2019학년도 초성민 6월 대비
공개모의고사 가형
정답

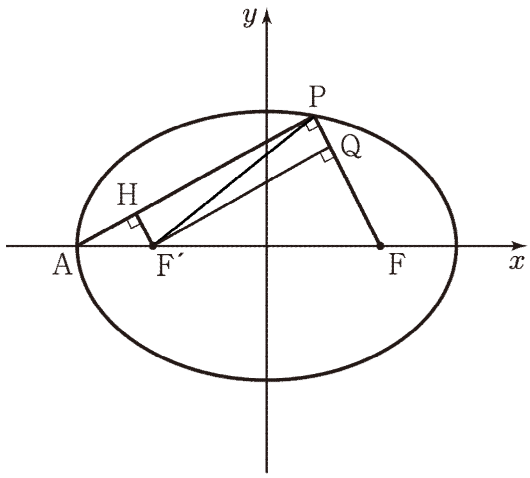
1	③	2	⑤	3	②	4	④	5	⑤
6	①	7	③	8	④	9	②	10	②
11	④	12	①	13	①	14	③	15	①
16	⑤	17	②	18	④	19	③	20	⑤
21	②	22	21	23	8	24	4	25	32
26	25	27	51	28	72	29	148	30	74

초성민 & 이정환 6월 대비 공개 모의고사
가형 단원 출처

1. 평면벡터 [기벡]
2. 삼각함수 [미적]
3. 함수의 극한 [미적]
4. 확률 [확통]
5. 미분 [미적]
6. 평면곡선의 미분 [기벡]
7. 자연수의 분할 [확통]
8. 지수로그 함수 [미적]
9. 미분법 [미적]
10. 평면벡터 [기벡]
11. 곡선의 넓이 [미적]
12. 포물선의 정의 [기벡]
13. 중복조합 [확통]
14. 적분 [미적]
15. 확률 [확통]
16. 타원의 정의 [기벡]
17. 확률 [확통]
18. 곡선의 길이 [기벡]
19. 이항정리 빈칸 [확통]
20. 미적분 ㄱㄴㄷ [미적]
21. 미분 [미적]
22. 경우의 수 [확통]
23. 지수함수 미분 [미적]
24. 적분 [미적]
25. 평면벡터 [기벡]
26. 삼각함수 활용 [미적]
27. 조건부확률 [확통]
28. 삼각함수 극한 [미적]
29. 평면벡터 [기벡]
30. 미적분 [미적]

초성민 & 이정환
6월 대비 공개 모의고사 가형 4점 문항 해설

16. 정답 : ⑤



$\overline{\mathrm{AF'}}=2$, $\overline{\mathrm{AF}}=8$ 이므로 삼각형 $\mathrm{AF'H}$ 와 AFP 는 닮음비가 $1:4$ 이다.
점 $\mathrm{F'}$ 에서 선분 PF 에 내린 수선의 발을 Q 라 하면 $\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{QF}}=1:3$ 이다.
$\overline{\mathrm{PQ}}=t$ 라 하면 $\overline{\mathrm{QF}}=3t$ 이고 $\overline{\mathrm{PF}}=4t$ 이다. 타원의 정의를 이용하면 $\overline{\mathrm{PF'}}=10-4t$ 이다.

삼각형 $\mathrm{PF'Q}$ 와 삼각형 $\mathrm{FQF'}$ 에 대하여 각각 피타고라스의 정리를 이용하면
$\overline{\mathrm{PF'}}^2-\overline{\mathrm{PQ}}^2=\overline{\mathrm{FF'}}^2-\overline{\mathrm{FQ}}^2=\overline{\mathrm{QF'}}^2$ 이다. 따라서 $(10-4t)^2-t^2=6^2-(3t)^2$ 이다. 방정식을 풀면 $t=2$ or $\dfrac{4}{3}$ 이다. $t=2$ 이면 $\overline{\mathrm{QF'}}^2=36-9t^2$ 에서 길이가 0 으로 모순이다.

