

## 2018년 6월 평가원 모의고사 킬러 분석

친절한제로스

[가형]

21. 열린 구간  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2\sin^3 x & \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}\right) \\ \cos x & \left(\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

가 있다. 실수  $t$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수  $k$ 의 개수를  $g(t)$ 라 하자.

(가)  $-\frac{\pi}{2} < k < \frac{3\pi}{2}$

(나) 함수  $\sqrt{|f(x)-t|}$ 는  $x=k$ 에서 미분가능하지 않다.

함수  $g(t)$ 에 대하여 합성함수  $(h \circ g)(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인

사차함수  $h(x)$ 가 있다.  $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = a$ ,  $g(0) = b$ ,  $g(-1) = c$ 라

할 때,  $h(a+5) - h(b+3) + c$ 의 값은? [4점]

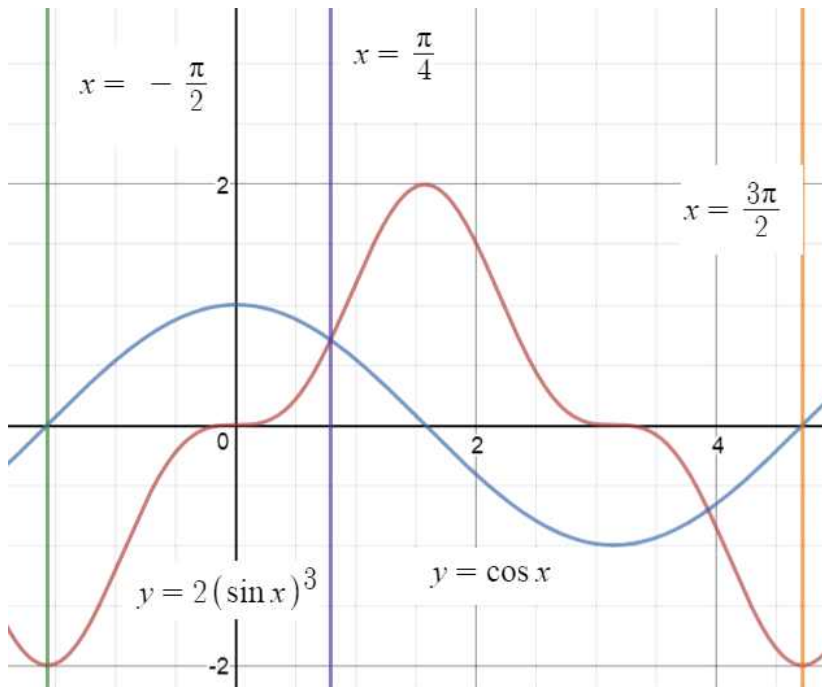
- ① 96      ② 97      ③ 98      ④ 99      ⑤ 100

[사과의 흐름 및 풀이]

1. 열린구간에서 정의되었네.  $-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  : 삼각함수겠네? (문제를 보면서, 맞네.)

$$2. f(x) = \begin{cases} 2\sin x & (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}) \\ \cos x & (\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}) \end{cases} : \text{그리고 시작해야지 뭐 어찌겠어?}$$

- 그림은 천천히, 크고 정확하게
- $2\sin^3 x$ 에 쫄지 말자. 그냥 세제곱하고 2배 한거야.  
( $\sin x$ 의 극대 극소 발생지점이 여전히 유지된다)



3. 실수  $t$ 에 대해서 실수  $k$ 의 개수 :  $g(t)$

- 음,  $k$  개수는  $t$ 에 의존하는구먼.

4. 박스보자.

(가)  $-\frac{\pi}{2} < k < \frac{3\pi}{2}$  : 그냥 주어진 정의역 내에서만  $k$ 를 세라는 거네.

- 참 조건이 적나라하고 허접하다. 정성 좀 들이지;

(나) 함수  $f(x) - t$  는  $x = k$ 에서 미분가능하지 않다.

