

2019학년도 초성민 6월 대비 공개모의고사 나형 정답

1	③	2	②	3	①	4	④	5	④
6	①	7	④	8	④	9	⑤	10	④
11	③	12	②	13	⑤	14	①	15	①
16	⑤	17	②	18	②	19	③	20	⑤
21	⑤	22	30	23	20	24	2	25	32
26	4	27	17	28	55	29	336	30	12

초성민 & 이정환 6월 대비 공개 모의고사

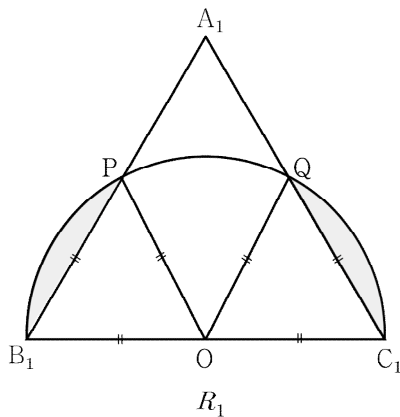
나형 단원 출처

1. 로그 [수2]
2. 함수의극한 [미적]
3. 합성함수 [수2]
4. 집합 [수2]
5. 독립사건 [확률]
6. 명제 [수2]
7. 중복조합 [확통]
8. 이항정리 [확통]
9. 함수의 연속 [미적]
10. 미분의 활용 [미적]
11. 합성함수 역함수 [수2]
12. 유리함수 [수2]
13. 명제 [수2]
14. 수열 [수2]
15. 수열의 합 [수2]
16. 미분가능 [미적]
17. 속도와 거리 [미적]
18. 등비급수 [확통]
19. 이항정리 [미적]
20. 미분 [미적]
21. 함수 [수2]
22. 순열 [확통]
23. 미분계수 [미적]
24. 로그 [수2]
25. 집합 [수2]
26. 수열 [수2]
27. 확률 [확통]
28. 함수의 연속 [미적]
29. 경우의 수 [확통]
30. 미분 [미적]

초성민 & 이정환

6월 대비 공개 모의고사 나형 4점 문항 해설

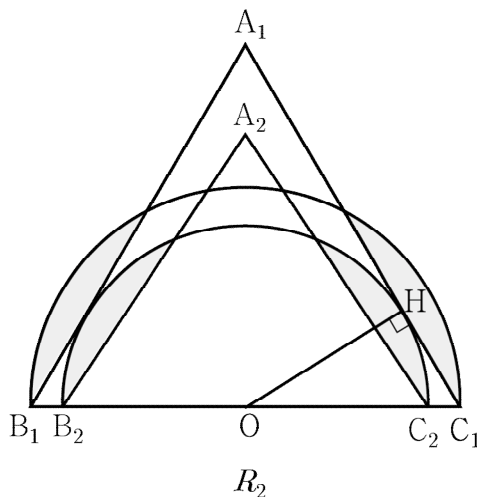
18. 정답 : ②



원과 정삼각형의 교점을 각각 P , Q 라 하자. 점 P 가 선분 A_1B_1 의 중점이므로 선분 PB_1 의 길이는 $\frac{1}{2}$ 이고 삼각형 OPB_1 과 삼각형 OC_1Q 는 정삼각형이고 $\angle POB_1 = \angle QOC_1 = 60^\circ$ 이다.

따라서 $S_1 = 2 \times \left(\pi \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times \frac{60^\circ}{360^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) = \frac{1}{12} \pi - \frac{\sqrt{3}}{8}$ 이다.

이제 공비를 구하자.



$\angle OC_1H = 60^\circ$ 이므로 선분 OH의 길이는 $\overline{OC_1} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 이고

$\overline{B_1C_1} : \overline{B_2C_2} = 1 : \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 넓이비는 $1 : \frac{3}{4}$ 이다.

