래함수의 개형을 그린다.
- 개형이 하나로 고정되지 않는다면, 경우를 나누어서 그린다.
④ ②, ③으로부터 원래 함수의 극대와 극소를 관찰한다.
⑤ f'의 극대와 극소를 관찰하여 변곡점 존재 여부를 파악</td></tr>
<tr><td colspan="2">미분이 필요하다면 미분을 한다
(이 때, 부호변화에 영향 안준다고 지웠던 놈들도 같이 데리고서 미분을 해야 한다)</td></tr>
<tr><td>f''</td><td>① 부호를 관찰
- 원래 함수 f의 오목과 볼록 관찰
② 변곡점 위치 파악</td></tr>
</table>

2. 미분을 한다는 것이 무엇인가?
   (1) 도함수를 구한다.
   (2) 미분계수를 구한다.

3. $\dfrac{d}{dx}f(x)$
   (1) 함수 $f(x)$를 x에 대하여 미분한다.

(2) 그 결과 나오는 함수는 x에서의 미분계수를 함숫값으로 갖는, 도함수이다.

4. Chain Rule

미분 연산자 $\frac{d}{dx}$는 특정 상황을 제외하고서는 분수처럼 사용하여도 된다.

$$\frac{dA}{da} = \frac{dA}{db} \times \frac{db}{da}$$

이로부터 파생되는 것이 음함수 미분과 매개변수 미분(둘의 본질은 같다)

5. $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = 0$을 만족하는 x의 집합 A

(1) $y = f(x)$의 그래프에서 접선의 기울기가 0이 되는 x값들을 모아둔 것

(2) 집합 A의 원소들은 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 발생시키는 x의 좋은 후보군이다.

(3) 집합 A의 원소들과 $y = f(x)$가 존재하는 구간의 양 끝에서의 x값들을 모아놓으면 그 안에서 반드시 $f(x)$의 최대, 최소를 만드는 x를 찾을 수 있다.

(4) 극값이 아닌 함숫값을 만드는 함정들($y = x^3$에서 $x = 0$ 같은 놈들)도 같이 데리고 있다.

(5) $y = f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점들의 x좌표이다.

- 적분 다시 바라보기 -

1. 적분을 왜 해야 하는가?

(1) 기하학적 이유 : 길이, 넓이, 부피를 구하기 위해서

(2) 결과 관찰의 목적 : 피적분함수의 결과 나타나는 함수는 어떻게 생겼는가?

(적분 계산을 직접적으로 하지 않고서도 적분 결과를 그릴 수 있어야 한다)

$g(x)=\int_a^x f(t)dt$은 아래의 Framework로 바라본다. (x에 숫자를 넣으면 정적분)

옵션	방법
$\int$를 없앤다	① 차원 거슬러 올라가기 1 - 직접 $f(t)$의 원시함수를 구하여 적분의 위끝과 아래 끝을 대입한다. - 어려운 문제에서는 잘 안쓰인다. (왜? 계산력 영역임) ② 차원 거슬러 올라가기 2 $f(t)$의 원시함수가 잘 안보인다면, a. 치환적분 : 미분된 결과가 곱해져 있음 b. 부분적분 : $f(t)$를 두 부분으로 쪼개서 하나는 미분하고 하나는 적분하여 곱하면 적분하기가 쉬울 때 ③ 양변을 x에 대하여 미분한다. - 적분 구간 내에 함수 $g(x)$의 변수인 x가 포함되어 있을 때 가능 - 적분 구간 내의 변수가 존재하고 그 변수가 $f(t)$에 같이 섞여있을 때에는 다 전개한 후에 천천히 미분해야 한다.
$\int$를 그대로 둔다.	① $f(t)$의 입장에서 관찰 - $y=f(x)$를 그린다. - $g(x)=\int_a^x f(t)dt$는 $f(x)$의 그래프에 대해서 $x=a$와 $x=x$ 사이의 정적분값에 해당한다. ② $F(t)$($\int f(x)dx$)의 입장에서 관찰 - $g(x)=\int_a^x f(t)dt$는 $f(x)$의 원시함수 중 $(a,0)$을 지나는 함수이다. - $g(b)=\int_a^b f(t)dt$는 $F(t)$의 입장에서는 변화량이다. ($F(b)-F(a)$)

2. 적분을 한다는 것이 무엇인가?

