고지우의 난문현답

제 1 일

1. 2017년 9월 평가원
2. 2015년 수능
3. 2014년 6월 평가원
4. 2014년 사관학교
5. 2013년 6월 평가원
6. 2010년 10월 교육청
7. 2011년 수능
8. 2015년 7월 교육청
9. 2009년 6월 평가원
10. 2009년 경찰대

1. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족한다.

(가) $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = x^2 e^{-x^2}$

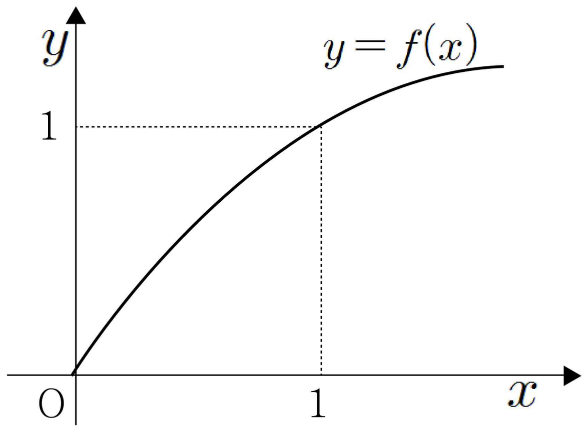
(나) $g(x) = \dfrac{4}{e^4}\displaystyle\int_1^x e^{t^2} f(t)dt$

$f(1) = \dfrac{1}{e}$일 때, $f(2) - g(2)$의 값은?

① $\dfrac{16}{3e^4}$ ② $\dfrac{6}{e^4}$ ③ $\dfrac{20}{3e^4}$

④ $\dfrac{22}{3e^4}$ ⑤ $\dfrac{8}{e^4}$

2. 다음은 연속함수 $y = f(x)$의 그래프이다.



구간 $[0, 1]$에서 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 연속일 때, 극한값 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$와 같은 값을 갖는 것은?

① $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$

② $\displaystyle\int_0^1 xg(x)dx$

③ $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$

④ $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx$

⑤ $\displaystyle\int_0^1 \{f(x) - g(x)\}dx$

3. 함수 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$에 대하여

$$\mathrm{F}(x)=\int_0^x tf(x-t)dt\,(x \geq 0)$$

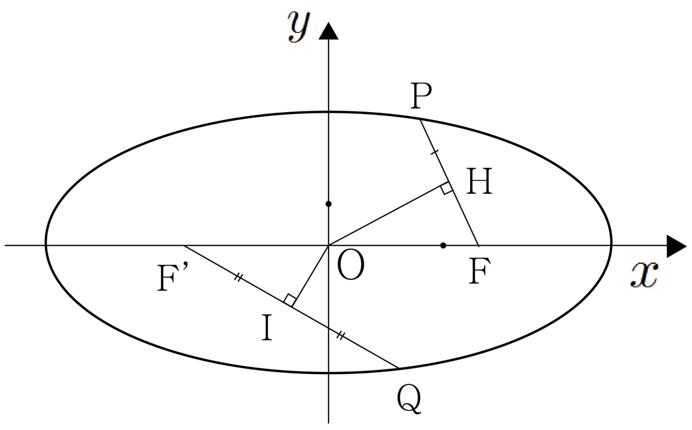
일 때, $\mathrm{F}'(\mathrm{a})=\ln 10$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오.

4. 함수 $f(x)=x\sin x$에 대하여 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

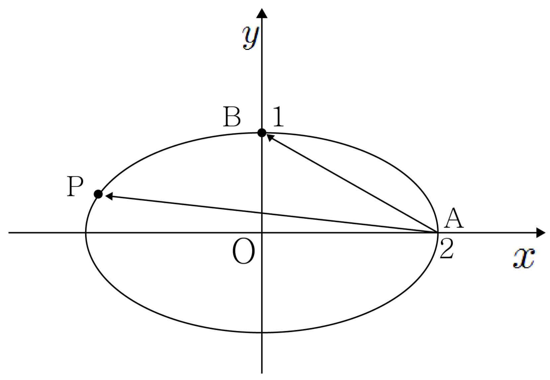
ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.
ㄴ. 직선 $y=x$는 곡선 $y=f(x)$에 접한다.
ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 갖는 a가 구간 $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{4}\pi\right)$에 존재한다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

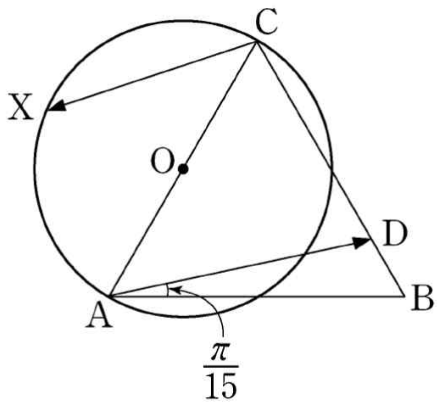
5. 두 점 $F(5, 0)$, $F'(-5, 0)$을 초점으로 하는 타원 위의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 원점 O에서 선분 PF와 선분 QF′에 내린 수선의 발을 각각 H와 I라 하자. 점 H와 점 I가 각각 선분 PF와 선분 QF′의 중점이고 $\overline{OH} \times \overline{OI} = 10$일 때, 이 타원의 장축의 길이를 l이라 하자. l^2의 값을 구하시오. (단, $\overline{OH} \neq \overline{OI}$)



6. 두 점 $A(2, 0)$, $B(0, 1)$와 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}$가 최대가 되는 점 P에서의 접선의 방정식은 $y = ax + b$이다. $a^2 + b^2$의 값을 구하시오.



7. 그림과 같이 평면 위에 정삼각형 ABC와 선분 AC를 지름으로 하는 원 O가 있다. 선분 BC 위의 점 D를 $\angle DAB = \frac{\pi}{15}$가 되도록 정한다. 점 X가 원 O 위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CX}$의 내적 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CX}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 X를 점 P라 하자. $\angle ACP = \frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



8. 검은 바둑돌 ● 과 흰 바둑돌 ○을 일렬로 나열하였을 때 이웃한 두 개의 바둑돌의 색이 나타낼 수 있는 유형은 다음과 같이 4가지이다.

	●●	●○	○●	○○
	< A형 >	< B형 >	< C형 >	< D형 >

예를 들어, 6개의 바둑돌을 <A형> 2번, <B형> 1번, <C형> 1번, <D형> 1번 나타나도록 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는 아래과 같이 5이다.

●●○○●●
○●●●○○
○○●●●○
●●●○○●
●○○●●●

10개의 바둑돌을 <A형> 4번, <B형> 2번, <C형> 2번, <D형> 1번 나타나도록 일렬로 나열하는 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 검은 바둑돌과 흰 바둑돌은 각각 10개 이상씩 있다.)

9. A, B 두 사람이 하루에 한 번씩 탁구 경기를 하기로 하였다. 첫 경기부터 A가 이긴 횟수가 B가 이긴 횟수보다 항상 많거나 같도록 유지되면서 경기가 진행될 때, 처음 7일 동안 경기를 치른 결과, A가 네 번 이기고 B가 세 번 이기는 경우의 수를 구하시오.

