

본 콘텐츠는 홈페이지 유료 상품의 일부입니다.

본 콘텐츠의 무단 배포 시, 콘텐츠산업진흥법에 의거하여 책임을 질 수 있습니다.

1. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가

$x = 2\sqrt{2}t$, $y = e^t + 2e^{-t}$ 일 때, $t=0$ 에서 $t=\ln 2$ 까지 점 P가 움직인 거리는?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

2. 매개변수 t 로 나타내어진 곡선

$x = 2t^3 - 6t + 1$, $y = 6t^2$ ($0 \leq t \leq 1$)의 길이는?

- ① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

3. 매개변수 t 로 나타내어진 곡선 $x = e^t \sin t$,

$y = e^t \cos t$ ($0 \leq t \leq a$)의 길이가 $4 - \sqrt{2}$ 일 때, 상수 a 의 값은?

- ① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $\frac{3}{2} \ln 2$
④ $\frac{3}{2} \ln 3$ ⑤ $2 \ln 2$

4. $1 \leq x \leq e$ 에서 곡선 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4} \ln x$ 의 길이는?

- ① $\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}e - \frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}e^2 - 1$
④ $\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}$

5. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가 $x = \sqrt{t}$, $y = \sqrt{t^2 + 3}$ 이다. $t=1$ 에서 점 P의 속력은?

- ① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

6. 좌표평면 위를 움직이는 점P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가 $x = 2t + 1$, $y = t^3 - 2t^2 - 4$ 이다. 점 P의 가속도의 크기가 0이 되는 시각은?

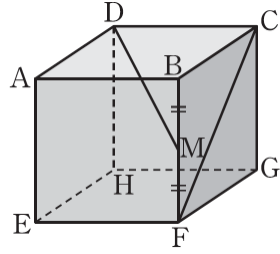
- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ 1
④ $\frac{7}{6}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

7. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가

$x = 3t^2$, $y = t^3 - 3t$ 일 때, $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는?

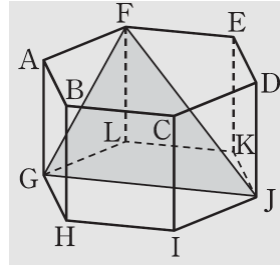
- ① 16 ② 20 ③ 24
④ 28 ⑤ 32

8. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체 $ABCD-EFGH$ 에서 선분 BF 의 중점을 M 이라고 하자. 직선 DM 과 직선 CF 가 이루는 예각의 크기를 θ 라고



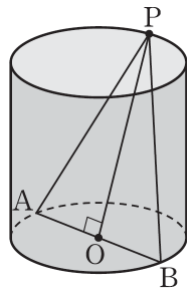
할 때, $\cos^2 \theta = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

9. 그림은 모든 모서리의 길이가 같은 정육각기둥이다. 평면 FGJ 와 정육각기둥의 한 밑면 $GHIJKL$ 이 이루는 예각의 크기를 θ 라고 할 때, $\cos \theta$ 의 값은?



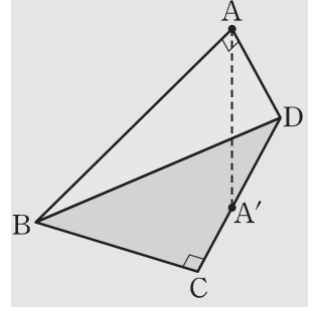
- ① $\frac{\sqrt{14}}{7}$ ② $\frac{\sqrt{21}}{7}$ ③ $\frac{2\sqrt{7}}{7}$
 ④ $\frac{\sqrt{35}}{7}$ ⑤ $\frac{\sqrt{42}}{7}$

10. 그림과 같이 밑면인 원의 반지름의 길이가 1이고 높이가 2인 원기둥이 있다. 원기둥의 위쪽에 있는 밑면인 원의 둘레 위의 점 P 와 아래쪽에 있는 밑면인 원의 중심 O 에 대하여 직선 PO 에 수직인 아래쪽에 있는 밑면의 지름을 선분 AB 라고 하자. 평면 PAB 와 원기둥의 밑면이 이루는 예각의 크기를 θ 라고 할 때, $\cos \theta$ 의 값은?



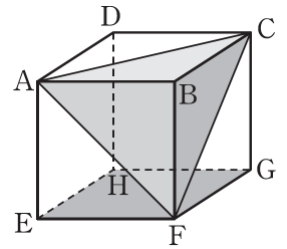
- ① $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{30}}{10}$
 ④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

11. 그림은 $\overline{AB} = 20$, $\overline{BC} = 15$ 인 직사각형 $ABCD$ 에서 대각선 BD 를 접는 선으로 하여 점 A 의 평면 BCD 위로의 정사영 A' 이 선분 CD 위에 오도록 접은 것이다. 삼각형 ABD 의 내접원의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.



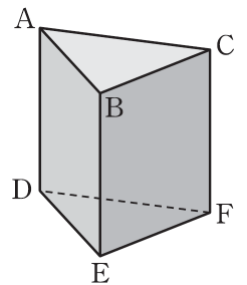
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

12. 그림과 같은 정육면체 $ABCD-EFGH$ 에서 평면 AFC 와 평면 $EFGH$ 가 이루는 예각의 크기를 θ 라고 할 때, $\cos \theta$ 의 값은?



- ① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 ④ $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

13. 그림과 같은 삼각기둥의 6개의 꼭짓점에서 서로 다른 3개의 꼭짓점을 지나는 서로 다른 평면의 개수를 구하시오.



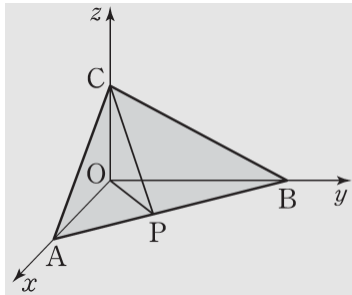
14. 좌표공간의 두 점 $A(1, -3, 2)$, $B(-2, 1, 4)$ 에서 같은 거리에 있는 z 축 위의 점을 P 라고 할 때, 선분 OP 의 길이는? (단, O 는 원점이다.)