(1) 원시함수를 구한다.

(2) 정적분값을 구한다.

3. $\int_a^x f(t)dt$

(1) 함수 $f(t)$를 t에 대하여 적분하여 나온 함수 $F(t)$에 대하여 $F(x)-F(a)$

(2) 함수 $y=f(x)$의 $x=a$부터 $x=x$까지의 정적분 값

함수 $y=f(t)$, x축, $x=a$, $x=x$가 이루는 공간의 넓이와 관련이 있음

(3) $\int_a^x f(t)dt= [tf(t)]_a^x - \int_a^x tf'(t)dt$ (부분적분)

- $f(t)$를 적분하기가 힘들다면, 항상 대안이 있다 : $tf'(t)$를 대신 적분하자.

4. $\int \approx \sum$

(1) 적분은 본질적으로 더하는 것이다.

(2) 시그마에서 변수 k가 아닌 미지수는 시그마 밖으로 뺄 수 있다

: $\sum_{k=1}^{5} sk = s\sum_{k=1}^{5} k$

(3) 적분에서도 적분변수 x가 아닌 미지수는 인테그랄 밖으로 뺄 수 있다

: $\int_a^b tf(x)dx = t\int_a^b f(x)dx$

(4) 시그마는 k의 범위를 적절히 나누어서 처리할 수 있고, 변수 k를 바꿀 수 있다.

(5) 적분도 x의 범위를 적절히 나누어서 처리할 수 있고, 적분 변수 x를 바꿀 수 있다. 여기서 더 나아가면 치환적분이 된다.

5. $\int_a^x f(t)dt=0$을 만족하는 x의 집합 A

(1) $y=f(x)$의 그래프에서 a부터 시작해서 x까지 정적분을 했을 때 그 값이 0이 되는 x

- $x=a$를 항상 써먹을 수 있다.

(2) $y=f(x)$의 그래프를 놓고 관찰해보면 a의 위치에 따라 x의 개수가 달라질 수 있음을 느낄 수 있다.

(3) $g(x)=\int_a^x f(t)dt$의 그래프가 x축과 만나는 점들의 x좌표이다.

- $y=g(x)$는 $f(x)$의 원시함수 중 $(a,0)$를 지나는 녀석이니 a의 위치에 따라 x의 개수가 달라질 수 있다.

(4) $f(t)$의 원시함수 중 아무 녀석($F(x)=\int f(x)dx$)을 데리고 왔을 때, $F(x)-F(a)=0$, 즉 변화량이 0가 되게 하는 x

Chapter II.

29

29. 3차원 상황의 합리적인 관찰(기하 + 해석)을 요구하는 문제

[단원] 기하와 벡터
[도형] 구, 다면체, 평면, 직선 (+ 2차원 도형)
[필수요소]
(1) 처음 보는 상황의 제시
　　(type I) 줄글로 도형의 배치 설명
　　(type II) 도형의 방정식으로 도형의 배치 설명
　　(type III) 벡터 방정식/부등식으로 도형의 배치 설명
(2) 동점의 개수(복잡도) : 1 또는 2
(3) 목적함수(구해야 하는 답의 카테고리)
　　(type I) 거리, 넓이, 부피 or 거리, 넓이, 부피의 합
　　(type II) 벡터의 크기(벡터의 합/차)
　　(type III) 벡터의 내적값
　　(type IV) 각도($\cos\theta$)
(4) (2)에 대하여 다음 두 가지 종류 발생
　　(type I) 경곗값
　　(type II) 극값

[설계 과정]
(1) 입체도형 중 2개 이상 선택
(2) 목적함의 선택 : 거리/넓이, 벡터의 크기, 벡터의 내적값
(3) 정답 상황의 결정 : 경곗값, 극값
(4) (1)~(3)의 규명 방법 체크 : 순수 기하, 또는 순수 해석(좌표)만을 사용하는 것보다 둘을 적절하게 조합한 것이 보통 최선이 되도록 함

[평가요소]
(1) 주어진 상황을 이해하고 3차원에서 그림을 정확하게 그릴 수 있는가?
(2) 움직이는 점(동점)이 섞여있는 상황에서 고정된 도형들 사이의 위치관계를 배운 개념을 활용하여 파악할 수 있는가?
(3) 3차원 상황을 적절히 변형하여 2차원 상황으로 변경하여 문제의 복잡도를 낮출 수 있는가?
(4) 무조건적인 순수 기하, 순수해석적 방법이 아니라 둘을 적절히 조합하여 최적의 풀이를 구현할 수 있는가?

