제 2 교시

수리 영역 (가형)

성명		수험번호										

- 자신이 선택한 유형('가'형 / '나'형)의 문제지인지 확인하시오.
- 문제지에 성명과 수험번호를 정확히 써 넣으시오.
- 답안지에 성명과 수험번호를 써 넣고, 또 수험번호와 답을 정확히 표시하시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. 극한값 $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2ax+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-1}=b$ 라고 한다. $a+b$의 값은? [2점]

① 0 ② $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 1

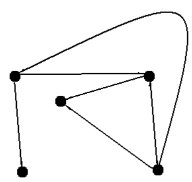
2. $a_1=2$ 인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_{n+1}=(-1)^n a_n$ 이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [2점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

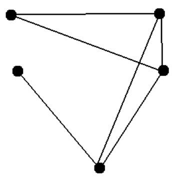
3. $\sec\dfrac{\theta}{2}=4$일 때, $\tan\theta$의 값은? (단, $0<\theta<\pi$) [2점]

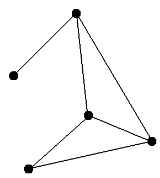
① $-\dfrac{\sqrt{14}}{7}$ ② $-\dfrac{\sqrt{15}}{7}$ ③ $-\dfrac{4}{7}$ ④ $-\dfrac{\sqrt{17}}{7}$ ⑤ $-\dfrac{3\sqrt{2}}{7}$

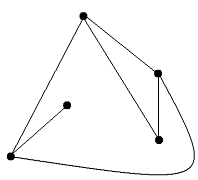
4. 다음 그래프와 일치하지 <u>않는</u> 그래프는?

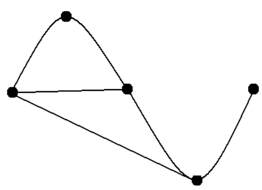


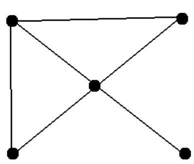
[3점]

①


②


③


④


⑤


5. 포물선 $y^2 = 4x + 8$과 y축으로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는? [3점]

① 4π ② 6π ③ 8π ④ 10π ⑤ 12π

6. 일차변환 $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{-y}{2} \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix}$를 나타내는 행렬 A에 대하여, 일차변환 g를 나타내는 행렬이 $A - A^2 + A^3$이라고 할 때, 점 $(8, 8)$이 일차변환 g에 의해 (a, b)로 옮겨진다고 할 때, $b - a$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

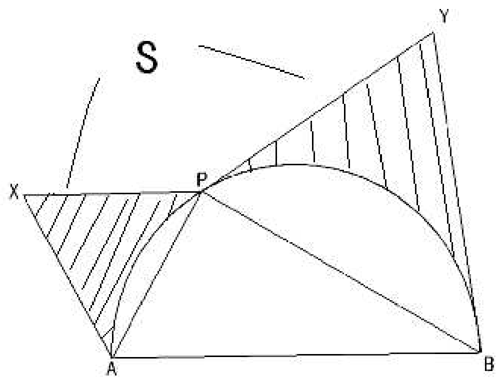
7. 어느 나라 국민의 털의 수를 조사한 결과, 한 사람당 털의 수는 평균이 9920, 표준편차가 1600인 정규분포를 따른다고 한다. 이 때, 털이 12000가닥 이상이면 '털이 많다'라 하고, 그 미만이면 '털이 적다.'라 할 때, 털이 많은 사람 중 $\frac{3}{10}$이 여성이다.

이 나라의 10000명의 국민 중 털이 많은 여성의 수를 X라 할 때, 확률변수 X의 기댓값 $E(X)$의 값은?

(단, $P(0 \le Z \le 1.3) = 0.4$로 계산한다.) [3점]

① 300 ② 400 ③ 500
④ 600 ⑤ 900

8. 다음 그림과 같이 지름의 길이가 2인 반원이 있다. 점 P가 점 A를 출발하여 호 $\widehat{AB}$를 따라 점 B를 향해 매초 2의 속도로 움직이고 있다. 반원 밖의 점 X와 Y에 대하여 $\triangle APX$와 $\triangle BPY$가 정삼각형이 되도록 할 때, 이 두 정삼각형과 반원이 겹치는 부분을 제외한 부분의 넓이를 S라 하자. $\overline{AP} = 1$ 일 때 S의 시간에 대한 변화율은? [3점]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

9. $A \neq O$, $B \neq O$, $AB = O$인 이차 정사각행렬 A, B가 있다. 임의의 행렬 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $X' = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ ac & ad \end{pmatrix}$라 할 때, 다음 <보기>에서 항상 영행렬인 행렬을 모두 고른 것은?