- ① $\frac{11}{8}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ $\frac{17}{8}$
 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{23}{8}$

15. 좌표공간의 두 점 $A(-1, 3, a)$, $B(2, 2, 1)$ 과 zx 평면 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값이 $\sqrt{43}$ 일 때, 양수 a 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

16. 좌표공간의 세 점 $A(2, 0, 0)$,

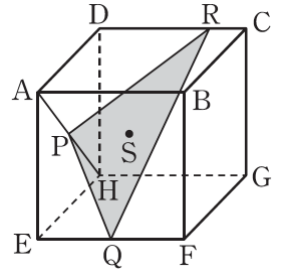


$B(0, \sqrt{14}, 0)$, $C(0, 0, 2)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 에 대하여 각 ACB 를 이등분하는 직선과 선분 AB 의 교점을 P 라고 하자. 원점 O 에 대하여 $\overline{OP}^2 = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

17. 좌표공간의 두 점 $A(1, 3, 5)$, $B(-2, -3, 2)$ 에 대하여 선분 AB 를 2:1로 내분하는 점을 P , 1:2로 외분하는 점을 Q 라 하고, 선분 PQ 의 중점을 M 이라고 하자. 점 M 의 좌표가 $M(a, b, c)$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

- ① 11 ② 12 ③ 13
 ④ 14 ⑤ 15

18. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정육면체 $ABCD-EFGH$ 에서 선분 AH 의 중점을 P , 선분 EF 의 중점을 Q , 선분 CD 를 1:3으로 내분하는 점을 R 라고 하자. 삼각형 PQR 의 무게중심을 S 라고 할 때, 선분 BS 의 길이는?



- ① $\frac{19}{6}$ ② $\frac{10}{3}$
 ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

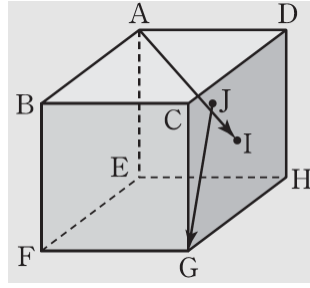
19. 좌표공간에서 구

$$S: x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 8y - 6z + 14 = 0$$

에 대하여 구 S 와 xy 평면이 만나서 생기는 도형을 C_1 이라 하고, 구 S 의 xy 평면 위로의 정사영을 C_2 라고 하자. 도형 C_1 의 외부와 도형 C_2 의 공통부분의 넓이는?

- ① 6π ② 7π ③ 8π
 ④ 9π ⑤ 10π

20. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체 $ABCD-EFGH$ 가 있다. 사각형 $CGHD$ 의 두 대각선의 교점을 I , 사각형 $AEHD$ 의 두 대각선의 교점을 J 라고 할 때 $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{JG}$ 의 값은?



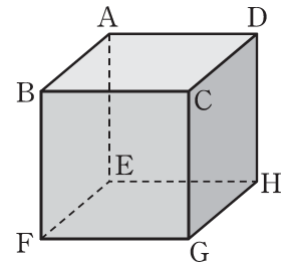
- ① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

21. ²¹⁾ 두 벡터 $\vec{a} = (3, 2, -1)$ 과 $\vec{b} = (4, -1, -3)$ 에 대하여 $\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b}$ 의 값을 구하시오.

22. 좌표공간에 두 점 $A(3, 0, a)$, $B(2, \sqrt{5}, 0)$ 이 있다. 원점 O 에 대하여 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ 일 때, 양수 a 의 값은?

- ① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

23. 그림과 같은 정육면체 $ABCD-EFGH$ 에서 다음 중 벡터 $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{BG}$ 와 서로 같은 벡터는?

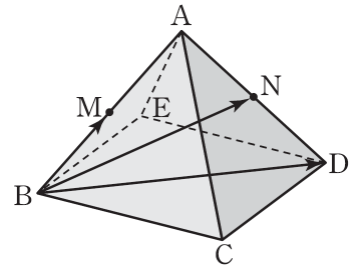


- ① $\overrightarrow{AG}$ ② $\overrightarrow{BA}$ ③ $\overrightarrow{CH}$
④ $\overrightarrow{DA}$ ⑤ $\overrightarrow{EG}$

24. 좌표공간의 세 점 $A(a, -2, 2)$, $B(3, b, 5)$, $C(-1, 0, 1)$ 이 한 직선 위에 있을 때, $|\overrightarrow{AB}|$ 의 값은?

- ① $2\sqrt{11}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $5\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{13}$ ⑤ $3\sqrt{6}$

25. 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 4인 사각뿔 $A-BCDE$ 에서 두 모서리 AB , AD 의 중점을 각각 M , N 이라고 하자. $\overrightarrow{BD} \cdot (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BN})$ 의 값을 구하시오.



26. 세 벡터 $\vec{a} = (2, -1, -1)$, $\vec{b} = (0, 3, -1)$, $\vec{c} = (-1, -4, 3)$ 에 대하여 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b} + \vec{c}$ 가 이루는 각의 크기 θ 의 값은?

(단, $0 \leq \theta \leq \pi$)

- ① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{2}{3}\pi$ ⑤ $\frac{3}{4}\pi$

27. 좌표공간에서 점 $A(0, 1, -2)$ 를 지나고 두 평면 $x+y-z=2$, $2x-y=3$ 에 각각 수직인 평면을 α 라고 하자. 점 $P(k, 1, -4)$ 가 평면 α 위의 점일 때, k 의 값은?

- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

28. 좌표공간에서 구 $x^2 + (y+1)^2 + (z-6)^2 = 6$ 위의 점 $A(1, -2, 4)$ 에서 구에 접하는 평면의 방정식은 $x+ay+bz+c=0$ 이다. 세 상수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c$ 의 값은?

- ① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

29. 좌표공간에서 평면 $2x - \sqrt{2}y - 2z = 1$ 위에 넓이가 20인 도형 F 가 있다. 도형 F 의 평면 $x-3z=0$ 위로의 정사영을 도형 F' 이라고 할 때, 도형 F' 의 넓이를 구하시오.