- 풀이의 실마리 -

1. 어려운 문제를 바라볼 때 : Divide & Conquer (나누어서 살피자)
   (1) 고정된 것 + 변하는 것
   (2) 그릴 수 있는 것(쉬운 것) + 그릴 수 없는 것(어려운 것)

2. 항상 쉬운 것 먼저 처리한다.
   (1) 문제에서 고정된 것을 먼저 그리자.
   도형을 그릴 때에는 크고 정확하게 딱 한번 그린다.

   (2) 고정된 것 사이의 위치 관계 파악
   - d : 고정된 도형들 사이의 거리는 어떠한가?
     - 대칭성이 있는가?
   - θ : 고정된 도형들 사이의 각은 어떠한가?
     - 대칭성이 있는가?
     - 특수각이 보이는가?

   (3) 동점의 존재 범위 파악
   동점이 존재할 수 있는 전체 범위 파악

   (4) 목적함수 처리
   - 문제에서 묻는 것 = 목적함수 (합벡터의 크기, 벡터의 내적 등)
   - 벡터의 성질을 활용하여 목적함수를 적절한 형태로 변환
     (그냥 생으로 좌표로 놓고 푸는 방법도 있다는 걸 잊지 말자)

   (5) 대칭의 중심 찾기
   고정된 도형의 핵심(구의 핵심은 중심에 있다)들을 포함하여 문제상황을 선대칭으로 만드는 평면을 찾고, 그 평면으로 문제상황을 자르면 3차원 문제가 2차원 문제가 된다.

   (6) 동점의 위치 규명
   (5)의 평면이 동점의 존재범위와 만나서 이루는 점이 대부분의 경우에 목적함수가 최대 또는 최소가 되는 점이 된다.

- 합벡터 다시 바라보기 -

1. 합벡터가 무엇인가?
   두 개 이상의 벡터의 합으로 방향와 크기를 갖는다.
   ($\vec{a}-\vec{b}$ 조차도 $\vec{a}+(-\vec{b})$로 읽을 수 있다)

2, 합벡터의 방향
   (기하) 두 벡터가 이루는 평행사변형의 대각선 방향
   (해석) 두 벡터의 각 방향의 성분을 다 더하여 얻은 좌표와 원점을 이은 방향

3. 합벡터의 크기
   (기하) 두 벡터가 이루는 평행사변형의 대각선의 길이
   (해석) 두 벡터와 각 방향의 성분을 다 더하여 얻은 좌표와 원점 사이의 거리

4. 벡터의 성질과 합벡터
   벡터는 시점 선택이 자유롭다.
   이는 합벡터를 관찰할 때, 기준점 설정이 다양하다는 것을 의미한다.
   $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}=\ldots$

   (!) 그렇다면 무엇을 기준점으로 잡는 것이 좋은가?
   - 바보같이 항상 원점으로 잡지 말자.
   - 기준점은 '대칭의 중심'에 해당하며 기하학적으로 '좋은 점'을 택하는 것이 좋다.

     (예) 원 위의 동점 P에 대하여 $\overrightarrow{OP}$

       : 원의 핵심은 중심이므로 중심 C를 기준으로 보면 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CO}$

       ($\overrightarrow{OP}$라는 움직이는 벡터를 $\overrightarrow{CO}$라는 고정된 벡터와 $\overrightarrow{CP}$라는 움직이는 벡터로 나눈 것에 주목하자. 소름이 안돋는다면 책 앞부분을 다시 펴서 'Divide & Conquer'라는 구절을 다시 보고 오시게)

- 좋은 기준점들 : 어찌되었든 한 덩어리로 뭉쳐져 있는 합벡터를 고정된 것 + 움직이는 것으로 나누는 방향으로 가기 위하여 기준점을 잡고, 그 기준점을 시점으로 표현을 고치는 것이다.