(단, n은 $n \geq 2$인 자연수이다) [3점]

<보 기>

ㄱ. $A'B$ ㄴ. AB'

ㄷ. $(A'B)^n$ ㄹ. $(BA')^n$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄹ

④ ㄴ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

10. 다음은 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 n항까지의 합 을 S_n이라 하고, 자연수 k에 대하여 $T_n = S_{kn}$라 할 때

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{T_j}{S_k} = \sum_{m=0}^{n-1} (n-m) r^{km} \ - - - \ (\bigstar)$$

이 성립함을 수학적 귀납법을 이용해 보인 것이다.

(단, $a_1 \neq 0, r \neq \pm 1, 0$)

[4점]

<증명>

(ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)$= \dfrac{T_1}{S_k} = \dfrac{S_k}{S_k} = 1$

(우변)$=1$

이므로 ($\bigstar$)이 성립한다.

(ⅱ) $n=N$일 때, ($\bigstar$)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{T_j}{S_k} = \sum_{m=0}^{N-1} (N-m) r^{km}$$

이다. $n = N+1$일 때, ($\bigstar$)이 성립함을 보이자.

$$\sum_{j=1}^{N+1} \frac{T_j}{S_k} = \sum_{m=0}^{N-1} (N-m) r^{km} + \frac{T_{N+1}}{S_k}$$

먼저, $T_{N+1} - T_N = S_{(N+1)k} - S_{Nk} = f(N) \cdot S_k$

$T_N - T_{N-1} = S_{Nk} - S_{(N-1)k} = f(N-1) \cdot S_k$

$\vdots$

$T_2 - T_1 = S_{2k} - S_k = f(1) \cdot S_k$

이므로, $T_{N+1} = g(N) \cdot S_k$이다.

$$\therefore \sum_{j=1}^{N+1} \frac{T_j}{S_k} = \sum_{m=0}^{N} (N+1-m) r^{km}$$

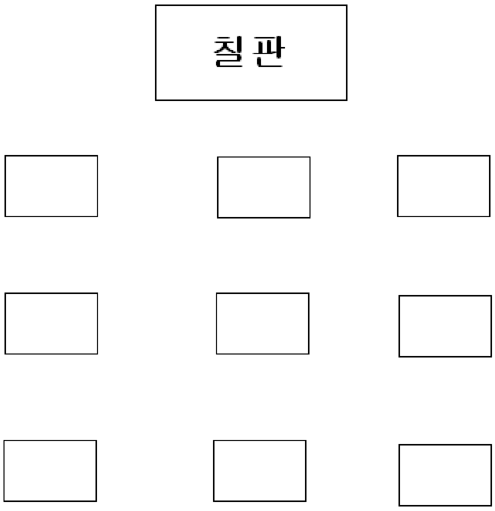
그러므로 $n = N+1$일 때도 ($\bigstar$)이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 ($\bigstar$)이 성립한다.

여기서 $r=2, k=2$ 일 때, $f(2) \cdot g(2)$의 값은?

① 80 ② 120 ③ 160 ④ 240 ⑤ 336

11. 다음은 어느 교실의 책상 배치도이다.



앉은 키가 서로 다른 9명의 학생이 한 책상에 한명씩 앉을 때, 같은 줄에서 앞 사람의 앉은키는 항상 뒷사람의 앉은키보다 작아야 한다고 한다. 이 때, 9명의 학생 모두가 책상에 앉는 방법의 수는? (단, 칠판에 가까울수록 앞쪽이다.) [3점]