10. 10보다 큰 자연수 n에 대하여 집합 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$의 두 부분집합 X와 Y를 택할 때, $n(\mathrm{X} \cap \mathrm{Y}) = 1$인 경우의 수는?
(단, $n(\mathrm{A})$는 집합 A의 원소의 개수)

① $\sum_{k=1}^{n} {}_{n}\mathrm{C}_{k} 2^{n-k}$

② $\sum_{k=1}^{n} {}_{n}\mathrm{C}_{k} 2^{n-k-1}$

③ $\sum_{k=1}^{n} n \cdot {}_{n}\mathrm{C}_{k} 2^{n-k}$

④ $\sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_{n}\mathrm{C}_{k} 2^{n-k-1}$

⑤ $\sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_{n}\mathrm{C}_{k} 2^{n-k}$

추가 과제

1. $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} \int_{1}^{\sqrt{x}} e^{t^2} dt$의 값을 구하여라.

2. 정적분 $\int_{0}^{\ln 2} x^2 e^x dx$의 값을 구하면?

① $2(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 2$
② $2(\ln 2)^2 - 4\ln 2$
③ $(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 2$
④ $(\ln 2)^2 - 4\ln 2$
⑤ $(\ln 2)^2 - 4\ln 2 - 2$

3. 정적분을 이용하여 $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} \sqrt{n^2 - k^2}$ 의 값을 구하여라.

4. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$의 값을 구하여라.

5. 함수 $f(x)=3^x$일 때, 정적분

$$\int_0^1 \{f(x)+f(2-x)\}dx$$

의 값을 구하여라.

6. 정적분 $\int_{-2}^{2} \frac{1}{e^x+1}dx$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

7. 함수 $f(x)=\sin x+\sin 2x\cos x$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$의 최댓값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

8. 함수 $f(x)=e^{-2x^2}$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

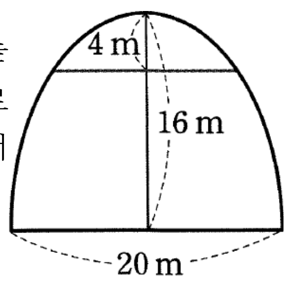
| 보 기 |

ㄱ. $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
ㄴ. 치역은 $\{y\,|\,y \le 1\}$이다.
ㄷ. $y=f(x)$의 그래프의 변곡점은 3개다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

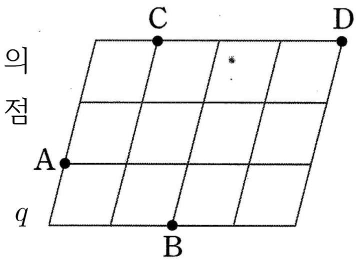
9. 타원 $3x^2+2y^2=6$의 두 초점을 F, F′이라 할 때, 타원 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{FP}}^2+\overline{\mathrm{F'P}}^2$의 최솟값을 구하여라.

10. 오른쪽 그림과 같이 폭이 20m이고 높이가 16m인 동굴의 단면은 지면을 단축으로 하는 타원의 일부와 같다고 한다. 천장에서 4m 떨어진 곳의 폭은 몇 m인가?



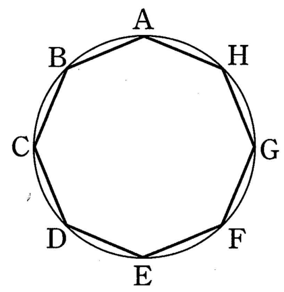
① $5\sqrt{2}$ ② 10 ③ $5\sqrt{5}$ ④ $5\sqrt{7}$ ⑤ 15

11. 오른쪽 그림과 같이 일정한 간격의 평행선으로 이루어진 도형 위에 네 점 A, B, C, D가 있다.
$\overrightarrow{AD}=p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC}$일 때, 실수 p, q에 대하여 $p-q$의 값은?



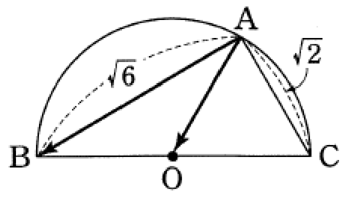
① $-\frac{1}{5}$ ② $-\frac{2}{5}$ ③ $-\frac{3}{5}$ ④ $-\frac{4}{5}$ ⑤ -1

12. 오른쪽 그림과 같이 원에 내접하는 정팔각형에서 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}|=8$일 때, 정팔각형의 넓이는?

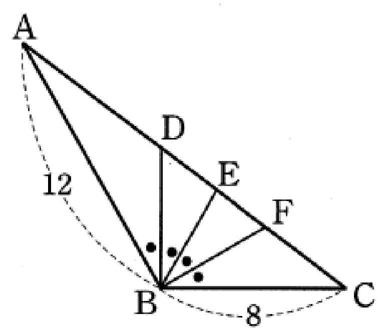


① 16 ② $16\sqrt{2}$ ③ 32 ④ $32\sqrt{2}$ ⑤ 48

13. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=\sqrt{6}$, $\overline{AC}=\sqrt{2}$인 삼각형 ABC가 선분 BC를 지름으로 하는 반원 O에 내접할 때, $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$를 구하여라.



14. 아래 그림과 같이 $\angle B=120^\circ$이고 $\overline{AB}=12$, $\overline{BC}=8$인 삼각형 ABC에서 $\angle B$의 사등분선이 $\overline{AC}$와 만나는 점을 차례대로 D, E, F라 할 때, 보기에서 그 값이 가장 큰 것과 작은 것을 차례대로 적은 것은?



보 기

ㄱ. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$	ㄴ. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BE}$
ㄷ. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BF}$	ㄹ. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BE}$

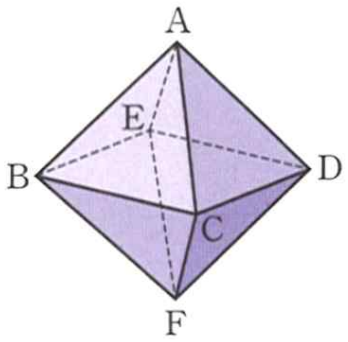
① ㄱ, ㄷ　② ㄴ, ㄱ　③ ㄴ, ㄷ
④ ㄷ, ㄹ　⑤ ㄹ, ㄱ

15. 두 집합
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여
$a\in A,\ b\in A$이고 $a<b$이면 $f(a)\le f(b)$를 만족시키는 함수
$f:A\to B$ 중에서 $f(1)f(4)=12$를 만족시키는 함수의 개수는?

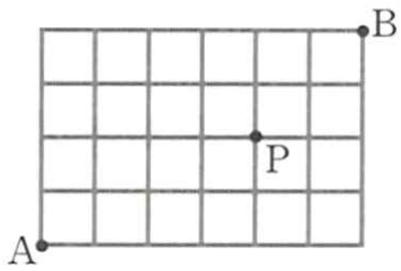
① 60　② 65　③ 70
④ 75　⑤ 80

16. 다항식 $(a+b+c)^5$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수를 구하여라.

17. 아래 그림과 같은 팔면체의 꼭짓점 A에서 출발하여 모서리를 따라 움직여 꼭짓점 F에 도착하는 방법의 수를 구하여라. (단, 한 번 지나간 꼭짓점은 다시 지나지 않는다.)



18. 아래 그림과 같은 도로망이 있다. A에서 출발하여 P를 거쳐 B까지 최단거리로 가는 방법의 수를 구하여라.



19. 원소가 6개인 집합을 4개 이상의 집합으로 분할하는 방법의 수를 구하여라.