  a. 원의 중심 : 원의 중심으로부터 원 위의 점에 이르는 거리는 모두 반지름으로 같다.
  (길이 고정, 오직 각도만 변하게 관찰할 수 있음)

  b. 구의 중심 : 구의 중심으로부터 구 위의 점에 이르는 거리는 모두 반지름으로 같다.
  (길이 고정, 오직 각도만 변하게 관찰할 수 있음)

  c. 선분의 중점 : 두 정점 A,B와 동점 P,Q에 대하여 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}$는 크기와 방향이 모두 변해서 짜증나는데, 이를 고정된 두 점의 중점 M을 기준으로 잡으면
  $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}$ 가 되므로 관찰이 용이함
  (2018학년도 수능)

  d. 다각형과 다면체의 무게중심 : 삼각형, 사각형, 정사면체, 정육면체는 전체 도형의 무게중심을 기준으로 잡으면 관찰이 용이하다. (무게중심으로부터 각 꼭짓점에 이르는 벡터의 합은 항상 0이므로)

5. 합벡터의 처리

방법	설명		장점	단점
표현유지	생 좌표	① 모든 점을 좌표성분으로 표현 ② 합벡터의 성분을 규명 ③ 합벡터의 크기의 최대, 최소 규명	표현만 된다면 웬만하면 쉽게 해결할 수 있음	동점의 좌표 표현이 어려운 경우가 많음 (원 위의 점, 구 위의 점 등)
	생 내적	① 합벡터 자기자신과 내적하여 전개 ② 전개된 식을 바탕으로 최대, 최소 규명	범용적	풀이 시간, 계산량이 만만치 않음
표현변경	기하	① 기준점을 잡아서 합벡터의 표현을 변경 ② 합벡터를 고정된 벡터와 움직이는 벡터로 분리 ③ 고정된 벡터와 움직이는 벡터의 방향이 같을 때와 반대일 때가 각각 최대, 최소에 해당	① 문제의 높은 복잡도를 낮출 수 있음 ② 계산량이 많지 않음 ③ 풀이 시간도 길지 않음	기준점의 선택이 중요함
	내적	① 기준점을 잡아서 합벡터의 표현을 변경 ② 합벡터를 고정된 벡터와 움직이는 벡터로 분리 ③ 내적 수행	① 문제의 높은 복잡도를 낮출 수 있음 ② 계산량이 많지 않음 ③ 풀이 시간도 길지 않음 ④ 내적 수행에 있어서 기하적인 센스를 발휘할 여지도 있음	표현변경 후 기하로 푸는 것보다는 복잡한 편

– 벡터의 내적 다시 바라보기 –

1. 내적의 정의
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum a_i b_i$

2. 내적 해석하기

해석	설명	장점	단점
I. 좌표곱의 합	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum a_i b_i$	① 언제든 사용할 수 있다. ② 표현만 된다면 웬만한 경우에 답을 찾을 수 있다. ③ 벡터가 움직이는 공간이 충분히 제한적일 때 쓰면 유용하다.	두 벡터를 좌표로 온전히 표현하는 것이 어려운 경우들이 있다. (구 위의 동점, 정사면체 위의 동점 등)
II. 길이 × 길이 × 각($\cos\theta$)	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta$	① 길이 또는 각도가 일정할 때 사용하면 편리하다. ② 구, 원과 같이 기준점을 중심으로 잡았을 때 길이가 일정한 상황에 유용하다.	① 길이와 각도가 모두 변하는 상황에서는 사용이 어려울 수 있다. ② 큰 의미에서 III의 하위호환이다.
III. 수선의 발을 내린 후 곱한다	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \times (\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta)$	① 한 벡터를 고정시킬 수 있을 때 유용하다. ② 한 벡터를 고정시키고, 나머지 한 벡터의 시점과 종점에서 고정된 벡터를 연장한 직선 위에 수선의 발을 내려서 탄생하는 선분의 길이만 관찰하면 된다.	① 수선의 발 작도가 필수적이다. (가장 기하를 많이 쓰는 방법) ② 수선의 발 작도가 어렵거나, 수선의 발을 작도하여도 그 길이 규명이 어려울 때에는 사용이 껄끄럽다.