30. 좌표공간의 두 점 $A(0, -1, 1)$, $B(2, 1, -3)$ 과 임의의 점 P 의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$ 라고 할 때, 다음 조건을 만족시키는 점 P 가 나타내는 도형을 S 라고 하자.

$$|\vec{x}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{x} + |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$$

도형 S 와 평면 $2x+2y+z-5=0$ 이 만나서 생기는 도형의 넓이는?

- ① 6π ② 8π ③ 10π
④ 12π ⑤ 14π

31. 좌표공간에서 평면 $x+y-4z+k=0$ 이 구 $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 2$ 에 접하도록 하는 양수 k 의 값은?

- ① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

32. 좌표공간의 두 점 $A(2, 1, 3)$, $B(4, 3, -1)$ 에 대하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ 을 만족시키는 점 P 가 나타내는 도형을 T 라 하고, 원점 O 를 지나는 직선이 도형 T 와 한 점에서 만날 때 그 점을 Q 라고 하자. 선분 OQ 의 길이를 l 이라고 할 때, l^2 의 값을 구하시오.

정답 및 해설

1) <답> ③

$$x = 2\sqrt{2}t \text{ 에서 } \frac{dx}{dt} = 2\sqrt{2}$$

$$y = e^t + 2e^{-t} \text{ 에서 } \frac{dy}{dt} = e^t - 2e^{-t} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= (2\sqrt{2})^2 + (e^t - 2e^{-t})^2 \\ &= 8 + (e^{2t} - 4 + 4e^{-2t}) \\ &= e^{2t} + 4 + 4e^{-2t} \\ &= (e^t + 2e^{-t})^2 \end{aligned}$$

따라서 $t=0$ 에서 $t=\ln 2$ 까지 점 P가 움직인 거리 s 는

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{(e^t + 2e^{-t})^2} dt \\ &= \int_0^{\ln 2} (e^t + 2e^{-t}) dt \\ &= [e^t - 2e^{-t}]_0^{\ln 2} \\ &= \left(2 - \frac{2}{2}\right) - (1 - 2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

2) <답> ⑤

$$x = 2t^3 - 6t + 1 \text{ 에서 } \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 6$$

$$y = 6t^2 \text{ 에서 } \frac{dy}{dt} = 12t$$

따라서 구하는 곡선의 길이를 l 이라고 하면

$$\begin{aligned} l &= \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{(6t^2 - 6)^2 + (12t)^2} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{36t^4 - 72t^2 + 36 + 144t^2} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{(6t^2 + 6)^2} dt = \int_0^1 (6t^2 + 6) dt \\ &= [2t^3 + 6t]_0^1 = 8 \end{aligned}$$

3) <답> ③

$$x = e^t \sin t \text{ 에서 } \frac{dx}{dt} = e^t(\sin t + \cos t)$$

$$y = e^t \cos t \text{ 에서 } \frac{dy}{dt} = e^t(\cos t - \sin t)$$

주어진 곡선의 길이를 l 이라고 하면

$$\begin{aligned} l &= \int_0^a \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^a \sqrt{e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}(\cos t - \sin t)^2} dt \\ &= \int_0^a \sqrt{e^{2t}(1 + 2\sin t \cos t) + e^{2t}(1 - 2\sin t \cos t)} dt \\ &= \int_0^a \sqrt{2e^{2t}} dt = \int_0^a \sqrt{2} e^t dt \\ &= \sqrt{2} [e^t]_0^a \\ &= \sqrt{2}(e^a - 1) = 4 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{에서 } \sqrt{2}e^a = 4$$

$$\text{즉, } e^a = 2\sqrt{2} \text{ 이므로}$$

$$a = \ln 2\sqrt{2} = \frac{3}{2} \ln 2$$

4) <답> ⑤

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4} \ln x \text{ 에서}$$

$$\frac{dy}{dx} = x - \frac{1}{4} \times \frac{1}{x} = x - \frac{1}{4x} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= 1 + \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2 \\ &= 1 + \left(x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}\right) \\ &= x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2} \\ &= \left(x + \frac{1}{4x}\right)^2 \end{aligned}$$

따라서 구하는 곡선의 길이를 l 이라고 하면

$$\begin{aligned} l &= \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_1^e \sqrt{\left(x + \frac{1}{4x}\right)^2} dx \\ &= \int_1^e \left(x + \frac{1}{4x}\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4} \ln x\right]_1^e \\ &= \left(\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

5) <답> ②

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{2t}{2\sqrt{t^2+3}} = \frac{t}{\sqrt{t^2+3}}$$

이므로 점 P의 시각 t 에서의 속도를 $\vec{v}$ 라고 하면

$$\vec{v} = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, \frac{t}{\sqrt{t^2+3}} \right) \text{이고 속력은}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{t}} \right)^2 + \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+3}} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4t} + \frac{t^2}{t^2+3}}$$

따라서 $t=1$ 에서 점 P의 속력은

$$\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

6) <답> ①

점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가

$$x = 2t + 1, \quad y = t^3 - 2t^2 - 4$$

이므로

$$\frac{dx}{dt} = 2, \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 4t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 6t - 4$$

점 P의 시각 t 에서의 가속도를 $\vec{a}$ 라고 하면

$$|\vec{a}| = (0, 6t - 4)$$

가속도의 크기는

$$|\vec{a}| = \sqrt{0^2 + (6t - 4)^2} = |6t - 4|$$

이므로 $|\vec{a}| = 0$ 이 되는 시각은 $t = \frac{2}{3}$ 이다.

7) <답> ⑤

$$x = 3t^2 \text{에서 } \frac{dx}{dt} = 6t$$

$$y = t^3 - 3t \text{에서 } \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 3$$

이므로

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 &= (6t)^2 + (3t^2 - 3)^2 \\ &= 36t^2 + 9t^4 - 18t^2 + 9 \\ &= 9t^4 + 18t^2 + 9 \\ &= (3t^2 + 3)^2 \end{aligned}$$

따라서 $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리를 s 라고 하면

$$\begin{aligned} s &= \int_1^3 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt \\ &= \int_1^3 \sqrt{(3t^2 + 3)^2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_1^3 (3t^2 + 3) dt \\ &= [t^3 + 3t]_1^3 \\ &= (27 + 9) - (1 + 3) = 32 \end{aligned}$$

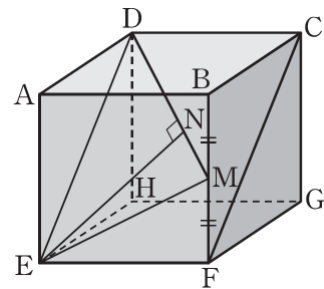
8) <답> 3

직선 CF는 직선 DE와 평행하므로 두 직선 DM, CF가 이루는 예각의 크기는 두 직선 DM, DE가 이루는 예각의 크기와 같다.