20. 승객 6명이 타고 있는 버스가 세 정류장 A, B, C에 정차한다. 3개의 정류장 A, B, C 중에서 2개의 정류장에 모든 승객이 내리는 방법의 수를 구하여라. (단, 새로 타는 승객은 없다.)

21. 1이 아닌 양수 a, b에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

| 보 기 |

ㄱ. $a > b > 1$이면 $\log_a b < \log_b a$
ㄴ. $a > b > 1$이면 $a^b < b^a$
ㄷ. $2^a = 3^b$이면 $a > b$
ㄹ. $\log_2 a = \log_3 b$이면 $a > b$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

22. $1 < x < 4$일 때,

$$A = \log_2 x^2,\ B = (\log_2 x)^2,\ C = \log_2(\log_2 x)$$

의 대소 관계는?

① $A > B > C$ ② $B > A > C$
③ $B > C > A$ ④ $C > A > B$
⑤ $C > B > A$

23. 다음 식의 값을 구하여라.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$$
$$+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{6}\right)$$

24. $0 < x < \frac{\pi}{4}$, $0 < y < \frac{\pi}{4}$일 때, 두 식

$$A = x\sin y + y\sin x,\ B = x\cos x + y\cos y$$

의 대소를 비교하여라. (단, $x \neq y$)

25. 함수 $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$ 의 극댓값은? (단, $x>0$)

① 0 ② $\sqrt{2}-1$ ③ $\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}-2$ ⑤ $2\sqrt{2}$

26. 함수 $f(x)=x(\ln x)^2$ 의 극댓값과 극솟값의 합은?

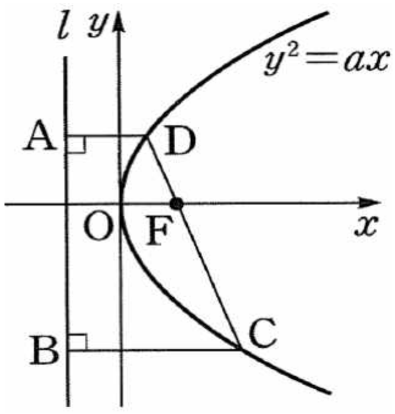
① $\frac{2}{e^2}$ ② $\frac{4}{e^2}$ ③ $\frac{1}{e}$
④ 1 ⑤ e

27. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2+3\sin x+x$ 의 그래프가 변곡점을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

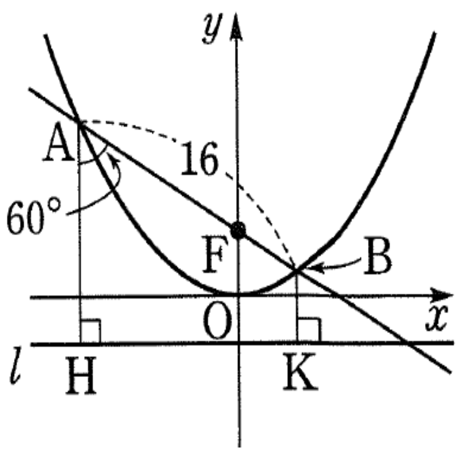
① $-6<a<-3$ ② $-6\le a\le -3$ ③ $-3<a<3$
④ $-3\le a\le 3$ ⑤ $3<a<6$

28. 함수 $f(x)=x^5+ax^2+bx+c$ 의 변곡점의 개수를 구하여라. (단, a, b, c 는 실수이다.)

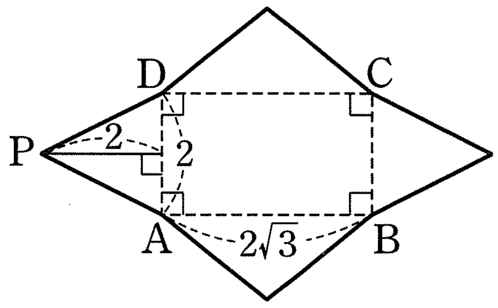
29. 아래쪽 그림의 포물선 $y^2=ax$에서 점 F는 초점이고 직선 l은 준선이다. 사다리꼴 ABCD의 넓이가 $192\sqrt{2}$이고 $\overline{\mathrm{DF}}:\overline{\mathrm{CF}}=1:2$일 때, 선분 CD의 길이를 구하여라. (단, $a>0$)



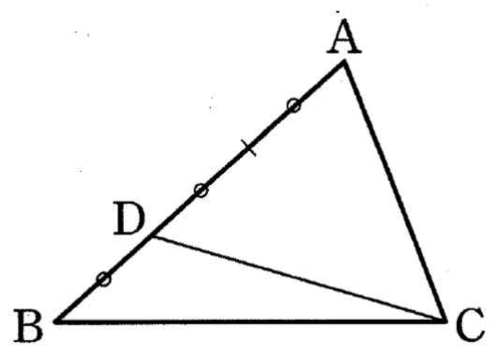
30. 아래쪽 그림과 같이 포물선의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 두 점 A, B에서 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 H, K라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=16$, $\angle\mathrm{FAH}=60°$일 때, $\overline{\mathrm{BK}}$의 길이를 구하여라.



31. 아래쪽 그림과 같은 전개도를 접어서 사각뿔을 만들려고 한다. $\overline{AB}=2\sqrt{3}$, $\overline{AD}=2$이고 삼각형 PAD의 높이가 2일 때, 이 사각뿔에서 옆면 PAB와 밑면 $ABCD$가 이루는 각의 크기를 구하여라.



32. 아래쪽 그림과 같이 삼각형 ABC에서 변 AB를 삼등분하는 점 중에서 점 B와 가까운 점을 D라 하고, 선분 CD를 접는 선으로 하여 꼭짓점 A의 평면 BCD 위로의 정사영이 선분 BC를 삼등분하는 점 중 꼭짓점 C와 가까운 점이 되도록 접을 때, $\triangle ADC$와 $\triangle BCD$가 이루는 각의 크기를 θ라 하자. 이때 $\cos\theta$의 값을 구하여라.



33. 평면 $2x+y-z=1$위의 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC가 있다. 정삼각형 ABC의 평면 $x-2y-z=2$ 위로의 정사영의 넓이를 구하여라.

34. 두 구 $x^2+y^2+(z-1)^2=4$, $x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1$이 만날 때 생기는 원을 포함하는 평면을 α라 하자. 평면 α와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 구하여라.

35. 7개의 문자 A, A, A, B, B, C, D를 일렬로 나열할 때, C와 D가 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수는?

① 60　② 80　③ 120
④ 200　⑤ 300

36. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하여라.

(가) $f(3)$의 값은 홀수이다.
(나) $x<3$이면 $f(x)>f(3)$이다.
(다) $x>3$이면 $f(x)<f(3)$이다.

37. $\left(x+\dfrac{1}{x^n}\right)^{10}$ 의 전개식에서 상수항이 존재하도록 하는 자연수 n의 최댓값을 구하여라.

38. $(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^{10}$ 의 전개식에서 x의 계수는?

① 11 ② 22 ③ 33
④ 44 ⑤ 55

39. 빨간 공 3개와 노란 공 4개가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 색깔을 확인하고 다시 집어넣는 것을 1회 시행이라 하자. 빨간 공이 나오면 1점, 노란 공이 나오면 2점을 얻을 때, 5회의 시행에서 7점을 얻을 확률은?