- 각도($\cos\theta$) 내적 다시 바라보기 -

1. 수능에서 다루는 각도
   (1) 직선 vs 직선
   (2) 직선 vs 평면
   (3) 평면 vs 평면

2. 각도의 해석

해석	설명	장점	단점
I. 작도	정의에 입각하여 수선의 발을 내린 후 직각삼각형을 찾아서 $\cos\theta$ 규명	가장 간편하다	① 작도가 불가능한 상황이라면 쓰기가 어렵다. (두 평면의 교선이 안 보이는 상황 등) ② 높은 기하학적 센스와 그림 실력이 필요하다. ③ 범용적이지 않다.
II. 정사영	정사영 전후의 길이, 넓이변화를 바탕으로 $\cos\theta$를 간접적으로 규명	① 평면과 평면 사이의 각 규명 시 유용하다. ② 특히 넓이를 구하기 쉬운 삼각형들이 나왔을 때 편리하다.	① 넓이를 두 번이나 구해야 한다. (정사영 전, 정사영 후) ② 정사영 전후의 도형 변화를 면밀하게 관찰할 수 있어야 한다.
III. 벡터 내적	도형을 방정식으로 표현한 후 방향 벡터, 법선 벡터 사이의 내적을 활용하여 $\cos\theta$ 규명	① 가장 범용적이다. ② 작도나 정사영으로 안 되는 문제조차도 벡터로는 거의 무조건 풀 수 있다.	① 도형을 방정식으로 표현해야 한다. (적어도 방향벡터, 법선벡터는 찾아야 함) ② 계산량이 꽤 된다.

Chapter III.

30

30. 두 가지 이상의 상황이 벌어지는 미분과 적분 종합 선물 세트

[단원] 미분과 적분
[함수] 다항함수 + 초월함수
[필수요소]
(1) 처음 보는 형태의 함수
(2) 최소 2개 이상의 경우 생성
(3) 압축적이고 간접적인 표현
(4) 최소 5분 이상의 시간 투자가 필요(평균 풀이 시간 10분 ~ 15분)

[설계 과정]
(1) 미분과 적분 중 택 1
① 미분 : (미분과 적분2)의 고급 미분 스킬 + (미분과 적분1)의 미분에 대한 기본~심화 개념
② 적분 : 미분과 적분2의 고급 적분 스킬 + (미분과 적분1)의 적분에 대한 기본~심화 개념
(2) 대수함수의 선택 : 다항함수, 분수함수, 무리함수
(3) 초월함수의 종류 선택 : 지수, 로그, 삼각
(4) 새로운 함수의 형태 생성 : (2), (3)의 혼합
<u>(5) 정답 상황에 해당하는 그림과 식 생성</u>
(6) (5)를 간접적인 방법으로 제시
① 한 번에 정답을 찾는 것이 불가능해야 함
② 정답을 포함하는 다양한 경우가 생성되어야 함
③ 개념에 대한 정확한 이해 없이는 풀 수 없어야 함

[평가요소]
(1) 미분과 적분의 정성적 의미를 알고 있는가? (기계적 사용 지양)
(2) 함수, 방정식, 부등식의 관찰에 있어서 차원을 자유롭게 넘나들 수 있는가? ($f-level,\ f'-level,\ \int f-level$)
(3) 함수의 그래프를 최대한 정확하게 그리고 면밀하게 관찰할 수 있는가?
(4) (3)으로부터 다양한 경우를 찾고, 그 중 정답 상황을 찾아낼 수 있는가?

- 풀이의 실마리 -

1. 어려운 문제를 바라볼 때 : Divide & Conquer (나누어서 살피자)
   (1) 고정된 것 + 변하는 것
   (2) 그릴 수 있는 것(쉬운 것) + 그릴 수 없는 것(어려운 것)

2. 항상 쉬운 것 먼저 처리한다.
   (1) 그릴 수 있는 건 그래프를 그린다.
      그래프를 그릴 때에는 크고 정확하게 딱 한번 그린다.

   (2) 그래프를 그릴 때에는
      • f-level에서 해야 할 것
        a. 지나는 쉬운 점 : y절편
        b. 중요한 점 : x절편(방정식의 근)
        c. 정의역의 양 극단의 수렴, 발산, 점근선 여부
        ※ 미분하지 아니하고 그냥 그래프를 그리는 능력이 2017학년도, 2018학년도 수능 30번에서 모두 중요했다는 것을 명심하자.