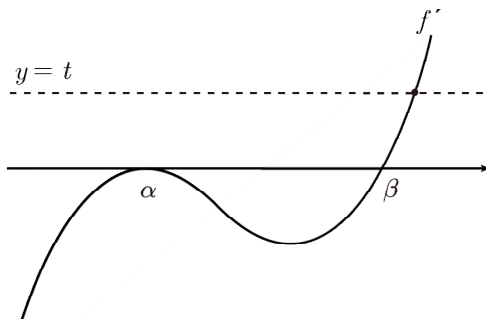
$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\left(\frac{1}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{8} \right)}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

20. 정답 : ⑤

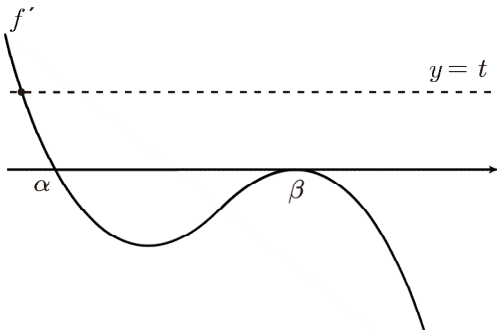
(가) 조건을 만족시키면서 (나) 조건을 만족시키는 삼차함수 $f'(x)$ 의 개형을 예상해 보면 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수일 때와 음수일 때 두 가지 경우로 나누어 생각해볼 수 있다.

1) 최고차항의 계수가 양수일 때

$f'(x)$ 가 (가), (나) 조건을 모두 만족시키기 위해서는 삼차함수가 α 에서 중근, β 에서 하나의 실근을 가져야한다. (그림참조)



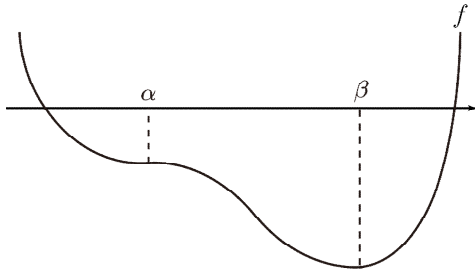
2) 최고차항의 계수가 음수일 때



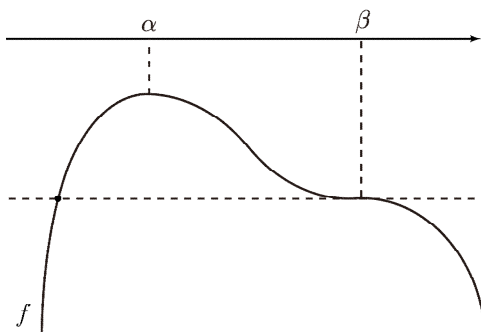
따라서 ㄱ은 참이다. (각각의 경우 극값이 하나씩 있다.)

그리고 이제 f' 을 바탕으로 f 의 개형을 추론해보자.

1) 최고차항의 계수가 양수일 때



2) 최고차항의 계수가 음수일 때



위와 같은 개형을 가지므로

$f(\beta) < f(\alpha) < 0$ 이고 $|f(\alpha)| < |f(\beta)|$ 이므로 $\hookrightarrow$ 은 맞다.

또, $f(x)=f(\beta)$ 의 근이 2개 일 때는 최고차항의 계수가 음수일 때이므로
최댓값은 $f(\alpha)$ 이고 $\rhd$ 도 맞다.

21. 정답 : ⑤

합성함수 $f \circ g$ 가 역함수를 갖기 위해서는 함수 $f \circ g$ 가 일대일 대응, 즉 증가함수
이거나 감소함수여야 한다.

직선 $y=ax+b$ 가 감소함수일 때에도 합성함수가 감소함수가 될 수 있지만, a 의 최
댓값을 구해야하므로 a 가 양수일 때 ($f \circ g$ 가 증가함수일 때)를 생각해보자.

일단 $g(x)$ 는 $f(x)$ 와 $ax+b$ 중 작은 값을 함숫값으로 갖는 함수이다. $f(x)$ 와
 $y=ax+b$ 의 위치관계를 기준으로 케이스를 분류해보자.