- 그냥 절댓값이 아니라 루트가 씌워져있구먼요. 루트를 씌우면 무언가 달라질 수도 있나?
- 일단 절댓값이 보이니, 경우를 나누어야지 뭐.

5. 2에서 그린 함수의 그래프를 보면

- 함수  $f(x)$ 는  $-2$ 에서 시작해서  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  까지 올라갔다(증가),  $x = \pi$ 까지 감소해서  $-1$ 을 찍

고 다시 증가해서  $x = \frac{3\pi}{2}$ 에서  $0$ 을 찍는다.

- $x = \frac{\pi}{4}$ 에서 미분이 안되네.

6. 이제  $(x) - t$  를 한번 살펴보자.

[큰 경우 1]  $f(x) - t$ 에 부호변화가 생기지 않음

$$(경우1) t = -2 : g(t) = 1 \quad (k = \frac{\pi}{4})$$

$$(경우2) t = \frac{\sqrt{2}}{2} : g(t) = 1 \quad (k = \frac{\pi}{4})$$

[큰 경우 2]  $f(x) - t$ 에 부호변화가 생김 ( $-2 < t < 1$ )

$$\sqrt{|f(x) - t|} \text{ 를 미분하면 } \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x) - t}} \text{ 이거나 } \frac{-f'(x)}{2\sqrt{-f(x) + t}}$$

일단  $f(x) = t$ 인 지점에서 미분이 불가능한데... (분모 때문에...)

그러나 미분계수의 정의상  $x$  something이니 분모가 0으로 가는 속도와 분자가 0으로 가는 속도에 대하여 비교가 필요하겠구먼. ( $f'(x) = 0$ 인 녀석들근방에서 조심해서 봐야한다)

$$t = f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} : \text{이건 [큰 경우1]에서 살펴보았으니 배제해도 되겠다.}$$

$f(x) = t$ 인 교점 개수를 잘 봐야겠다.

$$(경우1) -2 < t < -1 : g(t) = 2 \quad (k = \frac{\pi}{4}, f(x) = t \text{인 지점 하나})$$

$$(경우2) t = -1 : g(t) = 3 \quad (k = \frac{\pi}{4}, f(x) = t \text{인 지점 2개})$$

$$(경우3) -1 < t < 0 : g(t) = 4 \quad (k = \frac{\pi}{4}, f(x) = t \text{인 지점 3개})$$

(경우4)  $t = 0 : g(t) = 2 \quad (k = \frac{\pi}{4}, f(x) = t$ 인 지점 2개 중 하나( $x = 0$ )에서는 미분가능함에 주의하자)

$$(경우5) 0 < t < \frac{\sqrt{2}}{2} : g(t) = 3 \quad (k = \frac{\pi}{4}, f(x) = t \text{인 지점 2개})$$

7. 합성함수  $h(g(t))$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 불연속 지점을  $h$ 가 잡아주어야 함.

(이 때,  $t$ 가 아니라  $g(t)$ 로 잡아야 함에 주의하자)

$$(1) t = -2, -1, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \text{에서 문제가 생긴다.}$$

$$(2) \text{이로 인하여 } g(t) \text{는 } 1, 2, 3, 4 \text{에서 문제가 생긴다.}$$

$$(3) h(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$8. g(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1, g(0) = 2, g(-1) = 3$$

- 어휴, 참 정성 없이 냈다. 힌트를 이렇게 많이 주다니;

$$9. h(a+5) - h(b+3) + c = h(6) - h(5) + 3 = 5! - 4! + 3 = 120 - 24 + 3 = 99$$

[분석]

1. 실수할 수 있는 부분들

(1) 분자에 대한 무분별한 추종

$$(x) - t \text{ 를 미분하면 } \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)-t}} \text{ 이거나 } \frac{-f'(x)}{2\sqrt{-f(x)+t}}$$

일단  $f(x) = t$ 인 지점에서 미분이 불가능한데... (분모 때문에)

$$t = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} : \text{이건 [큰 경우1]에서 살펴보았으니 배제해도 되겠다.}$$