따라서 $\theta = \angle EDM$ 이다.

이때 정육면체의 한 모서리의 길이가 2이므로 삼각형 DEM에서

$$\overline{DE} = 2\sqrt{2}, \quad \overline{EM} = \sqrt{5}, \quad \overline{DM} = 3 \text{이다.}$$



위 그림과 같이 삼각형 DEM의 꼭짓점 E에서 선분 DM에 내린 수선의 발을 N이라 하고 $\overline{DN} = x$ 라고 하면

$$\overline{MN} = 3 - x \text{이고}$$

$$\overline{EN}^2 = \overline{DE}^2 - \overline{DN}^2 = \overline{EM}^2 - \overline{MN}^2 \text{이므로}$$

$$(2\sqrt{2})^2 - x^2 = (\sqrt{5})^2 - (3 - x)^2$$

$$8 - x^2 = 5 - 9 + 6x - x^2$$

$$6x = 12$$

$$x = 2$$

따라서

$$\cos \theta = \cos(\angle EDM)$$

$$= \frac{\overline{DN}}{\overline{DE}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{이므로 } \cos^2 \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{그러므로 } p + q = 2 + 1 = 3$$

9) <답> ②

점 F에서 직선 GJ에 내린 수선의 발을 M이라고 하면 점 F에서 평면 GHIJKL에 내린 수선의 발이 L이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{LM} \perp \overline{GJ}$ 이다.

즉, $\overline{FM} \perp \overline{GJ}$, $\overline{LM} \perp \overline{GJ}$ 이므로 평면 FGJ와 평면

GHIJKL이 이루는 예각의 크기는 두 직선 FM, LM이 이루는 예각의 크기와 같다. 따라서 $\theta = \angle FML$ 이다.

한편, 정육각형 GHIJKL에서 $\overline{GJ} \perp \overline{LH}$ 이므로 점 M은 선분 GJ와 선분 LH의 교점, 즉 선분 LH의 중점이다. 이때 정육각기둥의 한 모서리의 길이를 $2k$ 라고 하면

$$\angle LGM = \frac{\pi}{3} \text{ 이므로}$$

$$\overline{LM} = \overline{LG} \sin \frac{\pi}{3} = 2k \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}k$$

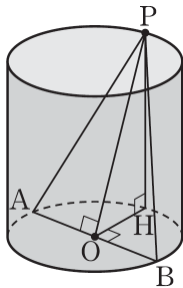
또 삼각형 FML은 직각삼각형이고 $\overline{FL} = 2k$ 이므로

$$\overline{FM} = \sqrt{\overline{FL}^2 + \overline{LM}^2} = \sqrt{4k^2 + 3k^2} = \sqrt{7}k$$

$$\text{따라서 } \cos \theta = \cos(\angle FML) = \frac{\overline{LM}}{\overline{FM}} = \frac{\sqrt{3}k}{\sqrt{7}k} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

10) <답> ②

그림과 같이 점 P에서 원기둥의 아래쪽에 있는 밑면에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



$\overline{PO} \perp \overline{AB}$, $\overline{PH} \perp$ (평면 HAB)이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{HO} \perp \overline{AB}$$

즉, $\overline{PO} \perp \overline{AB}$, $\overline{HO} \perp \overline{AB}$ 이므로 두 평면 PAB와 HAB가 이루는 예각의 크기는 두 직선 PO와 HO가 이루는 예각의 크기와 같다. 따라서

$$\theta = \angle POH$$

이때 삼각형 POH는 각 POH가 직각인 직각삼각형이고

$$\overline{HO} = 1, \overline{PH} = 2 \text{ 이므로}$$

$$\overline{PO} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

따라서

$$\cos \theta = \cos(\angle POH)$$

$$= \frac{\overline{HO}}{\overline{PO}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

11) <답> 241

점 A에서 직선 BD에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발이 A'이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{A'H} \perp \overline{BD}$ 이다.

즉, $\overline{AH} \perp \overline{BD}$, $\overline{A'H} \perp \overline{BD}$ 이

므로 평면 ABD와 평면 BCD가 이루는 예각의 크기는 두 직선 AH, A'H가 이루는 예각의 크기와 같다. 따라서 평면 ABD와 평면 BCD가 이루는 예각의 크기를 θ 라고 하면 $\theta = \angle AHA'$ 이다.

한편, $\overline{BD} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2} = 25$ 이고, 삼각형 ABD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 25 \times \overline{AH} = \frac{1}{2} \times 20 \times 15 \text{ 이므로 } \overline{AH} = \frac{20 \times 15}{25} = 12$$

직각삼각형 AHD에서 $\overline{DH} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$

이고, $\triangle DA'H \sim \triangle DBC$ 에서 $\overline{A'H} : \overline{BC} = \overline{DH} : \overline{DC}$ 이므로

$$\overline{A'H} = \frac{\overline{BC} \times \overline{DH}}{\overline{DC}} = \frac{15 \times 9}{20} = \frac{27}{4}$$

이때 삼각형 AHA'은 각 AA'H가 직각인 직각삼각

$$\text{형이므로 } \cos \theta = \frac{\overline{A'H}}{\overline{AH}} = \frac{\frac{27}{4}}{12} = \frac{9}{16}$$

또 삼각형 ABD의 내접원의 반지름의 길이를 r 라고 하면 오른쪽 그림에서

$$(20-r) + (15-r) = 25 \text{ 이므로 } r = 5$$

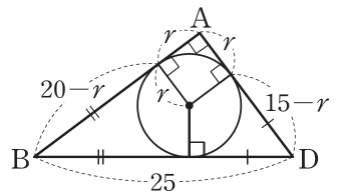
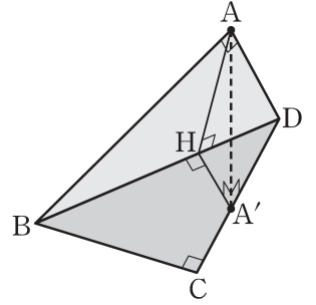
삼각형 ABD의 내접원의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이를 S 라고 하면