1) $ax+b \leq f(x)$ 일 때

$g(x)=ax+b$ 이므로 $f \circ g = f(ax+b)$ 이고

$f(ax+b)$ 가 증가함수이라면 함수 f 의 정의역이 $\frac{5}{2}$ 이상, 즉 직선 $ax+b$ 의 값의 범

위가 $\frac{5}{2}$ 이상이어야 한다. 함수 $g(x)$ 가 $x \geq 0$ 에서 정의된 함수이므로 $b \geq \frac{5}{2}$ 이어야 한다. 그리고 $ax+b \leq f(x)$ 일 때 a 의 값이 최대이려면 $b = \frac{5}{2}$ 이고 직선 $ax+b$ 가 $f(x)$ 에 접하는 상황이어야 하므로, $(0, \frac{5}{2})$ 에서 곡선 $y = x^2 - 5x + 10$ 에 그은 접선이 어야 한다.

$$\frac{(t^2 - 5t + 10) - \frac{5}{2}}{t - 0} = 2t - 5, \quad t = \sqrt{\frac{15}{2}} \text{ 이고 } a = \sqrt{30} - 5 \quad b = \frac{5}{2}$$

2) $ax+b$ 가 $f(x)$ 와 두 점에서 만날 때

$ax+b$ 는 증가함수이므로 1)과 마찬가지로 함수 f 의 정의역이 $\frac{5}{2}$ 이상, 즉 $b \geq \frac{5}{2}$ 이어야 함수 $f \circ g$ 가 증가함수가 될 수 있다. 이때 직선 $y = ax+b$ 가 $y = f(x)$ 와 근을 가지면서 함수 g 가 증가함수가 되게 하는 경우, a 가 최댓값이 되려면 직선 $ax+b$ 가 $y = f(x)$ 의 꼭짓점을 지나는 상황이어야 한다.

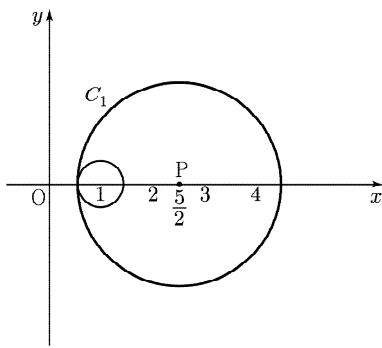
따라서 $b = \frac{5}{2}$ 일 때 a 가 최댓값을 가지며 $a = \frac{1}{2}$ 이다.

이차함수에 접할 때(1번 경우)보다 이때(2번 경우)가 기울기가 더 크므로 답은 $\frac{13}{2}$ 이다.

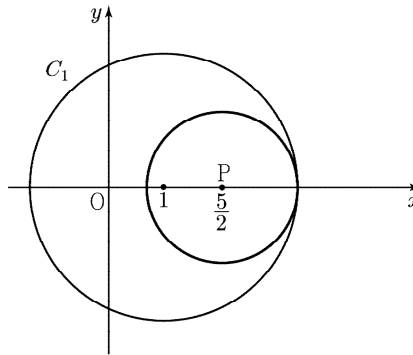
29. 정답 : 336

두 원 C 와 C_n 의 공통접선이 홀수가 된다는 것은 두 원의 관계가 외접하거나 내접하는 상황이다. 원 $C: \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = 4$, 원 $C_n: (x-n)^2 + y^2 = m^2$ 은 n 의 값에 따라 상황이 변한다.

(i) $n = 1$ 일 때



[그림1]

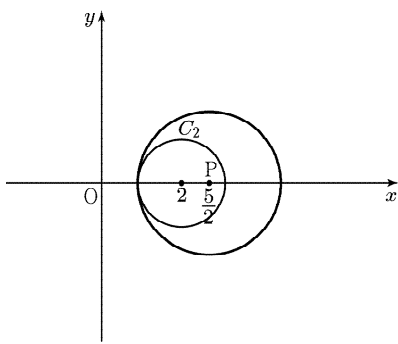


[그림2]