$f(x) = t$ 인 교점 개수를 잘 봐야겠다. ( $f'(x) = 0$ 이어도 분모 문제를 해결할 수 없다)

각 경우에서  $g(t)$ 를 셀 때,  $f'(x) = 0$ 이 되는 지점을 배제하여 풀 경우 틀리게 됨

(2) 미분계수의 정의

$x = \alpha$ 에서의 미분계수의 정의는  $x = \alpha$ 일 때의 극한값으로 정의가 되어있으므로

$x = \alpha$  근방을 봐야 한다. (좌, 우)

(3)  $h(g(t))$ 의 연속성

$g(t)$ 의 불연속지점을 근으로 갖는 것이 아니라, 그것에서 파생되는  $g(t)$ 의 불연속지점을 근으로 가져야함.

2. 시사하는 바

(1) 그림 그리기는 옳다 : 그림은 언제나 크고, 정확하게, 한 번.

(2) 기계적인 연속 및 미분가능성 판단은 옳지 않다.

$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)-t}}$  이거나  $\frac{-f'(x)}{2\sqrt{-f(x)+t}}$  에서 '분자가 날아가면 된다'라고 생각했다면 반성할 것.

(3) 미분하지 아니하고 그림을 그리는 연습( $f$ -level 자체)이 매우 중요하다.

$2\sin x$ 와  $\cos x$ 는 편하게 그릴 수 있어야 한다.

※  $2\sin^3 x$ 를 쉽게 그리는 방법

(1)  $\sin x$ 에서 쉬운 점들을 찍는다.  $(-\frac{\pi}{2}, -1)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

(2) 세제곱하고 2를 곱한다.

(3) 적당히 스무스하게 잇는다. (미분 가능할테니까)

[가형]

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 에 대하여  
곡선  $y=f(x)$  위의 점  $(t, f(t))$ 에서의 접선의  $y$ 절편을  $g(t)$ 라  
하자. 모든 실수  $t$ 에 대하여

$$(1+t^2)\{g(t+1)-g(t)\}=2t$$

이고,  $\int_0^1 f(x)dx = -\frac{\ln 10}{4}$ ,  $f(1) = 4 + \frac{\ln 17}{8}$  일 때,

$2\{f(4)+f(-4)\} - \int_{-4}^4 f(x)dx$ 의 값을 구하시오. [4점]

[사과의 흐름 및 풀이]

1. 실수 전체의 집합, 미분 가능  $(x)$
2.  $y = f(x)$  위의 점  $(t, f(t))$
3. 그 점에서의 접선  $y = f'(t)(x-t) + f(t)$
4. 이 접선의  $y$ 절편  $g(t) = f(t) - tf'(t)$
5. 모든 실수  $t$ 에 대한 항등식(미분이 가능하다)  
 $(1+t)g(t+1) - g(t) = 2t : g(t+1) - g(t)$ 가 어디서 많이 봤던 놈이다. (수열)

6.  $\int_0^1 f(x)dx = -\frac{\ln 10}{4}, f(1) = 4 + \frac{\ln 17}{8}$

이건 상수값 구하라고 준 '두 개의 조건' : 미지수가 2개짜리인 문제임  
 (  $OF=2$  : 고로 즐라 쉬운 편에 속함)

7. 구해야 하는 것?  $2\{f(4) + f(-4)\} - \int_{-4}^4 f(x)dx$

-----

5번 먼저 처리하자.

(바로 미분 또는 적분하고 시작하면 매우 위험하다. 수능의 킬러에서 바라보는 미분과 적분은 '필요 시 진행하는 것'이며 차원을 이동하기 전, 할 수 있는 건 다 해야 틀리지 않는다)

$f - level$

(1)  $t = 0 : g(1) - g(0) = 0$   
 $g(1) = g(0)$ 에서  $f(1) - f'(1) = f(0)$

(2) 5에서  $1+t^2$ 은 0이 아니므로 양변을 나누면

$$g(t+1) - g(t) = \frac{2t}{1+t^2}$$

우변은 적분이 가능한데, 좌변은?  $g(t) = f(t) - tf'(t)$  대입하긴 싫은데?