$t=\dfrac{4}{3}$ 를 대입하면 $\overline{\mathrm{QF'}}^2=20$ 이다.

18. 정답 : ④

곡선의 길이는 $\int_1^6 \sqrt{(f'(t))^2+(f'(t)f'(f(t)))^2}\,dt=12$ 이다. 이를 정리하면

$\int_1^6 |f'(t)|\sqrt{1+(f'(f(t)))^2}\,dt=12$ 이다. $1<t<4$ 에서는 $f'(t)>0$ 이고 $t>4$ 일때는

$f'(t)<0$ 이므로 $f(t)=x$ 로 치환적분 하면

$$\int_1^6 |f'(t)|\sqrt{1+f'(f(t))}\,dt=\int_1^4 f'(t)\sqrt{1+(f'(f(t)))^2}\,dt-\int_4^6 f'(t)\sqrt{1+(f'(f(t)))^2}\,dt$$

$$=\int_1^4 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx+\int_0^4 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$$=\int_1^4 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx+\int_1^4 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx+\int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=12$$ 이다.

곡선 $y=f(x)$ 의 $x=1$ 부터 $x=4$ 까지의 길이가 5 이므로

$\int_1^4 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=5$ 이다. 따라서

$\int_1^4 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx+\int_1^4 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx+\int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

$=5+5+\int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=12$ 이므로 $\int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=2$ 이다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 의 $x=0$ 부터 $x=1$ 까지의 길이는 2 이다.

20. 정답 : ⑤

$\int_{g(t)}^{h(t)} f(x)dx=t^4$ 의 양변을 미분하면 $h'(t)f(h(t))-g'(t)f(g(t))=4t^3$ 이다. $f(x)=t$ 의

두 실근이 $h(t)$, $g(t)$ 이므로 $f(h(t))=f(g(t))=t$ 이다.

따라서 $h'(t)f(h(t))-g'(t)f(g(t))=t\{h'(t)-g'(t)\}=4t^3$ 이다.

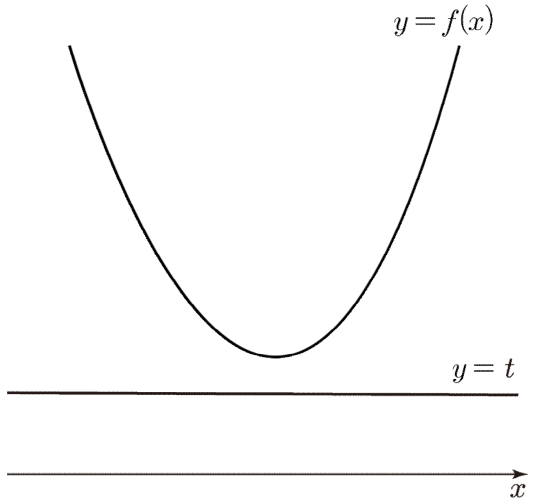
ㄱ. $t>0$ 이므로 $t\{h'(t)-g'(t)\}=4t^3$ 의 양변을 t 로 나누면 $h'(t)-g'(t)=4t^2$ 이다. (참)

ㄴ. 양변을 적분하면 $h(t)-g(t)=\frac{4}{3}t^3+C$ (단, C는 적분상수)이다. 따라서

$\lim_{t\to 0+}\{h(t)-g(t)\}=C$ 이다. ㄱ. 의 결과로 $h'(t)-g'(t)=4t^2>0$ 이므로 $h(t)-g(t)$ 가

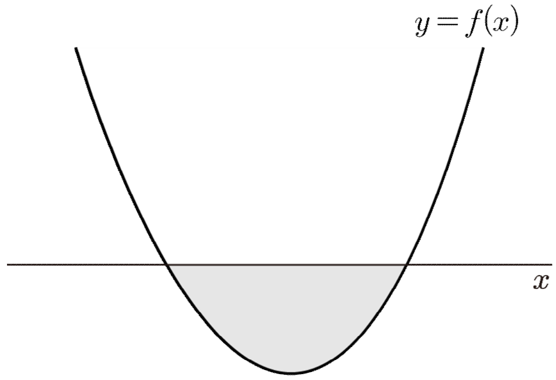
증가함수이다. 즉, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$의 두 교점을 이은 선분의 길이는 증가한다. 따라서 곡선 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 이차함수의 개형과 유사한 모양이다.