      • f'-level에서 해야 할 것
        a. 부호 : 함수의 증가 감소 파악
        b. 부호의 변화 : 극값
        c. 도함수의 극대와 극소 : 변곡점의 존재 여부

      • f''-level에서 해야 할 것
        변곡점 파악

3. 경우가 나누어지는 것에 익숙해지자.
   (1) 21, 30은 경우가 반드시 나누어진다.
   (2) 생성된 여러 가지 경우 중에 정답 상황을 찾으면 된다.

4. 출제자가 생각한 정답 상황의 그림을 상상하자.
   가장 아름답고 하나로 확정될 수 있는 '특정한 상황'의 그림이 보통 출제자가 생각하는 정답상황이다.

– 미분 다시 바라보기 –

1. 미분을 왜 해야 하는가?
   그래프를 정교하게 그리기 위해서
   (미분하지 않고서도 웬만한 함수의 그래프를 그릴 수 있어야 한다)
   함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래의 Framework로 그린다.

<table>
<tr><th>레벨</th><th>해야 할 것</th></tr>
<tr><td>f</td><td>① 정의역 범위 확인
② 정의역의 양 극단에서의 수렴, 발산여부 확인 : 점근선이 있니?
　– 점근선이 있다면 접선 개수 셀 때 긴장해야 한다.
③ 쉬운 점 확인 : $x=0,1,-1$ 등을 넣어서 쉽게 파악할 수 있는 점
④ 근 확인 : $f(x)=0$을 만족하는 근이 쉽게 보인다면 체크</td></tr>
<tr><td colspan="2">미분이 필요하다면 미분을 한다</td></tr>
<tr><td>f'</td><td>① 부호에 영향을 주지 않는 녀석들은 눈길을 주지 말자.
② 부호 변화를 관찰한다.
③ ②로부터 원래함수의 개형을 그린다.
　– 개형이 하나로 고정되지 않는다면, 경우를 나누어서 그린다.
④ ②, ③으로부터 원래 함수의 극대와 극소를 관찰한다.
⑤ f'의 극대와 극소를 관찰하여 변곡점 존재 여부를 파악</td></tr>
<tr><td colspan="2">미분이 필요하다면 미분을 한다
(이 때, 부호변화에 영향 안준다고 지웠던 놈들도 같이 데리고서 미분을 해야 한다)</td></tr>
<tr><td>f''</td><td>① 부호를 관찰
　– 원래 함수 f의 오목과 볼록 관찰
② 변곡점 위치 파악</td></tr>
</table>

2. 미분을 한다는 것이 무엇인가?
   (1) 도함수를 구한다.
   (2) 미분계수를 구한다.

3. $\dfrac{d}{dx}f(x)$
   (1) 함수 $f(x)$를 x에 대하여 미분한다.

(2) 그 결과 나오는 함수는 x에서의 미분계수를 함숫값으로 갖는, 도함수이다.

4. Chain Rule

미분 연산자 $\frac{d}{dx}$는 특정 상황을 제외하고서는 분수처럼 사용하여도 된다.

$$\frac{dA}{da} = \frac{dA}{db} \times \frac{db}{da}$$

이로부터 파생되는 것이 음함수 미분과 매개변수 미분(둘의 본질은 같다)

5. $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = 0$을 만족하는 x의 집합 A

(1) $y = f(x)$의 그래프에서 접선의 기울기가 0이 되는 x값들을 모아둔 것

(2) 집합 A의 원소들은 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 발생시키는 x의 좋은 후보군이다.

(3) 집합 A의 원소들과 $y = f(x)$가 존재하는 구간의 양 끝에서의 x값들을 모아놓으면
그 안에서 반드시 $f(x)$의 최대, 최소를 만드는 x를 찾을 수 있다.

(4) 극값이 아닌 함숫값을 만드는 함정들($y = x^3$에서 $x = 0$ 같은 놈들)도 같이 데리고 있다.

(5) $y = f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점들의 x좌표이다.