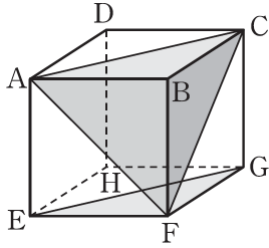
$$S = 25\pi \times \cos \theta = 25\pi \times \frac{9}{16} = \frac{225}{16}\pi$$

따라서 $p+q = 16 + 225 = 241$

12) <답> ②

두 점 A, C에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발이 각각 E, G이므로 삼각형 AFC의 평면 EFGH 위로의 정사영이 삼각형 EFG이다.





$\overline{AB} = a$ 라고 하면 삼각형 AFC는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}a$ 인 정삼각형이므로

$$\begin{aligned}\Delta AFC &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2}a)^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} a^2\end{aligned}$$

또 삼각형 EFG는 빗변이 아닌 한 변의 길이가 a 인 직각이등변삼각형이므로

$$\Delta EFG = \frac{1}{2} a^2$$

이때 $\Delta EFG = \Delta AFC \times \cos \theta$ 이므로

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\Delta EFG}{\Delta AFC} \\ &= \frac{\frac{1}{2} a^2}{\frac{\sqrt{3}}{2} a^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

13) <답> 11

한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 한 평면을 결정한다. 삼각기둥의 꼭짓점 6개 중에서 서로 다른 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

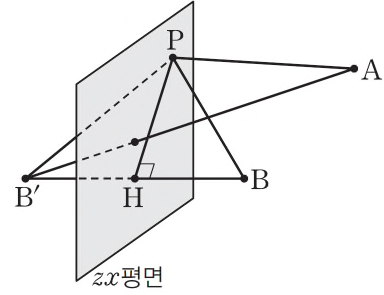
하지만 세 평면 ADEB, BEFC, ADFC에서 각각 서로 다른 세 점을 선택하는 경우는 각각 4가지씩인데 이 4가지가 결정하는 평면은 모두 같은 평면이다.

따라서 주어진 삼각기둥의 각 꼭짓점으로 결정 되는 서로 다른 평면의 개수는

$$20 - 3 \times 3 = 11$$

14) <답> ④

그림과 같이 점 B의 zx 평면에 대한 대칭점을 B' 이라 하고 선분 BB' 과 zx 평면의 교점을 H라고 하자.



zx 평면 위의 임의의 점 P에 대하여

$$\Delta PBH \equiv \Delta PB'H$$

이므로

$$\overline{BP} = \overline{B'P}$$

따라서

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{B'P} \geq \overline{AB'}$$

이므로 점 P가 선분 AB' 과 zx 평면의 교점일 때 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 값이 최소가 되고 최솟값은 $\overline{AB'}$ 이다.

한편, 점 B의 zx 평면에 대한 대칭점 B' 의 좌표는 $B'(2, -2, 1)$

$$\begin{aligned}\overline{AB'} &= \sqrt{\{2 - (-1)\}^2 + \{-2 - 3\}^2 + (1 - a)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - 2a + 35}\end{aligned}$$

이때 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값, 즉 $\overline{AB'}$ 의 값이 $\sqrt{43}$ 이므로

$$\begin{aligned}a^2 - 2a + 35 &= 43, \quad a^2 - 2a - 8 = 0 \\ (a - 4)(a + 2) &= 0\end{aligned}$$

$a > 0$ 이므로 $a = 4$

15) <답> ②

두 점 $A(1, -3, 2)$, $B(-2, 1, 4)$ 에서 같은 거리에 있는 z 축 위의 점 P의 좌표를 $(0, 0, c)$ 라고 하자.

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$\begin{aligned}(0 - 1)^2 + \{0 - (-3)\}^2 + (c - 2)^2 &= \{0 - (-2)\}^2 + (0 - 1)^2 + (c - 4)^2 \\ c^2 - 4c + 14 &= c^2 - 8c + 21 \\ 4c &= 7 \\ c &= \frac{7}{4}\end{aligned}$$

따라서 점 P의 좌표가 $P(0, 0, \frac{7}{4})$ 이므로 선분

OP의 길이는 $\overline{OP} = \frac{7}{4}$

16) <답> 117

[풀이전략]

(1) 삼각형 ABC에서 각 ACB를 이등분하는 직선

과 선분 AB의 교점은 선분 AB를 $\overline{AC} : \overline{BC}$ 로 내분하는 점이다.

(2) 좌표공간의 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 에 대하여 선분 AB를 $m : n$ ($m > 0, n > 0$)으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}\right) \text{이다.}$$

[풀이]

삼각형 ABC에서

$$\overline{AC} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}, \quad \overline{BC} = \sqrt{14+4} = 3\sqrt{2}$$

이므로 점 P는 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점이다.

따라서 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{2 \times 0 + 3 \times 2}{2+3}, \frac{2 \times \sqrt{14} + 3 \times 0}{2+3}, 0\right), \text{ 즉}$$

$$P\left(\frac{6}{5}, \frac{2\sqrt{14}}{5}, 0\right)$$

$$\text{이므로 } \overline{OP}^2 = \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{14}}{5}\right)^2 + 0^2 = \frac{92}{25}$$

따라서 $p+q = 25+92 = 117$

17) <답> ①

두 점 $A(1, 3, 5)$, $B(-2, -3, 2)$ 에 대하여 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{2 \times (-2) + 1 \times 1}{2+1}, \frac{2 \times (-3) + 1 \times 3}{2+1}, \frac{2 \times 2 + 1 \times 5}{2+1}\right)$$

즉, $P(-1, -1, 3)$

선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$Q\left(\frac{1 \times (-2) - 2 \times 1}{1-2}, \frac{1 \times (-3) - 2 \times 3}{1-2}, \frac{1 \times 2 - 2 \times 5}{1-2}\right)$$