① 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$인 경우



모든 양수 t에 대하여 두 실근을 갖는다는 사실에 모순이다. 따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$일수는 없다.

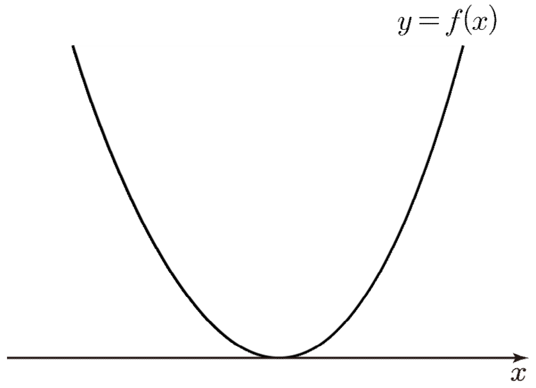
② 방정식 $f(x)=0$이 두 실근을 갖는 경우



$t \to 0+$ 일 때, $\int_{g(t)}^{h(t)} f(x)dx$는 그림에서 색칠한 부분의 적분값과 같다. 이는 $\int_{g(t)}^{h(t)} f(x)dx = t^4 > 0$ 이라는 사실에 모순이다. 따라서 방정식 $f(x)=0$은 두 실근을

가질 수 없다.

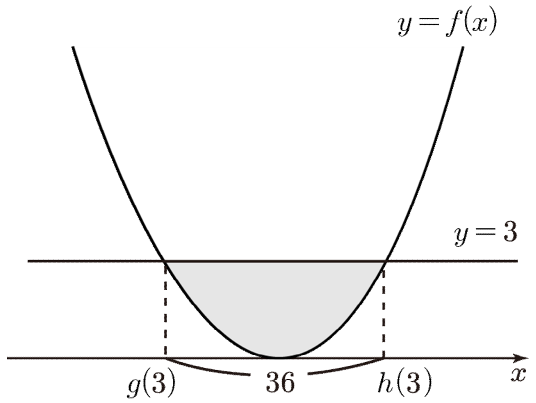
③ 방정식 $f(x)=0$이 한 실근을 갖는 경우



모든 경우를 고려했을 때, $f(x)$의 개형은 위와 같다.

따라서 $\lim_{t \to 0+}\{h(t)-g(t)\}=0$이다. (참)

ㄷ.



곡선 $y=f(x)$와 $y=3$으로 둘러싸인 부분은 그림과 같다. 둘러싸인 부분의 넓이를 식으로 표현하면 $3\times(h(3)-g(3))-\int_{g(3)}^{h(3)}f(t)dt$이다.

ㄱ 과 ㄴ 의결과로 $h(t)-g(t)=\dfrac{4}{3}t^3$이므로 $t=3$을 대입하면 $h(3)-g(3)=36$이다.

따라서

$3\times(h(3)-g(3))-\int_{g(3)}^{h(3)}f(t)dt=3\times 36-3^4=108-81=27$이다. (참)

21. 정답 : ②

$x<k$에서 함수 $\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)+x$는 미분가능한 함수이고, $x>k$에서 삼차함수 $f(x)$는 미분가능한 함수이다. 따라서, $x=k$ 에서만 $g(x)$가 미분가능하다면 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이다.

미분계수의 정의를 이용하면, $g(x)$가 $x=k$에서 미분가능할 때

$$\lim_{x\to k-}\frac{\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)+x-\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi k)-k}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}$$ 이다.

두 함수 $\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)+x$, $f(x)$ 모두 미분가능한 함수이기 때문에

$$\lim_{x\to k-}\frac{\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)+x-\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi k)-k}{x-k}=\cos(2\pi k)+1,\ \lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}=f'(k)$$ 이다.