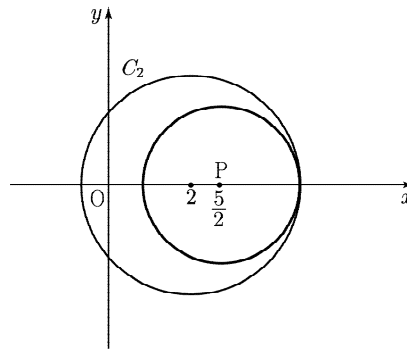
[그림1]은 원 C_1 이 내접 [그림2]는 원 C_1 이 외접인 상황이다.

$$m = \frac{1}{2} \text{ or } \frac{7}{2} \text{ 이므로 } a_1 = 4$$

(ii) $n=2$ 일 때



[그림3]

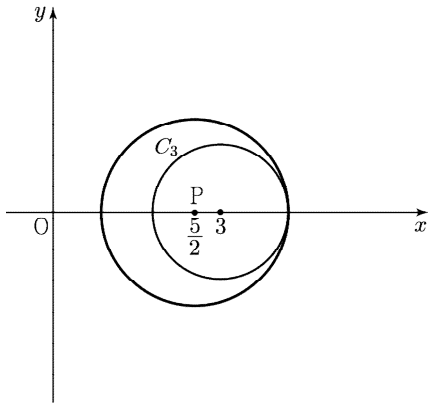


[그림4]

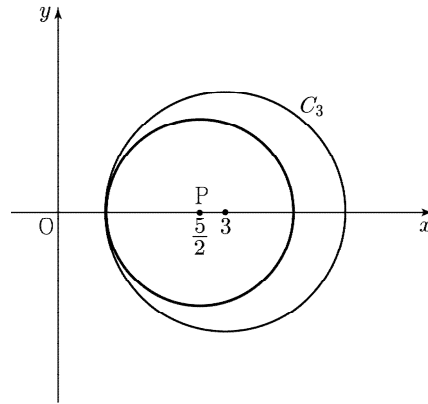
[그림3]은 원 C_2 가 내접 [그림4]는 원 C_2 가 외접

$$m = \frac{3}{2} \text{ or } \frac{5}{2} \text{ 이므로 } a_2 = 4$$

(iii) $n=3$ 일 때



[그림5]



[그림6]

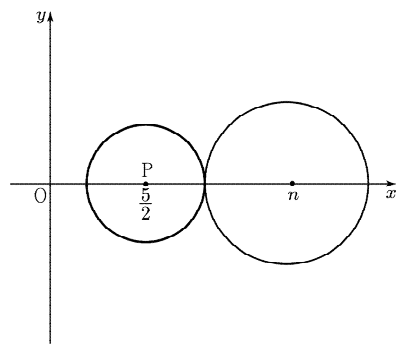
[그림5]는 원 C_3 가 내접, [그림6]은 원 C_3 가 외접

$$m = \frac{3}{2} \text{ or } \frac{5}{2} \text{ 이므로 } a_3 = 4$$

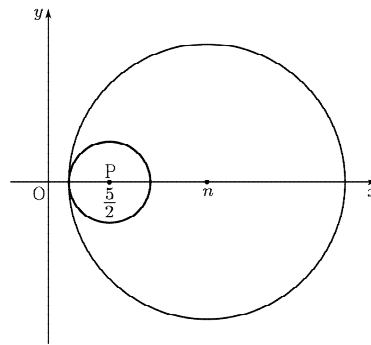
(iv) $n = 4$ 일 때

a_4 는 a_1 과 대칭인 상황이므로 $a_4 = 4$

(v) $n \geq 5$ 일 때



[그림7]



[그림8]

일반화를 시켜보자.

[그림7]은 원 C_n 과 원 C 와 외접할 때, [그림8]은 원 C_n 과 원 C 와 내접할 때이다.

외접할 때 반지름 $m = n - \frac{9}{2}$, 내접할 때 반지름 $m = n - \frac{1}{2}$ 이므로

따라서 $a_n = 2n - 5$ 이다.

$$\sum_{n=1}^{20} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \sum_{n=5}^{20} 2n - 5 = 336$$

30. 정답 : 12

$x \leq t$ 에서 $g(x) = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$ 이고
 $x > t$ 에서 $g(x) = f(x)$ 이다.