① ${}_5\mathrm{C}_1\left(\dfrac{3}{7}\right)\left(\dfrac{4}{7}\right)^4$ ② ${}_5\mathrm{C}_2\left(\dfrac{3}{7}\right)^2\left(\dfrac{4}{7}\right)^3$ ③ ${}_5\mathrm{C}_3\left(\dfrac{3}{7}\right)^3\left(\dfrac{4}{7}\right)^2$
④ ${}_5\mathrm{C}_4\left(\dfrac{3}{7}\right)^4\left(\dfrac{4}{7}\right)$ ⑤ ${}_5\mathrm{C}_5\left(\dfrac{4}{7}\right)^5$

40. 3부터 10까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 8개의 공이 들어있는 상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 소수가 적힌 공이면 동전을 3번, 짝수가 적힌 공이면 동전을 4번 던진다. 이때 동전의 앞면이 3번 나올 확률을 구하여라.

정답 & 해설

[난문현답 기출 정답]

1. ③
2. ③
3. 10
4. ⑤
5. 180
6. 21
7. 17
8. 45
9. 14
10. ⑤

[추가 과제 해설]

1) **정답** $\frac{e}{2}$

$f(t)=e^{t^2}$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{\sqrt{x}}e^{t^2}dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{\sqrt{x}}f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(\sqrt{x})-F(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(\sqrt{x})-F(1)}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$
$$=\frac{1}{2}F'(1)$$
$$=\frac{1}{2}f(1)=\frac{e}{2}$$

2) **정답** ①

$f(x)=x^2$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$$f'(x)=2x,\ g(x)=e^x$$
$$\therefore \int_0^{\ln 2}x^2e^xdx=\Big[x^2e^x\Big]_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2}2xe^xdx$$
$$=2(\ln 2)^2-2\int_0^{\ln 2}xe^xdx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^{\ln x}xe^x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$$u'(x)=1,\ v(x)=e^x$$
$$\therefore \int_0^{\ln 2}xe^xdx=\Big[xe^x\Big]_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2}e^xdx=2\ln 2-\Big[e^x\Big]_0^{\ln 2}$$
$$=2\ln 2-(2-1)=2\ln 2-1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{\ln 2}x^2e^xdx=2(\ln 2)^2-2(2\ln 2-1)$$
$$=2(\ln 2)^2-4\ln 2+2$$

3) **정답** $\frac{\pi}{4}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}\sqrt{n^2-k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$
$$=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$$

이때 $x=\sin\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$$

또한 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta$$
$$=\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

4) **정답** 2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$
$$=\int_0^1x^{-\frac{1}{2}}\,dx=\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_0^1=2$$

5) **정답** $\frac{8}{\ln3}$

$$\int_0^1\{f(x)+f(2-x)\}\,dx=\int_0^1f(x)\,dx+\int_0^1f(2-x)\,dx$$

$\int_0^1f(2-x)\,dx$ **에서** $2-x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-1$

또한 $x=0$일 때 $t=2$, $x=1$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^1f(2-x)\,dx=\int_2^1f(t)\cdot(-1)\,dt=\int_1^2f(t)\,dt$$
$$\therefore \int_0^1f(x)dx+\int_0^1f(2-x)\,dx=\int_0^1f(x)dx-\int_1^2f(t)dt$$
$$=\int_0^1f(x)dx+\int_1^2f(x)dx$$
$$=\int_0^2f(x)dx=\int_0^2 3^xdx$$
$$=\left[\frac{3^x}{\ln3}\right]_0^2=\frac{9}{\ln3}-\frac{1}{\ln3}$$
$$=\frac{8}{\ln3}$$

6) **정답** ②

$e^t=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$

또한 $x=-2$일 때 $t=e^{-2}$, $x=2$일 때 $t=e^2$이므로

$$\int_{-2}^{2}\frac{1}{e^x+1}dx=\int_{-2}^{2}\frac{e^x}{e^x(e^x+1)}dx$$
$$=\int_{e^{-2}}^{e^2}\frac{1}{t(t+1)}dt$$
$$=\int_{e^{-2}}^{e^2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$=\Big[\ln|t|-\ln|t+1|\Big]_{e^{-2}}^{e^2}$$
$$=\{2-\ln(e^2+1)\}-\{-2-\ln(e^{-2}+1)\}$$
$$=2-\ln(e^2+1)+2+\ln\frac{e^2+1}{e^2}$$
$$=4+\ln\frac{e^2+1}{e^2(e^2+1)}=4+(-2)$$
$$=2$$

7) 정답 ④

$f'(x)=\cos x+2\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x$

$=\cos x+2\cos 2x\cos x-2\sin x\cos x\sin x$

$=\cos x\left(1+2\cos 2x-2\sin^2 x\right)$

$=3\cos x\cos 2x$

$f'(x)=0$ 에서 $\cos x=0$ 또는 $\cos 2x=0$

$\therefore\ x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ $\left(\because\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt{2}$	↘	1

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ 이다.

8) 정답 ①

$f'(x)=-4xe^{-2x^2}$

$f''(x)=-4e^{-2x^2}+(-4x)\cdot(-4xe^{-2x^2})$

$=4e^{-2x^2}(4x^2-1)$

$=4e^{-2x^2}(2x+1)(2x-1)$

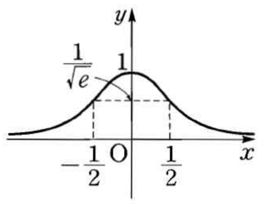
$f'(x)=0$ 에서 $x=0$

$f''(x)=0$ 에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘

또 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-2x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-2x^2}=0$ 이므로

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=e^{-2(-x)^2}=e^{-2x^2}=f(x)$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 치역은 $\{y|0<y\le 1\}$이다.

ㄷ. 변곡점은 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$의 2개이다.

이상에서 보기 중 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

9) 답 6

[해설] $3x^2+2y^2=6$, 즉 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$에서 $\overline{\mathrm{FP}}=a$, $\overline{\mathrm{F'P}}=b$라 하면

타원의 정의에 의하여

$a+b=2\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{FP}}^2+\overline{\mathrm{F'P}}^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=12-2ab$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\sqrt{3}\ge\sqrt{ab}$ $\quad\therefore\ ab\le 3$

$\therefore\ \overline{\mathrm{FP}}^2+\overline{\mathrm{F'P}}^2=12-2ab\ge 12-2\cdot 3=6$

따라서 $\overline{\mathrm{FP}}^2+\overline{\mathrm{F'P}}^2$의 최솟값은 6이다.

10) 답 ④

[해설] 주어진 타원의 장축의 길이가 32m, 단축의 길이가 20m이므로

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{16^2}=1$이라 할 수 있다.