즉, $Q(4, 9, 8)$

따라서 선분 PQ의 중점 M의 좌표는

$$M\left(\frac{-1+4}{2}, \frac{-1+9}{2}, \frac{3+8}{2}\right)$$

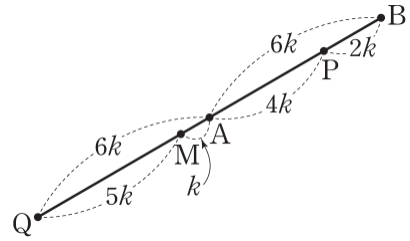
$$\text{즉, } M\left(\frac{3}{2}, 4, \frac{11}{2}\right)$$

따라서 $a+b+c = \frac{3}{2} + 4 + \frac{11}{2} = 11$

[다른 풀이]

$\overline{AB} = 6k$ 라고 하면 $\overline{AP} = 4k$, $\overline{QA} = 6k$ 이므로

$$\overline{QM} = 5k, \quad \overline{MA} = k$$



따라서 점 M은 선분 AB를 1 : 7로 외분하는 점이므로 점 M의 좌표는

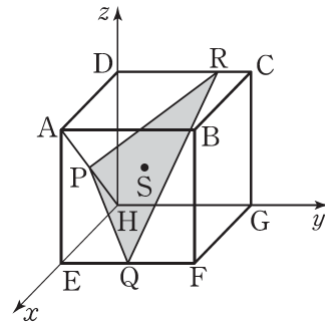
$$M\left(\frac{1 \times (-2) - 7 \times 1}{1-7}, \frac{1 \times (-3) - 7 \times 3}{1-7}, \frac{1 \times 2 - 7 \times 5}{1-7}\right)$$

$$\text{즉, } M\left(\frac{3}{2}, 4, \frac{11}{2}\right)$$

따라서 $a+b+c = \frac{3}{2} + 4 + \frac{11}{2} = 11$

18) <답> ④

그림과 같이 정육면체 ABCD-EFGH를 꼭짓점 H가 좌표공간의 원점에 있고 세 점 E, G, D의 좌표가 각각 $E(4, 0, 0)$, $G(0, 4, 0)$, $D(0, 0, 4)$ 가 되도록 좌표공간에 놓는다.



두 점 A, H의 좌표가 각각

$$A(4, 0, 4), H(0, 0, 0)$$

이므로 선분 AH의 중점 P의 좌표는

$$P(2, 0, 2) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

두 점 E, F의 좌표가 각각

$$E(4, 0, 0), F(4, 4, 0)$$

이므로 선분 EF의 중점 Q의 좌표는

$$Q(4, 2, 0) \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

두 점 C, D의 좌표가 각각 $C(0, 4, 4)$, $D(0, 0, 4)$

이므로

선분 CD를 1 : 3으로 내분하는 점 R의 좌표는

$$R\left(\frac{1 \times 0 + 3 \times 0}{1+3}, \frac{1 \times 0 + 3 \times 4}{1+3}, \frac{1 \times 4 + 3 \times 4}{1+3}\right)$$

$$\text{즉, } R(0, 3, 4) \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

⑦, ⑧, ⑨에 의하여 삼각형 PQR의 무게중심 S의 좌표는

$$S\left(\frac{2+4+0}{3}, \frac{0+2+3}{3}, \frac{2+0+4}{3}\right)$$

$$\text{즉, } S\left(2, \frac{5}{3}, 2\right)$$

이때 점 B의 좌표는 B(4, 4, 4)이므로

$$\begin{aligned} \overline{BS} &= \sqrt{(2-4)^2 + \left(\frac{5}{3}-4\right)^2 + (2-4)^2} \\ &= \frac{11}{3} \end{aligned}$$

19) <답> ④

[풀이전략] 구의 방정식을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ 의 꼴로 변형하여 구의 중심과 반지름의 길이를 찾는다.

(1) 구와 xy 평면이 만나서 생기는 도형은 구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하여 만들어진 방정식으로 나타내어지는 원이다.

(2) 구의 xy 평면 위로의 정사영은 구와 반지름의 길이가 같은 원과 그 내부이다.

[풀이]

구 $S: x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 8y - 6z + 14 = 0$ 에서

$$(x-5)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 36$$

..... ㉠

이므로 구 S 는 중심이 점 (5, 4, 3)이고 반지름의 길이가 6인 구이다.

구 S 와 xy 평면이 만나서 생기는 도형 C_1 은 ㉠에 $z=0$ 을 대입하면

$$(x-5)^2 + (y-4)^2 = 27$$

이므로 중심이 점 (5, 4, 0)이고 반지름의 길이가 $3\sqrt{3}$ 인 xy 평면 위의 원이다.

또 구 S 와 xy 평면 위로의 정사영 C_2 는 중심이 점 (5, 4, 0)이고 반지름의 길이가 6인 xy 평면 위의 원과 그 내부이다.

따라서 도형 C_1 의 외부와 도형 C_2 의 공통부분의 넓이는

$$36\pi - 27\pi = 9\pi$$

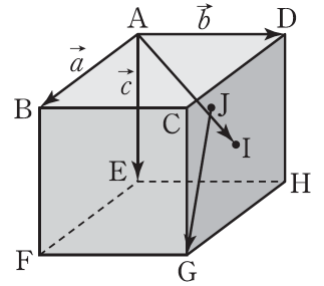
20) <답> ②

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$ 로 놓으면

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH})$$

$$= \frac{1}{2}\{(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{b} + \vec{c})\} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c})$$

$$\overrightarrow{JG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AJ}$$



$$= (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\text{따라서 } \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{JG} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}) \cdot \frac{1}{2}(2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

이때 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ 이므로

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{JG} = \frac{1}{4}(\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

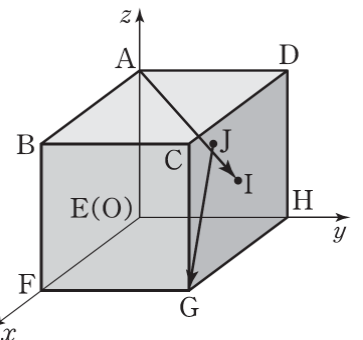
$$= \frac{1}{4}(2\vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c})$$

$$= \frac{1}{4}(2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2)$$

$$= \frac{1}{4}(2 \times 2^2 + 2 \times 2^2 + 2^2) = 5$$

[다른풀이] 점 E를 원점

으로 하고, 세 반직선 EF, EH, EA를 각각 x 축, y 축, z 축의 양의 방향으로 하는 좌표공간을 설정하면 네 점 A, I, J, G의 좌표는 각각