따라서

$x \leq t$ 에서 $-(x-1)^2 + 4$ 의 최댓값
 $x > t$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값

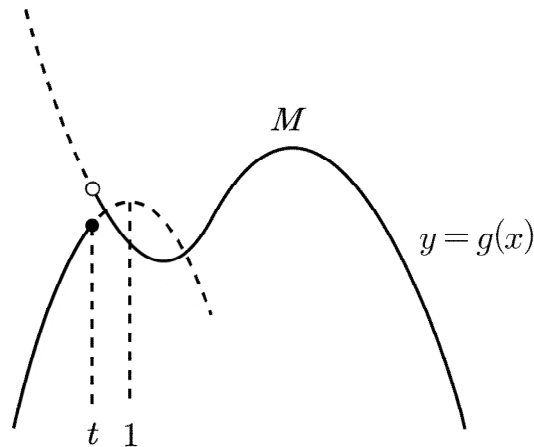
중 큰 값이 함수 $g(x)$ 의 최댓값이 될 것이다. $-(x-1)^2 + 4$ 의 최댓값을 구하는 과정은 이차함수의 최댓값을 구하는 과정이기 때문에, 대칭축의 x 좌표가 구간에 포함되는지 여부가 중요하다. 따라서 t 를 $0 < t < 1$ 인 경우와 $t \geq 1$ 인 경우 두가지로 분류해야 한다.

1) 첫 번째로, $0 < t < 1$ 인 경우!

구간 $x \leq t$ 는 이차함수 $-(x-1)^2 + 4$ 의 대칭축인 $x=1$ 을 포함하지 않는 구간이 되고, 따라서 $x \leq t$ 에서의 최댓값은 $-(x-1)^2 + 4$ 에 $x=t$ 를 대입한 값인 $-(t-1)^2 + 4$ 가 된다.

$x \leq t$ 에서 $-(x-1)^2 + 4$ 의 최댓값인 $-(t-1)^2 + 4$ 가 $x > t$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값보다 크거나 같다면, 함수 $g(x)$ 의 최댓값은 $-(t-1)^2 + 4$ 가 된다. 이는 t 의 값에 관계 없이 함수 $g(x)$ 의 최댓값이 일정하다는 조건에 모순이다. ($-(t-1)^2 + 4$ 는 t 에 따라 변하는 값이기 때문이다.)

따라서 $0 < t < 1$ 인 t 에 대하여 $t < x$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값이 $x \leq t$ 에서 $-(x-1)^2 + 4$ 의 최댓값인 $-(t-1)^2 + 4$ 보다 크다를 만족하는 상황이어야 한다!



이를 그림으로 나타내면 위와 같다. $x \geq 1$ 에서의 삼차함수의 최댓값 (즉, 극댓값!) 이 이차함수에 $x=t$ 를 대입한 값인 $-(t-1)^2+4$ 보다 항상 크기 때문에 함수 $g(x)$ 의 최댓값은 삼차함수의 극댓값으로 일정하고, 그 값이 문제에서 주어진 M 이 된다.

하지만, 아직까지는 M 이 어떤 값을 가져야 하는지에 대한 힌트가 부족하기 때문에, $t \geq 1$ 인 경우를 마저 조사해 보도록 하자.

2) 두 번째로, $t \geq 1$ 인 경우!

이차함수의 개형을 고려해 봤을 때, 구간 $x \leq t$ 는 이차함수 $-(x-1)^2+4$ 의 대칭축인 $x=1$ 을 포함하는 구간이 되고, 따라서 $x \leq t$ 에서의 최댓값은 $-(x-1)^2+4$ 에 $x=1$ 을 대입한 값인 4가 된다. 이제 $x \geq t$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값과 4를 비교해 봐야 한다.