$f^+ - level$

(3)  $g(t)$ 의 부정적분을 그냥  $G(t)$ 라 하면  
 $G(t+1) - G(t) = \ln(1+t^2) + C \dots (a)$   
 $t = 0$ 을 넣으면  $G(1) - G(0) = C$

(4)  $g(t) = f(t) - tf'(t)$ 이니  $\int_0^1 f(x)dx = -\frac{\ln 10}{4}$ 랑 같이 써보자. ( $C$  찾기)

$$C = \int_0^1 \{f(t) - tf'(t)\}dt = \int_0^1 f(t)dt - \left[ tf(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(t)dt \right]$$

$$= 2 \int_0^1 f(t)dt - f(1) = \left(-\frac{\ln 10}{2}\right) - \left(4 + \frac{\ln 17}{8}\right)$$

(이라고 적고 시발것이라고 읽는다. 계산 작작좀 시켜라:)

(5) 주어진 조건은 다 썼는데  $f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^4 f(x)dx$  로 어떻게 가지?

(6) (4)를 자세히 보면... 문제에서 구해야 하는 것과 형태가 유사함을 확인할 수 있다.

$$2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^4 f(x)dx \dots 2\int_0^1 f(t)dt-f(1) = \left(-\frac{\ln 10}{2}\right)-\left(4+\frac{\ln 17}{8}\right)$$

(7) 형태는 비슷한데, 구간 확장이 필요하다. 어찌지? 어찌긴 항등식 써먹어야지.

(a)를 다시 보자. '수열에서 많이 쓰던 걸 사용해야겠다'라는 생각이 들어야 한다.

(다 더하면 중간은 다 사라지고, 처음과 끝만 남는다!)

$$t = -4 : (-3) - G(-4) = \ln 17 + C$$

$$t = -3 : G(-2) - G(-3) = \ln 10 + C$$

$$t = -2 : \ln 5 + C$$

$$t = -1 : \ln 2 + C$$

$$t = 0 : C$$

$$t = 1 : \ln 2 + C$$

$$t = 2 : \ln 5 + C$$

$$t = 3 : \ln 10 + C$$

(진심 계산:)

이걸 다 더해야지. 그러면 처음과 끝만 남지.

$$G(4) - G(-4) = 2(\ln 2 + \ln 5 + \ln 10) + \ln 17 + 8C$$

앞에서 구한  $C$ 를 데리고와서 계산을 하면 (ㅂㅂ)

$$G(4) - G(-4) = -32$$

이제 좌변의 표현을 바꿔보자.

$$G(4) - G(-4) = 2\int_{-4}^4 f(t)dt - 4\{f(4) + f(-4)\} = -32$$

문제에서 묻는  $2\{f(4) + f(-4)\} - \int_{-4}^4 f(x)dx$  는 순서 바꾸고, 2로 나누어야 하니 답은 16

## 2. 시사하는 바

(1) 계산력으로 시간 소요 정도를 조절할 수도 있다.

- 계산은 천천히 하는 것이 좋다.

(2) 간접적인 함수 찾기의 중요성

-  $(x)$ ,  $g(x)$ 가 뭔지 모르지만, 적분값과 함숫값이 얽혀있는 건 구할 수 있다.

- 어떻게? 항등식을 이용해서 간접적으로 파고 들어간다.

(3) 간접적인 정답 구하기의 중요성

- 문제에서 묻는 것 :  $2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^4 f(x)dx$

- 직접적으로 구한다?  $f(x)$ 를 찾아서 계산하고 적분한다(이건 쉬운 문제용).

vs

- 간접적으로 구한다? 저걸 통째로 찾는다(이게 머리 싸움).

※ 그림을 그려서 푸는 방법도 있으나, 이걸 분량이 길어지므로 다음번에 다루어볼게요.