- 적분 다시 바라보기 -

1. 적분을 왜 해야 하는가?
   (1) 기하학적 이유 : 길이, 넓이, 부피를 구하기 위해서
   (2) 결과 관찰의 목적 : 피적분함수의 결과 나타나는 함수는 어떻게 생겼는가?
   (적분 계산을 직접적으로 하지 않고서도 적분 결과를 그릴 수 있어야 한다)
   $g(x)=\int_a^x f(t)dt$은 아래의 Framework로 바라본다. (x에 숫자를 넣으면 정적분)

옵션	방법
$\int$를 없앤다	① 차원 거슬러 올라가기 1 - 직접 $f(t)$의 원시함수를 구하여 적분의 위끝과 아래 끝을 대입한다. - 어려운 문제에서는 잘 안쓰인다. (왜? 계산력 영역임) ② 차원 거슬러 올라가기 2 $f(t)$의 원시함수가 잘 안보인다면, a. 치환적분 : 미분된 결과가 곱해져 있음 b. 부분적분 : $f(t)$를 두 부분으로 쪼개서 하나는 미분하고 하나는 적분하여 곱하면 적분하기가 쉬울 때 ③ 양변을 x에 대하여 미분한다. - 적분 구간 내에 함수 $g(x)$의 변수인 x가 포함되어 있을 때 가능 - 적분 구간 내의 변수가 존재하고 그 변수가 $f(t)$에 같이 섞여있을 때에는 다 전개한 후에 천천히 미분해야 한다.
$\int$를 그대로 둔다.	① $f(t)$의 입장에서 관찰 - $y=f(x)$를 그린다. - $g(x)=\int_a^x f(t)dt$는 $f(x)$의 그래프에 대해서 $x=a$와 $x=x$ 사이의 정적분값에 해당한다. ② $F(t)$($\int f(x)dx$)의 입장에서 관찰 - $g(x)=\int_a^x f(t)dt$는 $f(x)$의 원시함수 중 $(a,0)$을 지나는 함수이다. - $g(b)=\int_a^b f(t)dt$는 $F(t)$의 입장에서는 변화량이다. ($F(b)-F(a)$)

2. 적분을 한다는 것이 무엇인가?
   (1) 원시함수를 구한다.
   (2) 정적분값을 구한다.

3. $\int_a^x f(t)dt$

(1) 함수 $f(t)$를 t에 대하여 적분하여 나온 함수 $F(t)$에 대하여 $F(x)-F(a)$

(2) 함수 $y=f(x)$의 $x=a$부터 $x=x$까지의 정적분 값

함수 $y=f(t)$, x축, $x=a$, $x=x$가 이루는 공간의 넓이와 관련이 있음

(3) $\int_a^x f(t)dt= [tf(t)]_a^x - \int_a^x tf'(t)dt$ (부분적분)

- $f(t)$를 적분하기가 힘들다면, 항상 대안이 있다 : $tf'(t)$를 대신 적분하자.

4. $\int \approx \sum$

(1) 적분은 본질적으로 더하는 것이다.

(2) 시그마에서 변수 k가 아닌 미지수는 시그마 밖으로 뺄 수 있다

: $\sum_{k=1}^{5} sk = s\sum_{k=1}^{5} k$

(3) 적분에서도 적분변수 x가 아닌 미지수는 인테그랄 밖으로 뺄 수 있다

: $\int_a^b tf(x)dx = t\int_a^b f(x)dx$

(4) 시그마는 k의 범위를 적절히 나누어서 처리할 수 있고, 변수 k를 바꿀 수 있다.

(5) 적분도 x의 범위를 적절히 나누어서 처리할 수 있고, 적분 변수 x를 바꿀 수 있다. 여기서 더 나아가면 치환적분이 된다.

5. $\int_a^x f(t)dt=0$을 만족하는 x의 집합 A

(1) $y=f(x)$의 그래프에서 a부터 시작해서 x까지 정적분을 했을 때 그 값이 0이 되는 x

- $x=a$를 항상 써먹을 수 있다.

(2) $y=f(x)$의 그래프를 놓고 관찰해보면 a의 위치에 따라 x의 개수가 달라질 수 있음을 느낄 수 있다.

(3) $g(x)=\int_a^x f(t)dt$의 그래프가 x축과 만나는 점들의 x좌표이다.

- $y=g(x)$는 $f(x)$의 원시함수 중 $(a,0)$를 지나는 녀석이니 a의 위치에 따라 x의 개수가 달라질 수 있다.

(4) $f(t)$의 원시함수 중 아무녀석($F(x)=\int f(x)dx$)을 데리고 왔을 때, $F(x)-F(a)=0$, 즉 변화량이 0가 되게 하는 x