A(0, 0, 2), I(1, 2, 1), J(0, 1, 1), G(2, 2, 0)이므로

$$\overrightarrow{AI} = (1, 2, 1) - (0, 0, 2) = (1, 2, -1)$$

$$\overrightarrow{JG} = (2, 2, 0) - (0, 1, 1) = (2, 1, -1)$$

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{JG} = (1, 2, -1) \cdot (2, 1, -1) = 2 + 2 + 1 = 5$$

21) <답> 27

$$\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (3, 2, -1) + (4, -1, -3) = (7, 1, -4) \text{ 이므로}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (3, 2, -1) \cdot (7, 1, -4)$$

$$= 3 \times 7 + 2 \times 1 + (-1) \times (-4) = 27$$

[다른 풀이]

$$\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} = (3, 2, -1) \cdot (3, 2, -1)$$

$$+ (3, 2, -1) \cdot (4, -1, -3)$$

$$= 14 + 13 = 27$$

22) <답> ③

$$\overrightarrow{OA} = (3, 0, a), \overrightarrow{OB} = (2, \sqrt{5}, 0), \angle AOB = \frac{\pi}{3} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \cos(\angle AOB) &= \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} \\ &= \frac{3 \times 2 + 0 \times \sqrt{5} + a \times 0}{\sqrt{3^2 + 0^2 + a^2} \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2 + 0^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{9 + a^2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{에서 } \sqrt{9 + a^2} = 4$$

양변을 제곱하면

$$9 + a^2 = 16, \quad a^2 = 7$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = \sqrt{7}$$

23) <답> ④

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GF}$$

벡터 $\overrightarrow{GF}$ 와 서로 같은 벡터는 $\overrightarrow{DA}$ 이다.

24) <답> ⑤

세 점 $A(a, -2, 2)$, $B(3, b, 5)$, $C(-1, 0, 1)$ 이 한 직선 위에 있으므로 $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ 를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재한다. 점 O 가 좌표공간의 원점일 때,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (3, b, 5) - (a, -2, 2) = (-a+3, b+2, 3) \cdots \textcircled{A}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (-1, 0, 1) - (a, -2, 2) = (-a-1, 2, -1) \text{ 이므로}$$

$$(-a+3, b+2, 3) = k(-a-1, 2, -1)$$

$$\text{즉, } -a+3 = k(-a-1), \quad b+2 = 2k, \quad 3 = -k \text{ 이므로}$$

$$k = -3, \quad a = 0, \quad b = -8 \quad \textcircled{B} \text{ 에 } a = 0, \quad b = -8 \text{ 을 대입하면}$$

$$\overrightarrow{AB} = (3, -6, 3) \text{ 따라서}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 3^2} = 3\sqrt{6}$$

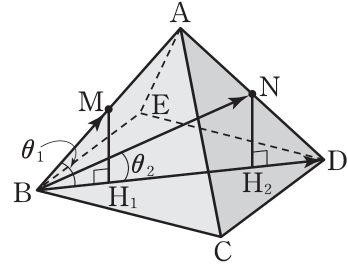
25) <답> 32

$$\text{정사각형 BCDE 에서 } |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

두 점 M, N 에서 선분 BD 에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2 라고 하면

$$\overline{BH_1} = \frac{1}{4} |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{2}$$

$$\overline{BH_2} = \frac{3}{4} |\overrightarrow{BD}| = 3\sqrt{2}$$



두 벡터 $\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BN}$ 이 벡터 $\overrightarrow{BD}$ 와 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2 라고 하면

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BD} \cdot (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BN}) &= \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BN} \\ &= |\overrightarrow{BD}| |\overrightarrow{BM}| \cos \theta_1 + |\overrightarrow{BD}| |\overrightarrow{BN}| \cos \theta_2 \\ &= |\overrightarrow{BD}| |\overrightarrow{BH_1}| + |\overrightarrow{BD}| |\overrightarrow{BH_2}| \\ &= 4\sqrt{2} \times \sqrt{2} + 4\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 32 \end{aligned}$$

[다른 풀이 1]

$$\text{정사각형 BCDE 에서 } |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

이때 삼각형 ABD 는 $\angle BAD = \frac{\pi}{2}$ 이고 $\overline{AB} = \overline{AD}$ 인

직각이등변삼각형이므로 $\angle ABD = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BD} \cdot (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BN}) &= \overrightarrow{BD} \cdot \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{BA} + \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}}{2} \right) \\ &= \overrightarrow{BD} \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} \right) \\ &= \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD} \\ &= |\overrightarrow{BD}| |\overrightarrow{BA}| \cos \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} |\overrightarrow{BD}|^2 \end{aligned}$$

$$4\sqrt{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times (4\sqrt{2})^2 = 16 + 16 = 32$$

[다른 풀이 2]

두 선분 MN, BD 의 중점을 각각 P, Q 라 하고 두 벡터 $\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BD}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라고 하자.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BD} \cdot (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BN}) &= \overrightarrow{BD} \cdot 2\overrightarrow{BP} \\ &= 2 |\overrightarrow{BD}| |\overrightarrow{BP}| \cos \theta = 2 |\overrightarrow{BD}| |\overrightarrow{BQ}| \\ &= 2 \times 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 32 \end{aligned}$$

26) <답> ④

$$\vec{b} + \vec{c} = (0, 3, -1) + (-1, -4, 3) = (-1, -1, 2) \text{ 이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{a}| |\vec{b} + \vec{c}|}$$

$$= \frac{(2, -1, -1) \cdot (-1, -1, 2)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2}}$$

$$= \frac{-3}{\sqrt{6} \sqrt{6}} = -\frac{1}{2} \quad \text{따라서 } \theta = \frac{2}{3}\pi$$

27) <답> ③

평면 α 의 법선벡터를 $\vec{n} = (a, b, c)$ 라고 하자.