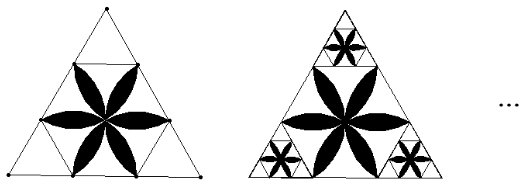
① 560 ② 840 ③ 1120
④ 1680 ⑤ 2240

12. 아래와 같이 한 변의 길이가 3인 정삼각형의 각 변의 삼등분점을 연결해 만든 정육각형의 6개의 꼭짓점을 중심으로 하고 정육각형의 한 변의 길이를 반지름으로 하는 삼분원 6개를 그렸을 때, 겹치는 부분을 색칠한 도형을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 합동인 3개의 정삼각형의 각 변의 삼등분점을 연결해 만든 각각의 정육각형의 6개의 꼭짓점을 중심으로 하고 정육각형의 한 변의 길이를 반지름으로 하는 삼분원 18개를 그렸을 때, 겹치는 부분을 색칠한 도형을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 합동인 9개의 정삼각형의 각 변의 삼등분점을 연결해 만든 각각의 정육각형의 6개의 꼭짓점을 중심으로 하고 정육각형의 한 변의 길이를 반지름으로 하는 삼분원 54개를 그렸을 때, 겹치는 부분을 색칠한 도형을 R_3라 하자.

이러한 과정을 n번 반복하여 얻은 도형을 R_n이라고 할 때, R_n의 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라고 하자. 이 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



R_1 R_2

① $3(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2})$ ② $3(\pi-2\sqrt{3})$ ③ $6(\pi-\sqrt{3})$
④ $6(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2})$ ⑤ $6(\pi-2\sqrt{3})$

13. 수능 시험장에서 학생의 잠재력이 폭발할 확률 P는 다음 공식을 따른다고 한다.

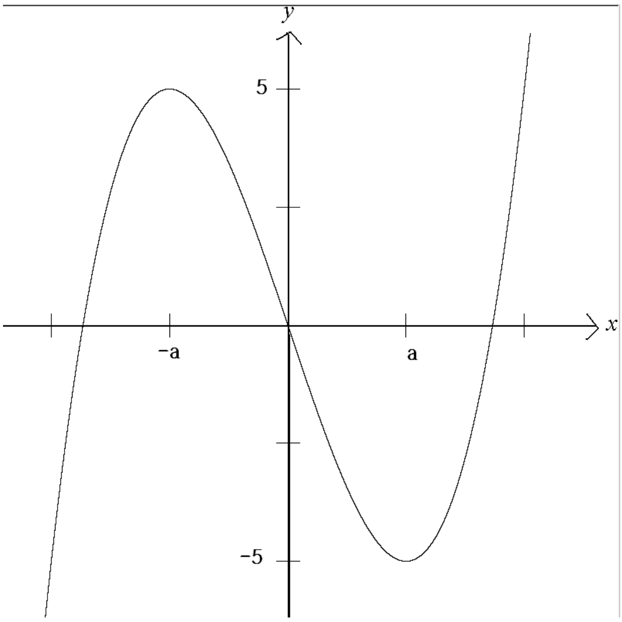
$$P = A^{-\frac{3}{10}} B^2 C^{\frac{3}{5}}\ \%$$

A는 9월 평가원 시험에서의 언어 석차등급, B는 9월 평가원 시험에서의 수리 석차등급, C는 9월 평가원 시험의 외국어 석차등급이라고 한다.

나얼이의 9월 평가원 성적은 언어 영역 2등급, 수리 영역 9등급, 외국어 영역 2등급이고, 창익이의 9월 평가원 성적은 언어 영역 1등급, 수리 영역 1등급 외국어 영역 3등급 이라고 한다.
나얼이가 수능 시험장에서 잠재력이 폭발할 확률은 창익이가 잠재력이 폭발할 확률의 몇 배인가? (단, $\log 2 = 0.3$, $\log 3 = 0.5$로 계산한다.) [3점]

① $10^{1.49}$배 ② $10^{1.59}$배 ③ $10^{1.69}$배 ④ $10^{1.79}$배 ⑤ $10^{1.89}$배

14. 극대점의 좌표가 $(-a, 5)$이고, 극소점의 좌표가 $(a, -5)$인 삼차함수 $f(x)$의 그래프가 다음과 같다. [3점]



방정식 $|f(x)| = 2 + \sqrt{t - f(x)}$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, $\lim_{t \to 4+0} g(t) + g(4)$의 값은? [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

by Yoonaul

15. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x-1 & (x\le -1) \\ x^2 & (-1<x<1) \\ x-2 & (1\le x<2) \\ -x+3 & (x\ge 2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f_1(x)=\dfrac{f(x)+|f(x)|}{2}$, $f_2(x)=\dfrac{f(x)-|f(x)|}{2}$ 라 할 때, 다음 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