① $x > t$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값 (즉, 극댓값)이 4보다 작거나 같은 경우
→ 함수 $g(x)$ 의 최댓값이 t 의 값과 관계없이 4로 일정하다.

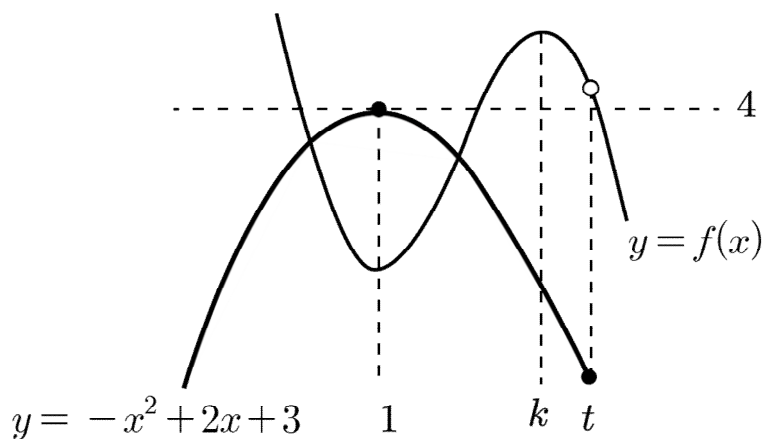
② $x > t$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값 (즉, 극댓값)이 4보다 큰 경우 ★★★★★★
→ 함수 $g(x)$ 의 최댓값이 t 의 값과 관계없이 4로 일정할 수 없다.

이 부분이 이해하기 쉽지 않을 것이다. 아래의 단계를 거쳐 충분히 이해해보도록 하자.

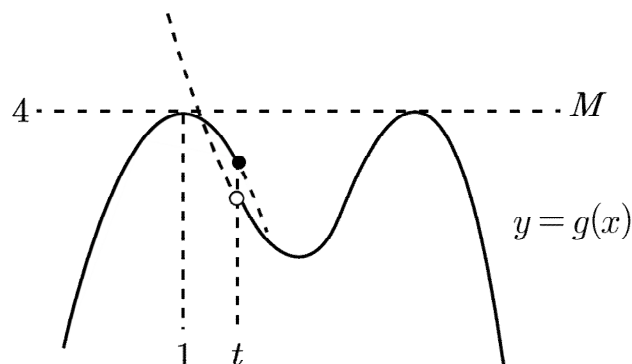
삼차함수 $f(x)$ 가 $x=k$ 에서 극대를 갖는다고 가정해보자.

만일 $t < k$ 인 상황이라면, $x > t$ 에서의 최댓값은 삼차함수 $f(x)$ 의 극댓값이 될 것이다. 하지만, $k < t$ 인 상황이라면, $x > t$ 에서 최댓값이 존재하지 않는 경우가

생기기 때문에, $f(x)$ 의 최댓값이 4보다 큰 경우는 존재해서는 안된다.
 예를 들어, 다음의 그림과 같은 상황에서는 $x > t$ 에서 최댓값이 존재하지 않는다.

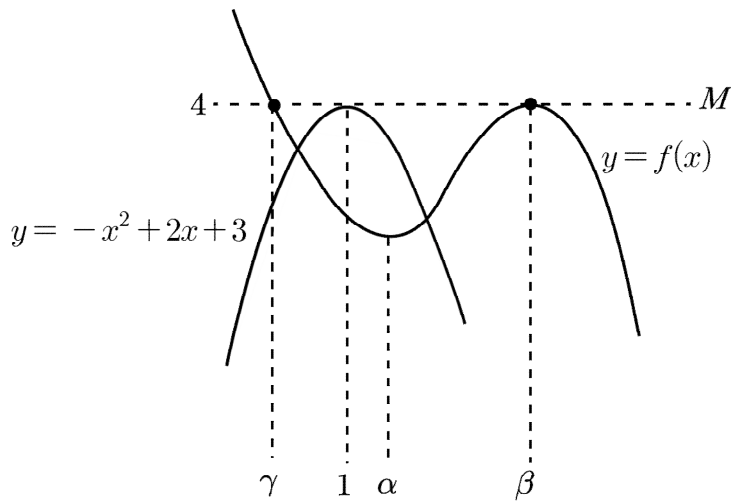


위의 ①, ②를 고려했을 때, 함수 $g(x)$ 의 최댓값 $M=4$ 라는 사실과, $f(x)$ 의 극댓값이 4보다 작거나 같아야 한다는 사실을 알았다.