구하는 폭은 $y=12$와 타원 $\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{16^2}=1$의 교점 사이의 거리와

같으므로 $\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{16^2}=1$에서

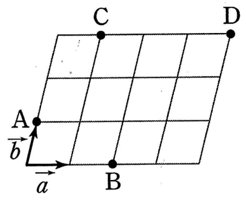
$x^2=\frac{7}{16}\cdot 10^2$ $\quad\therefore\ x=\pm\frac{5\sqrt{7}}{2}$

따라서 구하는 폭은

$\frac{5\sqrt{7}}{2}\cdot 2=5\sqrt{7}(\mathrm{m})$

11) 답 ②

[해설] 오른쪽 그림과 같이 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 정하면



$\overrightarrow{AB}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+2\vec{b}$

$\overrightarrow{AD}=4\vec{a}+2\vec{b}$

$\overrightarrow{AD}=p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC}$에서

$4\vec{a}+2\vec{b}=p(2\vec{a}-\vec{b})+q(\vec{a}+2\vec{b})$

$=(2p+q)\vec{a}+(-p+2q)\vec{b}$

따라서 $2p+q=4$, $-p+2q=2$이므로

$p=\frac{6}{5}$, $q=\frac{8}{5}$

$\therefore p-q=-\frac{2}{5}$

12) 답 ④

[해설] 정팔각형의 외접원의 중심을 O라 하면

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA})$

$=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OF})-2\overrightarrow{OA}$

$=-2\overrightarrow{OA}$

즉 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}|=|-2\overrightarrow{OA}|=2|\overrightarrow{OA}|=8$이므로

$|\overrightarrow{OA}|=4$

따라서 구하는 팔각형의 넓이는 두 변의 길이가 4이고 그 끼인 각의

크기가 $\frac{360^\circ}{8}=45^\circ$인 삼각형의 넓이의 8배이므로

$8\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot\sin 45^\circ=8\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=32\sqrt{2}$

13) 답 3

[해설] 반원에 대한 원주각의 크기는 90°이므로

$\angle BAC=90^\circ$

즉 $\triangle ABC$는 직각삼각형이므로

$\overline{BC}=\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$

따라서 $\overline{OB}=\overline{OA}=\overline{OC}=\overline{AC}=\sqrt{2}$에서 $\triangle OCA$는 정삼각형이므로

$\angle OAB=90^\circ-60^\circ=30^\circ$

$\therefore\ \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AB}|\cos 30^\circ$

$=\sqrt{2}\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$

14) 답 ②

[해설] $\angle B=120^\circ$이므로

$\angle ABD=\angle DBE=\angle EBF=\angle FBC=30^\circ$

ㄱ. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos 120^\circ$

$12\times 8\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-48$

ㄴ. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BE}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BE}|\cos 60^\circ$

$=12\times|\overrightarrow{BE}|\times\frac{1}{2}=6|\overrightarrow{BE}|$

ㄷ. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BF}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BF}|\cos 90^\circ=0$

ㄹ. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BE}=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BE}|\cos 60^\circ$

$=8\times|\overrightarrow{BE}|\times\frac{1}{2}=4|\overrightarrow{BE}|$

이상에서 그 값이 가장 큰 것은 ㄴ, 가장 작은 것은 ㄱ이다.

15) 정답 ④

(ⅰ) $f(1)=2$, $f(4)=6$인 경우

$f(2)$와 $f(3)$의 값이 될 수 있는 수는

2 또는 3 또는 4 또는 5 또는 6

이고, $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)$이어야 하므로

2, 3, 4, 5, 6의 5개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore\ {}_5\mathrm{H}_2={}_6\mathrm{C}_2=15$

또 $f(5)$와 $f(6)$의 값이 될 수 있는 수는

6 또는 7

이고, $f(4)\le f(5)\le f(6)$이어야 하므로 6, 7의 2개에서 2개를

택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore\ {}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2=3$

따라서 $f(1)=2$, $f(4)=6$인 함수 f의 개수는

$15 \cdot 3 = 45$

(ⅱ) $f(1)=3,\ f(4)=4$인 경우

$f(2)$와 $f(3)$의 값이 될 수 있는 수는

3 또는 4

이고, $f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4)$이어야 하므로 3, 4의 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore\ {}_2H_2 = {}_3C_2 = 3$

또 $f(5)$와 $f(6)$의 값이 될 수 있는 수는

4 또는 5 또는 6 또는 7

이고 $f(4) \le f(5) \le f(6)$이어야 하므로 4, 5, 6, 7의 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore\ {}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$

따라서 $f(1)=3,\ f(4)=4$인 함수 f의 개수는

$3 \cdot 10 = 30$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수의 개수는

$45+30=75$

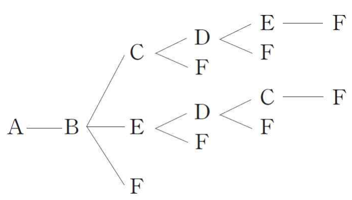
16) **정답** 21

구하는 항의 개수는 3개의 문자 $a,\ b,\ c$ 중에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$

17) **정답** 28

주어진 팔면체의 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 B로 움직인 후 꼭짓점 F에 도착하는 경우를 구해 보면 다음과 같다.



같은 방법으로 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 C 또는 D또는 E로 움직인 후 꼭짓점 F에 도착하는 경우도 각각 7가지씩이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$7 \cdot 4 = 28$

18) **정답** 81

(ⅰ) 4개의 집합으로 분할하는 경우

네 집합의 원소가 각각 1개, 1개, 1개, 3개인 경우의 수는

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = 20$$

네 집합의 원소가 각각 1개, 1개, 2개, 2개인 경우의 수는

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 45$$

이므로 $S(6,\ 4) = 20+45+65$

(ⅱ) 5개의 집합으로 분할하는 경우

다섯 집합의 원소가 각각 1개, 1개, 1개, 1개, 2개인 경우의 수는

$$S(6,\ 4) = {}_6C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{4!}$$

$$= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{24} = 15$$

(ⅲ) 6개의 집합으로 분할하는 경우

여섯 집합의 원소가 각각 1개씩이므로

$S(6,\ 6) = 1$

이상에서 구하는 방법의 수는

$65+15+1=81$

19) **정답** 81

(ⅰ) 4개의 집합으로 분할하는 경우

네 집합의 원소가 각각 1개, 1개, 1개, 3개인 경우의 수는

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = 20$$

네 집합의 원소가 각각 1개, 1개, 2개, 2개인 경우의 수는

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 45$$

이므로 $S(6,\ 4) = 20+45+65$

(ⅱ) 5개의 집합으로 분할하는 경우

다섯 집합의 원소가 각각 1개, 1개, 1개, 1개, 2개인 경우의 수는

$$S(6,\ 4) = {}_6C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{4!}$$

$$= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{24} = 15$$

(ⅲ) 6개의 집합으로 분할하는 경우

여섯 집합의 원소가 각각 1개씩이므로

$S(6,\ 6) = 1$

이상에서 구하는 방법의 수는

$65+15+1=81$

20) **정답** 186

세 정류장 A, B, C 중에서 승객이 내리는 2개의 정류장을 택하는 방법의 수는 ${}_3C_2 = 3$

6명을 2개의 조로 나눌 때, 각 조의 인원 수는

1, 5 또는 2, 4 또는 3, 3

(ⅰ) 승객을 1명, 5명으로 나누는 방법의 수는

${}_6C_1 \cdot {}_5C_5 = 6 \cdot 1 = 6$

(ⅱ) 승객을 2명, 4명으로 나누는 방법의 수는

${}_6C_2 \cdot {}_4C_4 = 15 \cdot 1 = 15$

(ⅲ) 승객을 3명, 3명으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 20 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 10$$