따라서 $\underline{\cos(2\pi k)+1=f'(k)}$라면, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수가 된다.

(나) 조건을 보면, $g'(3)=g'(2)$라는 사실과 $g'(2)\neq g'(1)$이라는 사실을 알 수 있다.

$k\geq 2$라고 가정한다면, $g'(1)=\cos(2\pi)+1=2$이고 $g'(2)=\cos(4\pi)+1=2$이다. 이는 $g'(2)\neq g'(1)$이라는 사실에 모순이다. **따라서 $k\geq 2$일 수 없다. 즉, $k<2$이다.**

$k<2$이기 때문에, $g'(2)=f'(2)$, $g'(3)=f'(3)$이다. $f'(x)$가 이차함수라는 점을 주목하면, $g'(2)=g'(3)\Rightarrow f'(2)=f'(3)$이라는 사실로 이차함수 $f'(x)$의 대칭축이 $x=\frac{5}{2}$라는 것을 알 수 있다. $f'(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이므로 $x<\frac{5}{2}$일 때는 $f'(x)$는 감소함수이다. $k<2$이기 때문에 $f'(k)>f'(2)$이고, $f'(k)=\cos(2\pi k)+1$에서 $\cos(2\pi k)+1>f'(2)$이다. **$0\leq\cos(2\pi k)+1\leq 2$이고, (가) 조건에 의해서 $f'(2)$는 자연수이기 때문에 $f'(2)=1$일 수 밖에 없다. 또한 추가적으로 $f'(3)=1$이라는 사실 또한 알 수 있다.**

또한, $k<1$ 이라면 $\cos(2\pi k)+1=f'(k)>f'(1)$ 이므로 $f'(1)<2$ 가 된다. (가) 조건에 의해 $f'(1)$ 은 자연수인데, $f'(1)<2$ 를 만족시키는 자연수 $f'(1)=1$ 밖에 없다. 하지만 $f'(2)=1$ 이기 때문에 $f'(1)=1$ 이라는 사실은 (나) 조건의 $g'(1)\neq g'(2)$ 에 모순이다.

위의 모든 사실을 종합해보자면, $1\le k<2$ 이고, $f'(x)$ 는 $f'(2)=f'(3)=1$ 이다.

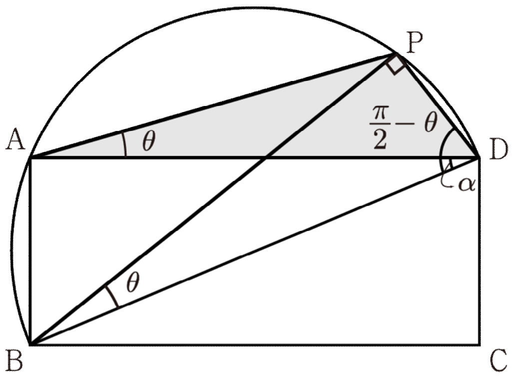
이제, 문제에서 물어보는 k가 최소인 상황, 즉 $k=1$ 인 상황을 살펴보자.
$k=1$ 일 때는 $f'(1)=2$ 이다.

$f'(x)$ 의 최고차항의 계수를 a 라고 한다면 $f'(2)=f'(3)=1$ 이므로
$f'(x)=a(x-2)(x-3)+1$ 이다. $f'(1)=2$ 이므로 $a=\frac{1}{2}$ 이고 $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{5}{4}x^2+4x+C$ 이다. (C는 적분상수)

적분상수를 결정하기 위해서 $g(x)$ 가 연속함수라는 사실을 이용하자. $g(x)$ 는 미분가능한 함수이기 때문에 연속함수임이 자명하다.
따라서 $\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi)+1=1=f(1)$ 이다. 이를 이용해 적분상수를 결정하면
$f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{5}{4}x^2+4x-\frac{23}{12}$ 이다. $k=1$ 이므로 $f(k-1)=f(0)=-\frac{23}{12}$ 이다.