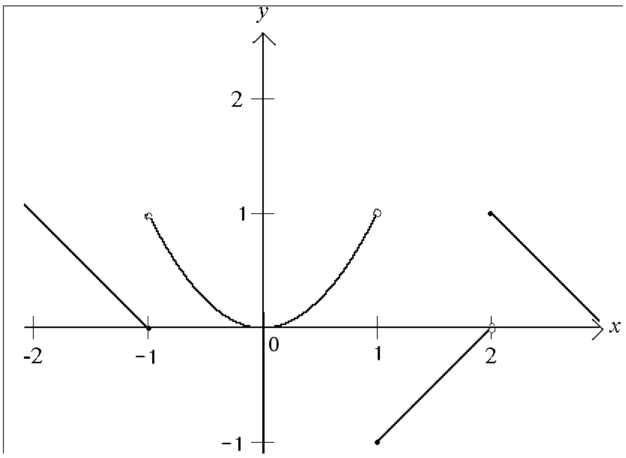
<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 1}(f_2\circ f)(x)=0$

ㄴ. 함수 $f(x)\cdot\{f(x)+a\}$가 실수 전체에서 연속이 되게 하는 실수 a가 존재한다.

ㄷ. $a_{ij}=f_i(j)\ (i=1,2,\ j=1,2)$인 이차 정사각행렬 A에 대하여, $A^n=E$이 되는 자연수 n이 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



16. 실수 전체에서 미분 가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 t에 대하여

$$\int_{2a}^{4a}\frac{f(tx)}{x}dx=kt \quad (a>0\ ,\ k\text{는 } 0\text{이 아닌 상수})$$

를 만족한다. 이 때 k값을 알맞게 구한 것은? [3점]

① $af(a)$ ② $af'(0)$ ③ $2af(0)$ ④ $2af'(0)$ ⑤ $4af'(0)$

17. 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

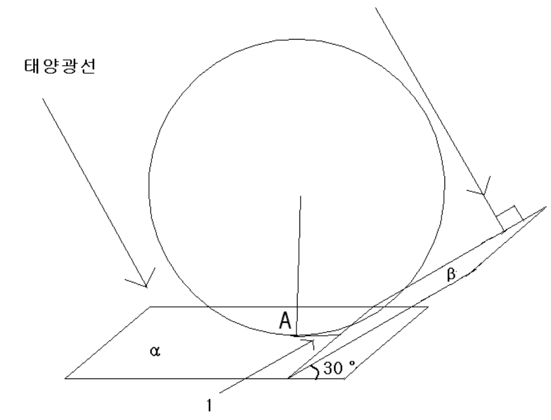
<조건>
• $-2 \le x \le 2$에서 정의된다.
• 함수 $f(x)$는 이차함수이고, $f'(x)+f'(-x)=0$이다.
• $f(2)=0$

다음 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>
ㄱ. $-2 \le p \le 0$인 p에 대하여, 함수 $g(p)=P(p \le X \le 0)$라 정의 할 때, 함수 $g(p)$는 감소함수이다.
ㄴ. $0<\lvert k\rvert \le 2$인 모든 k에 대하여 $P(X=0)>P(X=k)$이다.
ㄷ. $-2 \le p \le 1$인 p에 대하여, 함수 $h(p)=P(p \le x \le p+1)$라 할 때, 함수 $h(p)$는 극댓값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 그림과 같이 사잇각이 30°인 평면 α와 β가 있다. 평면 α와 β의 교선과의 거리가 1인 점 A가 있다. 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 구 S가 평면 α와 점 A에서 접한다. 이 때, 구 S에 평면 β에 수직인 방향으로 태양광선이 비출 때, 평면 α와 β에 생기는 구 S의 그림자의 넓이는? [4점]



① $(\sqrt{3}+1)\pi$ ② $(\sqrt{3}+\frac{3}{2})\pi$ ③ $(\frac{3\sqrt{3}}{2}+1)\pi$
④ $(\frac{3\sqrt{3}+3}{2})\pi$ ⑤ $(\frac{3\sqrt{3}}{2}+2)\pi$

by Yoonaul

19. 좌표공간에 평면 $\alpha : x+\sqrt{3}y-2z=0$이 있고, 이 평면 위에 직선 $l : x-2=-\dfrac{y}{\sqrt{3}}=1-z$가 놓여있다. 점 $A(2,0,6)$에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 직선 l위의 임의의 점 P에 대하여 $\overline{PH}$의 최솟값은? [4점]

① $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{30}}{2}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $\dfrac{6\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\dfrac{4\sqrt{10}}{3}$