이상에서 승객을 2개의 조로 나누는 방법의 수는

$6+15+10=31$

2개의 조를 2개의 정류장에 분배하는 방법의 수는

$2! = 2$

따라서 구하는 방법의 수는 $3 \cdot 31 \cdot 2 = 186$

21) **정답** ②

ㄱ. $a > b > 1$이므로

$\log_a b < \log_a a = 1,\ \log_b a > \log_b b = 1$

$\therefore\ \log_a b < \log_b a$

ㄴ. [반례] $a=3,\ b=2$이면 $3^2 > 2^3$

ㄷ. $2^a = 3^b$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$a = b\log_2 3 \qquad \therefore\ \dfrac{a}{b} = \log_2 3$

이때 $\log_2 3 > 1$이므로 $\dfrac{a}{b} > 1 \quad \therefore\ a > b$

ㄹ. [반례] $a=8,\ b=27$이면 $\log_2 8 = \log_3 27 = 3$이지만 $b > a$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

22) **정답** ①

$1 < x < 4$에서 각 변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 1 < \log_2 x < \log_2 4 \qquad \therefore\ 0 < \log_2 x < 2$

(ⅰ) $A - B = \log_2 x^2 - (\log_2 x)^2$

$= 2\log_2 x - (\log_2 x)^2$

$= \log_2 x(2 - \log_2 x) > 0$

$\therefore\ A > B$

(ⅱ) $0 < \log_2 x \le 1$일 때

$0 < (\log_2 x)^2 \le 1,\ \log_2(\log_2 x) \le 0$

$\therefore\ (\log_2 x)^2 > \log_2(\log_2 x) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$1 < \log_2 x < 2$일 때

$1 < (\log_2 x)^2 < 4,\ 0 < \log_2(\log_2 x) < 1$

$\therefore\ (\log_2 x)^2 > \log_2(\log_2 x) \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $B > C$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $A > B > C$

23) **정답** $-\dfrac{1}{2}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6},\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6},$$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}$, $\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}$,

$\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}$ ●

$\therefore$ (주어진 식)

$=\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}$

$=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$ ●

24) 정답 $A<B$

$A-B=x\sin y+y\sin x-(x\cos x+y\cos y)$

$=x(\sin y-\cos x)+y(\sin x-\cos y)$

$0<x<\frac{\pi}{4}$, $0<y<\frac{\pi}{4}$ 인 모든 x, y $(x\neq y)$에 대하여

$\sin x<\cos y$, $\sin y<\cos x$

$\therefore \sin x-\cos y<0$, $\sin y-\cos x<0$

따라서 $x(\sin y-\cos x)+y(\sin x-\cos y)<0$이므로

$A-B<0$ $\therefore A<B$

25) 정답 ③

$f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$ 에서 $0<x\leq 1$이고

$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{1-x^2}=x$

양변을 제곱하여 정리하면 $x^2=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $(\because 0<x\leq 1)$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\sqrt{2}$	↘	1

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$

26) 정답 ②

$f(x)=x(\ln x)^2$에서 $x>0$이고

$f'(x)=(\ln x)^2+x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}=(\ln x+2)\ln x$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=-2$ 또는 $\ln x=0$

$\therefore x=\frac{1}{e^2}$ 또는 $x=1$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0	↗

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{4}{e^2}$, 극솟값은 $f(1)=0$이므로 극댓값과 극솟값의 합은 $\frac{4}{e^2}$이다.

27) 정답 ③

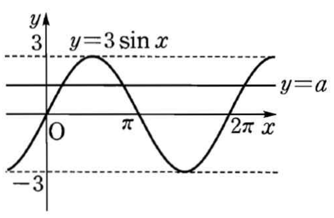
$f'(x)=ax+3\cos x+1$, $f''(x)=a-3\sin x$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖고, 그 근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$f''(x)=0$에서 $a-3\sin x=0$

$\therefore 3\sin x=a$

이 방정식이 실근을 가지려면 곡선 $y=3\sin x$와 직선 $y=a$가 만나야 하므로 오른쪽 그림에서



$-3\leq a\leq 3$

이때 $a=-3$ 또는 $a=3$이면

$f''(x)=-3(1+\sin x)$

또는 $f''(x)=3(1-\sin x)$

$\therefore f''(x)\leq 0$ 또는 $f''(x)\geq 0$

따라서 $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 변곡점이 될 수 없다.

$\therefore -3<a<3$

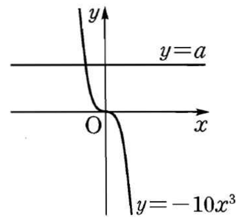
28) 정답 1

$f'(x)=5x^4+2ax+b$, $f''(x)=20x^3+2a$

$f''(x)=0$에서 $20x^3+2a=0$

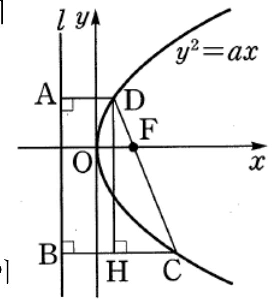
$\therefore -10x^3=a$

오른쪽 그림에서 곡선 $y=-10x^3$과 직선 $y=a$는 한 점에서 만나므로 방정식 $f''(x)=0$은 1개의 실근을 갖고, 그 근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $f(x)$의 변곡점의 개수는 1이다.



29) 답 24

[해설] 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{FD}=k$, $\overline{FC}=2k(k>0)$로 놓으면



$\overline{AD}=\overline{BH}=\overline{CH}=k$

이므로 직각삼각형 DHC에서

$\overline{DH}=\sqrt{(3k)^2-k^2}=2\sqrt{2}k$

이때 사다리꼴 ABCD의 넓이가 $192\sqrt{2}$이므로

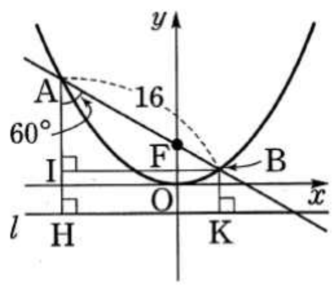
$\frac{1}{2}(k+2k)\cdot 2\sqrt{2}k=192\sqrt{2}$

$k^2=64$ $\therefore k=8(\because k>0)$

$\therefore \overline{CD}=3k=24$

30) 답 4

[해설] 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{AH}$에 내린 수선의 발을 I라 하면 직각삼각형 AIB에서



$\overline{AI}=\overline{AB}cos60^\circ=16\cdot\frac{1}{2}=8$

포물선의 정의에 의하여 $\overline{AH}=\overline{AF}$, $\overline{BK}=\overline{BF}$이므로

$\overline{AH}+\overline{BK}=\overline{AF}+\overline{BF}=\overline{AB}=16$

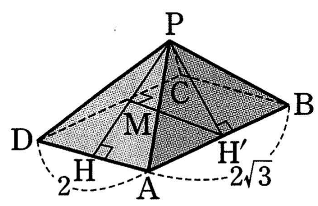
$(\overline{AI}+\overline{IH})+\overline{BK}=16$, $8+\overline{BK}+\overline{BK}=16$

$2\overline{BK}=8$ $\therefore \overline{BK}=4$

31) 답 45°

[해설]

주어진 전개도로 만든 사각뿔은 오른쪽 그림과 같다.



점 P에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{PH}=2$이므로 $\triangle PAH$에서

$\overline{PA}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

점 P에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H'이라 하면 $\triangle PAH'$에서

$\overline{PH'}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{2}$

점 H'에서 $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면 옆면 PAB와 밑면 $ABCD$가 이루는 각의 크기는 $\overline{PH'}$과 $\overline{MH'}$이 이루는 각의 크기와 같다.