28. 정답 : 72

원주각의 성질에 의하여 $\angle \mathrm{PAD} = \angle \mathrm{PBD} = \theta$ 이다. (그림참조)



따라서 선분 PD의 길이는 $13\sin\theta$ 이고 $S(\theta)$는 $\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{DP}} \times \overline{\mathrm{AD}} \times \sin(\angle \mathrm{PDA})$이므로

$\angle \mathrm{ADB} = \alpha$라 할 때 $\angle \mathrm{PDA} = \frac{\pi}{2} - \theta - \alpha$이다.

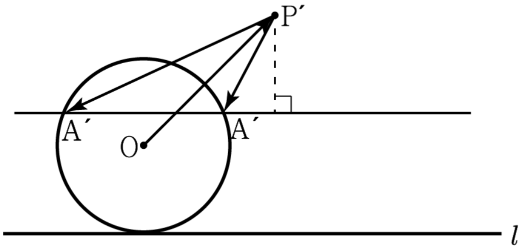
따라서 $\sin(\angle \mathrm{PDA}) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta - \alpha\right)$이고

$\lim_{\theta \to 0+} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha = \frac{12}{13}$ 이므로

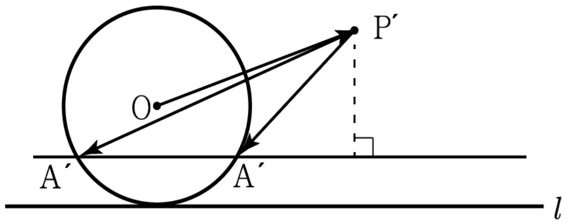
$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta} = \frac{\frac{1}{2} \times 13\sin\theta \times 12 \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta - \alpha\right)}{\theta} = \frac{1}{2} \times 13 \times 12 \times \frac{12}{13} = 72$$

29. 정답 : 148

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}-|\overrightarrow{OA}|^2$의 최댓값과 최솟값을 구해야한다.
주어진 식 $|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OP}|=1$에서 양변을 제곱하면
$|\overrightarrow{OA}|^2+4|\overrightarrow{OP}|^2+4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=1$
$|\overrightarrow{OP}|=1$이므로 $|\overrightarrow{OA}|^2+4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=-3$
$\therefore\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=\dfrac{-3-|\overrightarrow{OA}|^2}{4}$
$\therefore\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}-|\overrightarrow{OA}|^2=\dfrac{-3-5|\overrightarrow{OA}|^2}{4}$
따라서 $\overrightarrow{OA}$의 크기에 따라 최댓값과 최솟값이 결정된다.
$\overrightarrow{OA}$는 원의 중심에서 직선 l을 향해 가는 벡터이다.
$\overrightarrow{2OP}$의 종점을 P'이라 했을 때, P'이 $\overrightarrow{OA}$의 시점이 되도록 평행이동한 벡터를 $\overrightarrow{P'A'}$라 할 때, $\overrightarrow{P'A'}$의 종점 A'이 원 C 위에 있어야 한다. (예시1, 예시2 참조)



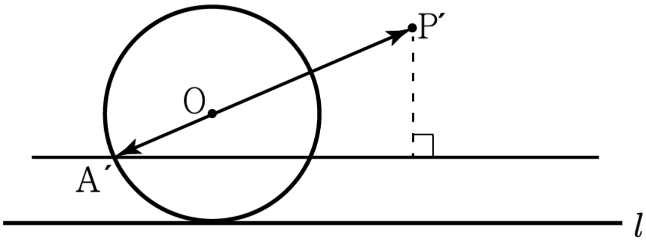
[예시1]



[예시2]

① $|\overrightarrow{OA}|$가 최대가 되는 상황

아래와 같이 세 점 A', O, P' 이 한직선 위에 존재하는 순간이다.