20. 자연수 $n(n \geq 2)$에 대하여 곡선 $y=|\log_2 x-n|+n$과 $y=n$이 만나는 점을 (a_n, b_n)이라 하고, 곡선 $y=2^x$와 만나는 점을 (c_n, d_n)이라 할 때, 다음 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

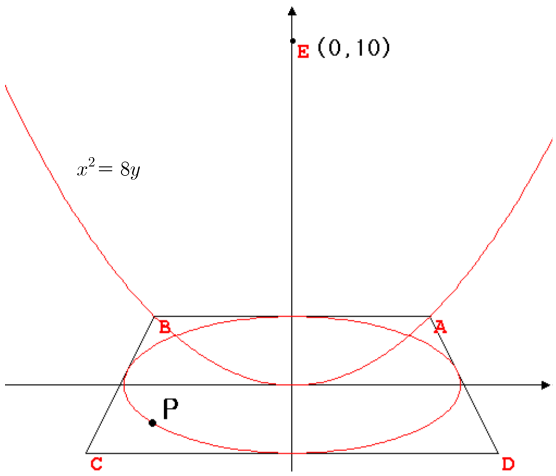
ㄱ. $1<c_2<2$

ㄴ. $f(n)=\dfrac{d_n-n}{c_n-a_n}$이라 할 때, $-1<f(n)<0$이다.

ㄷ. $2-\dfrac{\log_2 n}{n}<\dfrac{d_n}{n}<2$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 그림과 같이 좌표평면에 포물선 $x^2=8y$가 잇다. 이 포물선과 $y=2$의 교점을 A, B라 하고, 포물선의 준선 위의 두 점 C, D를 사각형 $ABCD$가 등변사다리꼴이 되도록 잡고, 이 사각형에 내접하는 타원 C를 그린다. 선분 AD의 연장선을 그렸을 때, y축과의 교점이 E라고 한다. 타원 C 위의 임의의 점 P에 대하여, 내적 $\overrightarrow{AD}\circ\overrightarrow{AP}$의 값이 최소가 되는 점 P를 X라 할 때, 점 X에서 타원 C에 그은 접선의 기울기는? [4점]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ③ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{2}$

단답형(22 ~ 30)

22. 방정식 $\cos 2x+\sin x=k$가 서로 다른 두 양근만을 갖기 위한 k의 값을 α라 할 때, 16α의 값을 구하시오. [3점]

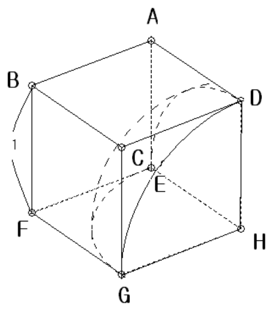
(단, $-\pi<x<\pi$)

23. 원 $x^2+y^2=4$에 내접하는 두 타원 C_1, C_2가 있다. 타원 C_1의 한 초점이 $F(\sqrt{3},0)$라고 한다. 또, 이 두 타원은 서로의 초점을 지난다고 한다. 즉, 타원 C_2는 점 F를 지난다. 이 때 두 타원의 공통접선들로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$라고 한다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 타원 C_1, C_2의 장축은 각각 x축,y축 위에 있으며, 원의 지름과 일치한다.) [3점]

(단, p와 q는 서로소이다.)

by Yoonaul

24. 다음 그림은 한 모서리의 길이가 1인 정육면체와 점 H를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 구가 정육면체에 의해 절단된 도형을 나타낸 것이다. 이 구면의 일부 위의 임의의 점 P에 대하여 $\overline{HP}=\overline{AP}$인 $\triangle APH$가 되는 점 P의 자취의 길이가 $l\pi$라고 한다. 이 때, $32l^2$의 값을 구하시오. [3점]



25. 어떤 봉투에 음료수 A, B, C,가 각각 5개씩 들어있다. 그런데 이 봉투가 찢어져서 안에 있던 음료수 15개가 바닥에 떨어졌다. 옆에 있던 친구가 음료수 5개를 무작위로 가져갔을 때, 친구가 가져간 음료수 중 A, B, C가 모두 포함되어 있을 확률이 $\frac{q}{p}$라고 한다. $p+q$의 값을 구하시오.(단, 친구가 음료수를 가져갈 확률은 모든 음료수가 동일하고, p와 q는 서로소이다.) [3점]

26. 1의 개수가 $\left[\frac{n}{2}\right]$개 있고, 0의 개수가 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$개인 n자리의 이진법의 수 $p_{(2)}$를 십진법의 수로 나타낸 $q_{(10)}$을 8로 나눴을 때, 나머지가 7이 되도록 하는 서로 다른 $p_{(2)}$의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어, $a_4=0\,,a_8=1$이다.