따라서 $\angle PH'M=\theta$라 하면

$\cos\theta=\frac{\frac{1}{2}\overline{MH'}}{\overline{PH'}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

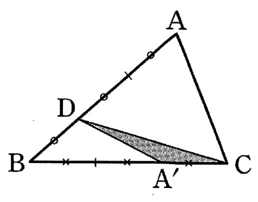
$\therefore \theta=45^\circ$

32) 답 $\frac{1}{6}$

[해설]

선분 BC를 삼등분하는 점 중 점 C와 가까운 점을 A'이라 하면 선분 CD를 접는 선으로 하여 평면 ABC를 접을 때, 꼭짓점 A의 평면 BCD 위로

의 정사영이 점 A'이므로 오른쪽 그림에서 $\triangle ADC$의 평면 BCD 위로의 정사영은 $\triangle A'DC$ 이다.



즉 $\triangle A'CD = \triangle ADC\cos\theta$이므로

$$\cos\theta = \frac{\triangle A'CD}{\triangle ADC}$$

$\triangle A'CD = S$라 하면

$$\triangle ADC = 2\triangle BCD = 2\times 3\triangle A'CD = 6\triangle A'CD = 6S$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{S}{6S} = \frac{1}{6}$$

33) 답 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

[해설] 두 평면 $2x+y-z=1$, $x-2y-z=2$의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$$\overrightarrow{n_1} = (2,\ 1,\ -1),\ \overrightarrow{n_2} = (1,\ -2,\ -1)$$

두 평면이 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면

$$\cos\theta = \frac{|2\times 1+1\times(-2)+(-1)\times(-1)|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}} = \frac{1}{6}$$

이때 $\triangle$ABC의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 4^2 = 4\sqrt{3}$

이므로 구하는 정사영의 넓이는

$$4\sqrt{3}\times\frac{1}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

34) 답 $\dfrac{\pi}{4}$

[해설] 두 구 $x^2+y^2+(z-1)^2=4$, $x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1$의 교선을 포함하는 평면 α의 방정식은

$$2y+2z-7=0$$

평면 α의 법선벡터는 $(0,\ 2,\ 2)$이고 xy평면의 법선벡터는 $(0,\ 0,\ 1)$이므로 평면 α와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta = \frac{|2\times 1|}{\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

35) **정답** ⑤

7개의 문자 A, A, A, B, B, C, D를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$\frac{7!}{3!\cdot 2!} = 420$$

C, D를 한 문자 T로 생각하여 6개의 문자 A, A, A, B, B, T를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$\frac{6!}{3!\cdot 2!} = 60$$

이때 C와 D가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$이므로 C, D가 이웃하도록 나열하는 방법의 수는

$$60\cdot 2 = 120$$

따라서 구하는 방법의 수는 $420-120=300$

[다른 풀이]

C, D를 제외한 5개의 문자 A, A, A, B, B를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\dfrac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$

이때 A, A, A, B, B의 사이사이와 양 끝의 6개의 자리에 C, D를 나열하는 방법의 수는 ${}_6\mathrm{P}_2 = 30$

따라서 구하는 방법의 수는 $10\cdot 30 = 300$

36) **정답** 136

[전략] $f(3)$의 값을 기준으로 경우를 나누어 생각한다.

[풀이]

(ⅰ) $f(3)=1$인 경우

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값이 존재하지 않으므로 f는 함수가 아니다.

(ⅱ) $f(3)=3$인 경우

$f(1)$과 $f(2)$가 될 수 있는 수는

4 또는 5 또는 6

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값이 될 수 있는 수는

1 또는 2

따라서 f의 개수는

$${}_3\Pi_2\cdot{}_2\Pi_3 = 3^2\cdot 2^3 = 72$$

(ⅲ) $f(3)=3$인 경우

$f(1)$과 $f(2)$가 될 수 있는 수는 6

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값이 될 수 있는 수는

1 또는 2 또는 3 또는 4

따라서 f의 개수는

$$1\cdot{}_4\Pi_3 = 1\cdot 4^3 = 64$$

이상에서 구하는 함수의 개수는

$$72+64=136$$

37) **정답** 9

$\left(x+\dfrac{1}{x^n}\right)^{10}$의 전개식의 일반항은

$${}_{10}\mathrm{C}_r\, x^{10-r}\left(\frac{1}{x^n}\right)^r = {}_{10}\mathrm{C}_r\, x^{10-(n+1)r}$$

상수항은 $10-(n+1)r=0$일 때이므로 $(n+1)r=10$

이를 만족시키는 r, n의 순서쌍 $(r,\ n)$은

$$(1,\ 9),\ (2,\ 4),\ (5,\ 1)$$

따라서 n의 최댓값은 9이다.

38) **정답** ⑤

$$(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^{10} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠은 첫째항이 $1+x$, 공비가 $1+x$, 항의 개수가 10인 등비수열의 합이므로

$$\frac{(1+x)\{(1+x)^{10}-1\}}{(1+x)-1} = \frac{(1+x)^{11}-(1+x)}{x} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠의 전개식에서 x의 계수는 ㉡의 $(1+x)^{11}$의 전개식에서 x^2의 계수와 같다.

$(1+x)^{11}$의 전개식의 일반항은 ${}_{11}\mathrm{C}_r x^r$

$x^r = x^2$에서 $r=2$

따라서 구하는 계수는 ${}_{11}\mathrm{C}_2 = 55$

39) **정답** ③

빨간 공이 x번, 노란 공이 y번 나온다고 하면

$$x+y=5,\ x+2y=7$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=2$

따라서 7점을 얻으려면 빨간 공이 3번, 노란 공이 2번 나와야 하므로

구하는 확률은 ${}_5\mathrm{C}_3\left(\dfrac{3}{7}\right)^3\left(\dfrac{4}{7}\right)^2$

40) **정답** $\dfrac{11}{64}$

(ⅰ) 소수가 적힌 공을 꺼내고, 동전을 3번 던져서 3번 모두 앞면이 나올 확률은

$$\frac{3}{8}\cdot{}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{3}{64}$$

(ⅱ) 짝수가 적힌 공을 꺼내고, 동전을 4번 던져서 앞면이 3번 나올 확률은

$$\frac{4}{8}\cdot{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{8}$$

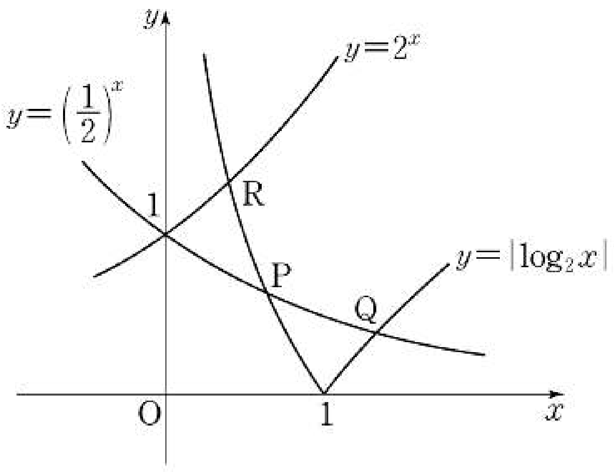
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 $\dfrac{3}{64}+\dfrac{1}{8} = \dfrac{11}{64}$

고지우의 난문헌답

제 2 회

1. 2011년 수능
2. 2010년 4월 교육청
3. 2015년 4월 교육청
4. 2015년 사관학교
5. 2013년 수능
6. 2015년 사관학교
7. 2014년 수능
8. 2010년 경찰대
9. 2006년 10월 교육청
10. 2011년 9월 평가원

1. 좌표평면에서 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$이 만나는 두 점을 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)(x_1 < x_2)$라 하고, 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=2^x$이 만나는 점을 $\mathrm{R}(x_3, y_3)$이라 하자.
옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?