평면 α 와 평면 $x+y-z=2$ 가 서로 수직이고, 평면 $x+y-z=2$ 의 법선벡터가 $(1, 1, -1)$ 이므로

$$(a, b, c) \cdot (1, 1, -1) = 0$$

$$a+b-c=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

또 평면 α 와 평면 $2x-y=3$ 가 서로 수직이고, 평면 $2x-y=3$ 의 법선벡터가 $(2, -1, 0)$ 이므로

$$(a, b, c) \cdot (2, -1, 0) = 0$$

$$2a-b=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } b=2a, \quad c=3a$$

평면 α 는 점 $A(0, 1, -2)$ 를 지나므로 평면 α 의 방정식은

$$ax+2a(y-1)+3a(z+2)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{9}$$

$\textcircled{9}$ 에서 $a=0$ 이면 $\vec{n} = (0, 0, 0)$ 이므로 $a \neq 0$ 이다.

따라서 $a \neq 0$ 이므로 $\textcircled{9}$ 에서 양변을 a 로 나누면

$$x+2(y-1)+3(z+2)=0$$

$$x+2y+3z+4=0$$

점 $P(k, 1, -4)$ 가 평면 α 위의 점이므로

$$k+2-12+4=0$$

$$k=6$$

28) <답> ⑤

구 $x^2+(y+1)^2+(z-6)^2=6$ 의 중심을 C 라고 하면 $C(0, -1, 6)$ 이고 점 O 가 좌표공간의 원점일 때,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (0, -1, 6) - (1, -2, 4)$$

$$= (-1, 1, 2)$$

따라서 $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 2)$ 에 수직이고 점 $A(1, -2, 4)$

를 지나는 평면의 방정식은

$$-(x-1)+(y+2)+2(z-4)=0$$

$$x-y-2z+5=0$$

따라서 $a=-1, b=-2, c=5$ 이므로

$$a+b+c=-1+(-2)+5=2$$

29) <답> 16

두 평면 $2x-\sqrt{2}y-2z=1, x-3z=0$ 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라고 하면

$$\vec{n}_1 = (2, -\sqrt{2}, -2),$$

$$\vec{n}_2 = (1, 0, -3)$$

이 두 평면이 이루는 각의 크기를 $\theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 라고

하면

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

$$= \frac{|2 \times 1 + (-\sqrt{2}) \times 0 + (-2) \times (-3)|}{\sqrt{2^2 + (-\sqrt{2})^2 + (-2)^2} \sqrt{1^2 + 0^2 + (-3)^2}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{10} \times \sqrt{10}}$$

$$= \frac{4}{5}$$

따라서 도형 F 의 넓이를 S , 도형 F' 의 넓이를 S' 이라고 하면

$$S' = S \cos \theta$$

$$= 20 \times \frac{4}{5} = 16$$

30) <답> ③

$$|\vec{x}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{x} + |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 \text{에서 } |\vec{x} - \vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2, \quad \text{즉}$$

$$|\vec{x} - \vec{a}| = |\vec{b}|$$

따라서 점 P 가 나타내는 도형 S 는 점 A 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$ 인 구이다.

그림과 같이 도형 S 와 평면

$$2x+2y+z-5=0 \text{이}$$

만나서 생기는 도형은

원이다.. 구의 중심 A

$(0, -1, 1)$ 에서 평면

$$2x+2y+z-5=0 \text{에}$$

내린 수선의 발을 H 라고 하면

$$\overline{AH} = \frac{|2 \times 0 + 2 \times (-1) + 1 \times 1 - 5|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 2$$

구 S 와 평면 $2x+2y+z-5=0$ 이 만나서 생기는 원의 반지름의 길이를 r 라고 하면

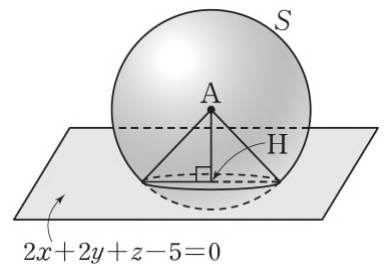
$$r = \sqrt{(\sqrt{14})^2 - 2^2} = \sqrt{10}$$

따라서 구하는 도형의 넓이는 10π 이다.

31) <답> ③

구 $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 2$ 는 중심의 좌표가 $(2, -3, 0)$ 이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 이다.

평면 $x+y-4z+k=0$ 과 구 $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 2$



가 접하므로 구의 중심에서 평면까지의 거리가 구의 반지름의 길이가 같다.

$$\frac{|1 \times 2 + 1 \times (-3) + (-4) \times 0 + k|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2}} = \frac{|-1+k|}{\sqrt{18}} = \sqrt{2}$$

에서 $|-1+k|=6$

$k > 0$ 이므로 $k=7$

32) <답> 8

점 P의 좌표를 (x, y, z) 라고 하면

$$\overrightarrow{AP} = (x-2, y-1, z-3),$$

$$\overrightarrow{BP} = (x-4, y-3, z+1)$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \text{에서}$$

$$(x-2)(x-4) + (y-1)(y-3) + (z-3)(z+1) = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 2z + 8 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 6$$

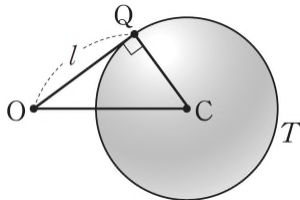
따라서 점 P가 나타내는 도형 T는 중심의 좌표가 C(3, 2, 1)이고 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$ 인 구이다.

$$\overline{OC} = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

원점 O를 지나는 직선이 도형 T와 한 점 Q에서 만나

므로 $\overline{CQ} = \sqrt{6}$ 이고 삼각형 OCQ는 $\angle OQC = \frac{\pi}{2}$ 인 직

각삼각형이다.



따라서

$$l^2 = \overline{OQ}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{CQ}^2 = (\sqrt{14})^2 - (\sqrt{6})^2 = 8$$

[참고]

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \text{에서 } \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$$

따라서 $\angle APB = 90^\circ$ 이므로 점 P가 나타내는 도형 T는 선분 AB를 지름으로 하는 구이다.