이를 그림으로 나타내면 위와 같다. 위의 상황은 $x > t$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값이 4보다 작거나 같은 경우 중 특별히, $f(x)$ 의 최댓값이 4인 경우를 그림으로 나타낸 것이다.

이제 모든 상황을 종합적으로 따져서 $f(x)$ 의 개형을 추론해보자. 우리가 밝혀낸 사실은 아래와 같다.



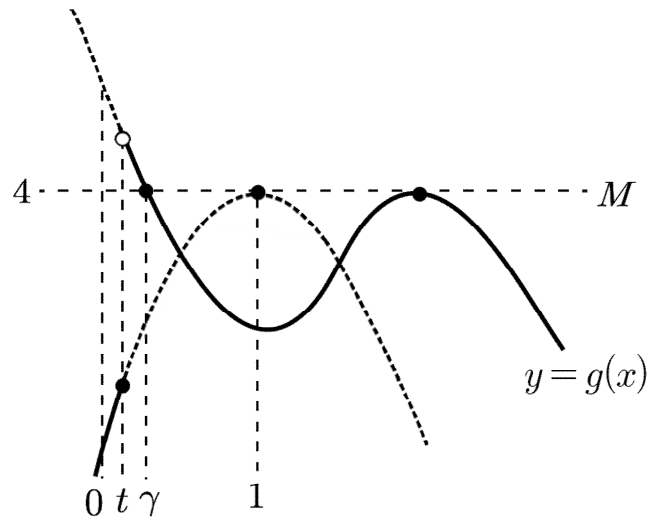
위의 그림과 같이 $f(x)$ 가 극솟값을 가지는 x 좌표를 α , 극댓값을 가지는 x 좌표를 β , 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=4$ 의 교점 중 $x \neq \beta$ 인 점을 γ 라 했을 때,

① $f(x)$ 는 $\beta \geq 1$ 에서 극댓값 4를 가져야 한다.

왜냐하면, $f(x)$ 가 $x > t$ 에서 4보다 큰 함숫값을 가져서는 안되기 때문이다. 따라서 극댓값 4를 가져야 한다. 또한, $\beta < 1$ 인 경우에는 $x > t$ 에서 4보다 큰 함숫값을 가질 수 없다. 따라서 $\beta \geq 1$ 에서 극댓값 4를 가져야 한다.

② γ 는 $\gamma \leq 0$ 을 만족시켜야 한다.

왜냐하면 $\gamma > 0$ 인 상황에서는 아래와 같이 함수 $g(x)$ 의 최댓값이 없을 수 있기 때문이다.



$f(x)$ 의 식을 세우면 $f(x) = -(x-\gamma)(x-\beta)^2 + 4$ 이다. 극솟값의 최댓값을
 구하기위해서 $f(x)$ 의 도함수를 구하면 $f'(x) = -(x-\beta)(3x-2\gamma-\beta)$ 이다. 극솟값은
 $x = \frac{2\gamma+\beta}{3}$ 에서 갖고, $f\left(\frac{2\gamma+\beta}{3}\right) = -\frac{4}{27}(\beta-\gamma)^3 + 4$ 이다. $\beta \geq 1$, $\gamma \leq 0$ 이므로 $\beta-\gamma$ 의
 최솟값은 1이고 $f\left(\frac{2\gamma+\beta}{3}\right) = -\frac{4}{27}(\beta-\gamma)^3 + 4$ 의 최댓값은 $k = 4 - \frac{4}{27}$ 이므로
 $81(M-k) = 12$ 이다.