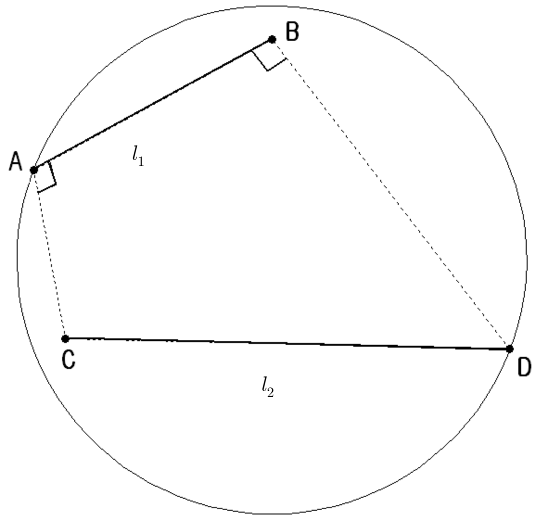
이 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+2}-a_{2n+1}}{a_{2n+1}-a_{2n}}=\alpha$라고 한다. 100α의 값을 구하시오. (단, [n]은 n보다 크지 않은 최대의 정수이고, $p_{(n)}$은 n진법의 수를 나타낸 것이다.) [4점]

27. 0이 아닌 서로 다른 두 실수 a와 b에 대해 행렬$X=\begin{pmatrix} a^2 & a \\ -b & b^2 \end{pmatrix}$이 있다. 또, 집합$S=\{(a,b)\,|\,(X+kE)$의 역행렬이 존재하지 않는다.$\}$가 있다. 이에 대하여 집합 $S\neq\varnothing$이 되도록 하는 최대의 k값을 α라 하자. 160α의 값을 구하시오. (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

28. 그림과 같이 반지름의 길이가 3인 구와 직선 l_1이 만나는 두 점을 A, B라 하고, 직선 l_2와 만나는 두 점을 C, D라 하자. 또, 직선 l_1과 평행하고 점 C를 지나는 직선을 l_3라 하고, 직선 l_2와 l_3를 포함하는 평면을 α라 할 때, 다음을 만족한다.

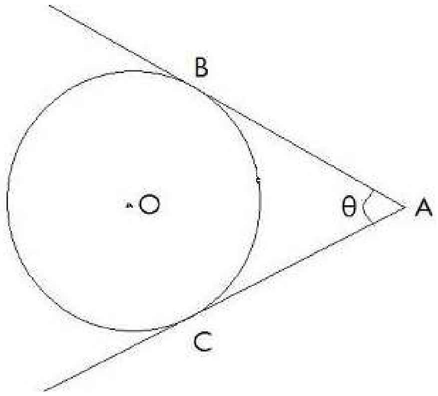
- $\overline{CA}\perp l_1$, $\overline{DB}\perp l_1$
- $\overline{AD}=6$, $\overline{AB}=2\sqrt{3}$, $\overline{CD}=\sqrt{30}$

이 때, $\triangle BCD$를 포함하는 평면과 평면 α가 이루는 각을 θ라 할 때, $60\tan^2\theta$의 값을 구하시오. [4점]



29. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 O가 있다. 원 밖의 점 A에서 원 O에 그은 두 접선이 이루는 각을 θ라 하고, 원O와 두 접선이 만나는 두 점을 B, C라 한다. 이 때, 두 접선과 호 $\overset{\frown}{BC}$에 모두 접하는 원의 반지름을 $r(\theta)$라고 할 때, $\lim_{\theta \to \pi - 0} \frac{r(\theta)}{(\pi-\theta)^2} = \frac{q}{p}$ 이다. $10p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소이다.) [4점]



30. 최고차항의 계수가 2이고, $f(0)=-2$, $f''(-1)<0$인 사차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수 $g_t(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g_t(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ [t,x]\ni k\text{인 실수 } k\text{에 대하여 } f(k)\text{의 최댓값} & (x \geq t) \end{cases}$$

또, 집합 $S=\{a \mid$ 함수 $g_t(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.$\}$의 원소의 개수를 $h(t)$라 할 때, 함수 $h(t)$는 $t=-2$와 $t=1$일 때에만 불연속이다. $f(-3)$의 값을 구하시오. [4점]

＊ 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.