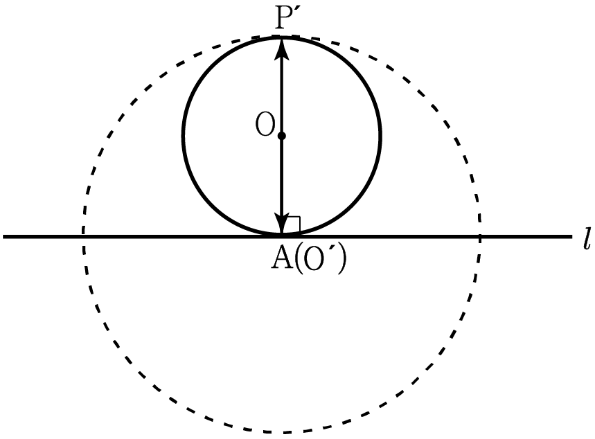


이때 $|\overrightarrow{OA}|$의 최댓값은 3이다.

② $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$가 최소가 되는 상황

A가 접선 l위에 존재하므로, $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| \geq 1$를 만족한다. 최솟값을 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$이라고 하기 전에 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$인 순간 조건을 만족시키는 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 존재하는지 확인하여야 한다.

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$인 상황은 점 A가 직선과 원의 접점인 경우이다.
점 A를 시점이 되도록 $\overrightarrow{\mathrm{OP}'}$를 평행이동 할 때, 아래 그림과 같은 상황일 때 주어진 조건을 만족시킨다.



따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$의 최솟값은 1이다.
$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} - |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = \dfrac{-3-5|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}{4}$의
최댓값은 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3$, 최솟값은 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$일 때 이므로 $M=-12$, $m=-2$
$\therefore\ M^2+m^2=148$

30. 정답 : 74

$f(x)$와 $g(x)$가 역함수이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(g(x))=g(f(x))=x$가 성립한다. 따라서 조건 (가)에서 $x \le f(2g(x)+x) \le f(x)$는 $f(g(x)) \le f(2g(x)+x) \le f(x)$와 동치이다.

만약, $f(x)$가 증가함수라면 $f(g(x)) \le f(2g(x)+x) \le f(x)$는 $g(x) \le 2g(x)+x \le x$이다. ($f(x)$가 증가함수라면 $f(x_1) \le f(x_2) \Rightarrow x_1 \le x_2$) 부등식을 정리하면 $x<0$에서 $-x \le g(x)$ 그리고 $g(x) \le 0$이다. 이를 만족시키는 해집합은 없으므로 모순이다. 따라서 $f(x)$는 감소함수이다.

$f(x)$는 감소함수이기 때문에 부등식 $f(g(x)) \le f(2g(x)+x) \le f(x)$는 $g(x) \ge 2g(x)+x \ge x$가 된다. 즉, $x<0$에서는 $0 \le g(x) \le -x$가 된다.

$g(x)$가 감소함수이므로 $x>0$일 때는 $g(x)<0$이 되고, 따라서 함수 $g(x)$의 그래프는 $x<0$에서 제2사분면을 지나고 $x=0$일 때는 원점을, $x>0$일 때는 제4사분면을 지나는 그래프이다.

따라서 $g(x)$의 그래프를 $y=x$에 대칭시킨 곡선인 $f(x)$의 그래프 또한 $x<0$에서 제2사분면을 지나고 $x=0$일 때는 원점을, $x>0$일 때는 제4사분면을 지나는 그래프이다.

이제 조건 (나)의 첫 번째 등식 $\int_{-6}^{x} \frac{g(t)}{t} dt = f(x) - |f(x)| - x + a$를 해석해보자.

$x<0$일 때, $f(x)>0$이므로 $\int_{-6}^{x} \frac{g(t)}{t} dt = -x+a$이다. 양변에 $x=-6$을 대입하여 $a=-6$을 얻을 수 있다.

또한 양변을 미분하여 $\frac{g(t)}{t} = -1 \Rightarrow g(t) = -t$를 얻을 수 있다. 정리해보면, $x<0$일 때 $g(x)=-x$이고, $a=-6$을 얻을 수 있다. 이제 조건 (나)의 두 번째 등식 $\int_{2}^{x} \frac{g(t)}{t} dt = f(x) - |f(x)| + 2\ln(bx+c) + 4$을 해석해보자. $x<0$일 때, $g(x)=-x$이었으므로, $x>0$일 때 $f(x)=-x$이다.

이를 대입하면

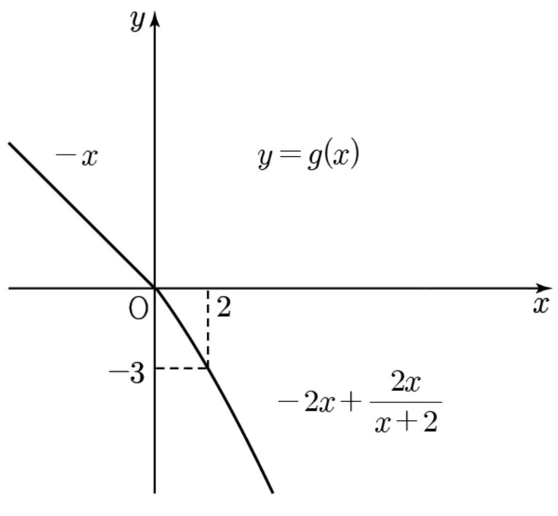
$\int_{2}^{x} \frac{g(t)}{t}dt = -x - |-x| + 2\ln(bx+c) + 4 = \int_{2}^{x} \frac{g(t)}{t}dt = -2x + 2\ln(bx+c) + 4$ 이다.

양변에 $x=2$ 를 대입하여 ⓐ$\underline{2b+c=1}$을 얻을 수 있고, 양변을 미분하여 $x>0$ 일 때 $\frac{g(x)}{x} = -2 + \frac{2b}{bx+c} \Rightarrow g(x) = -2x + \frac{2bx}{bx+c}$ 이다. $x<0$ 에서 $g(x) = -x$ 이고, $g(x)$ 가 미분가능한 함수이기 때문에 $g(x) = -2x + \frac{2bx}{bx+c}$ 를 미분한 함수에 $x=0$ 을 대입하면 -1 이어야 한다. 계산을 하면 ⓑ $\underline{c=2b}$를 얻을 수 있다.

ⓐ와 ⓑ를 연립하면 $b=\frac{1}{4}$, $c=\frac{1}{2}$ 를 얻을 수 있다.

따라서 $4abc = 4\times(-6)\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2} = -3$ 이므로 구하고자 하는 $f'(4abc) = f'(-3)$ 이다.

우리는 $f(x)$ 의 식이 아닌 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 의 식을 알고 있기 때문에 역함수 미분법으로 $f'(-3)$ 의 값을 구해야 한다. $f(g(x)) = x$ 를 미분하여 얻은 $g'(f(x))f'(x) = 1$ 에 $x = -3$ 을 대입하여 $g'(f(-3))f'(-3) = 1$ 을 얻을 수 있다. 따라서 $f(-3)$ 의 값을 구해야 한다. $g(f(-3)) = -3$ 이므로 $f(-3) = k$ 라고 하면 $x<0$ 일 때, $f(x) > 0$ 이므로 $k>0$ 이다. 따라서 $g(k) = -2k + \frac{\frac{k}{2}}{\frac{k}{4}+\frac{1}{2}}$ 이고 $g(k) = -3$ 을 풀면 $k=2$ $(\because k>0)$ 이다. 따라서 $g'(f(-3))f'(-3) = 1$ 은 $g'(2)f'(-3) = 1$ 이 되고 $f'(-3)$ 은 $\frac{1}{g'(2)}$ 이다.



$g(x) = -2x + \frac{2x}{x+2}$ 을 미분하여 $x=2$ 를 대입하면 $g'(2) = -\frac{7}{4}$ 이므로

$f'(-3) = -\dfrac{4}{7}$ 이다. 따라서 구하고자 하는 $p=7$, $q=4$ 이므로 $10p+q=74$ 이다.