ㄱ. $\frac{1}{2} < x_1 < 1$
ㄴ. $x_2 y_2 - x_3 y_3 = 0$
ㄷ. $x_2(x_1 - 1) > y_1(y_2 - 1)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 부등식 $\sin(x+y) \geq \cos(x-y)$를 만족하는 x, y에 대하여 $x+2y$의 최댓값은? (단, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$)

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{3}{4}\pi$ ③ π
④ $\frac{5}{4}\pi$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

3. 함수 $f(x)=\dfrac{\ln x^2}{x}$의 극댓값을 α라 하자. 함수 $f(x)$와 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)-\dfrac{\alpha}{n}x=0$의 서로 다른 실근의 개수를 a_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오.

4. 함수 $f(x)=-xe^{2-x}$가 상수 a가 다음 조건을 만족시킨다.

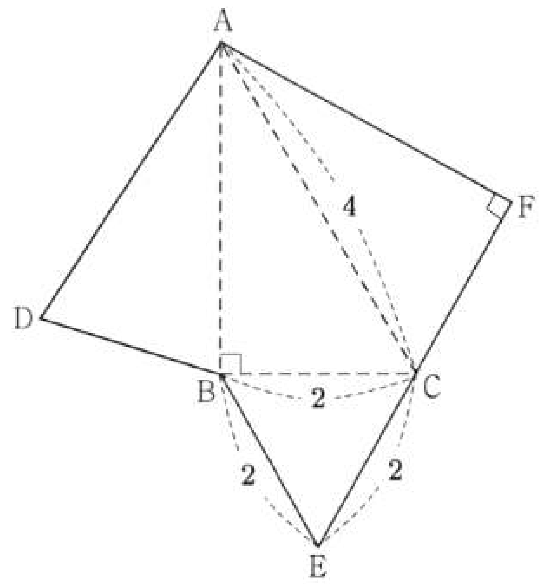
> 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, $x<a$이면 $f(x)>g(x)$이고, $x>a$이면 $f(x)<g(x)$이다.

곡선 $y=f(x)$와 접선 $y=g(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $k-e^2$이다. k의 값을 구하시오.

5. 자연수 n에 대하여 포물선 $y^2=\frac{x}{n}$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자.
$\overline{PF}=1$이고 $\overline{FQ}=a_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}$의 값은?

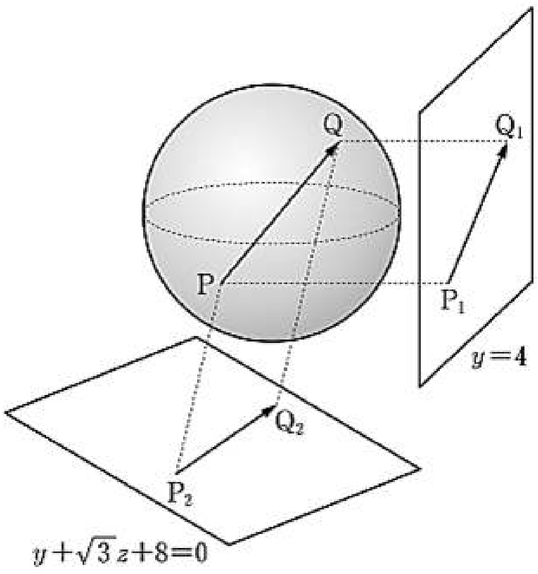
① 210 ② 205 ③ 200
④ 195 ⑤ 190

6. 그림은 어떤 사면체의 전개도이다. 삼각형 BEC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이고 $\angle ABC=\angle CFA=90^\circ$, $\overline{AC}=4$이다. 이 전개도로 사면체를 만들 때, 두 평면 ACF, ABC가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은?



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

7. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 두 점 P, Q에서 평면 $y=4$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{P}_1, \mathrm{Q}_1$이라 하고, 평면 $y+\sqrt{3}z+8=0$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{P}_2, \mathrm{Q}_2$라 하자. $2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}|^2$의 최댓값을 구하시오.



8. 어느 경찰관이 8월에 관할구역을 이틀 연이어 순찰하지 않으면서 5일 순찰하는 방법의 수는?

① ${}_{25}\mathrm{C}_5$ ② ${}_{27}\mathrm{C}_5$ ③ ${}_{28}\mathrm{C}_5$
④ ${}_{29}\mathrm{C}_5$ ⑤ ${}_{30}\mathrm{C}_5$

9. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x+\frac{1}{x}\right)^4+\left(x+\frac{1}{x}\right)^5+\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$

을 전개하는 식에서 x^2항의 계수는?

① 16 ② 20 ③ 24
④ 28 ⑤ 32

10. 주머니 안에 스티커가 1개, 2개, 3개 붙어 있는 카드가 각각 1장씩 들어 있다. 주머니에서 임의로 카드 1장을 꺼내어 스티커 1개를 더 붙인 후 다시 주머니에 넣는 시행을 반복한다. 주머니 안의 각 카드에 붙어 있는 스티커의 개수를 3으로 나눈 나머지가 모두 같아지는 사건을 A라 하자. 시행을 6번을 하였을 때, 1회부터 5회까지는 사건 A가 일어나지 않고 6회에서 사건 A가 일어날 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

추가 과제

1. 두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=3^x$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

| 보 기 |

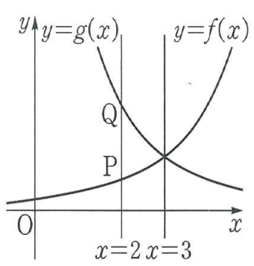
ㄱ. $f(2x)g(2x)=\{f(x)g(x)\}^2$

ㄴ. $a<b$이면 $f(-3a)g(2a)<f(-3b)g(2b)$

ㄷ. $a<b$이면 $f(4a)g(-3a)>f(4b)g(-3b)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 오른쪽 그림과 같이 두 함수 $f(x)=a^{x-m}$, $g(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-m}$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이고, 직선 $x=2$와 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{3}{2}$이다. 이때 상수 a, m에 대하여 am의 값을 구하여라.(단, $a>1$)



3. 1이 아닌 양수 a, b에 대하여

$$\lim_{x\to 0+}\frac{a^x+\log_b x}{b^x+\log_a x}=\frac{1}{4}$$

일 때, $\log_a b$의 값을 구하여라.

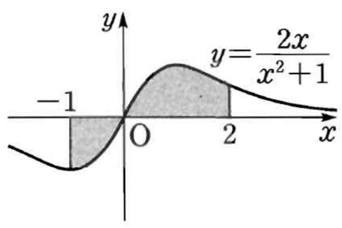
4. 함수 $y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$의 역함수를 $y=\sin^{-1}x$라 할 때,

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}\frac{x}{2}}{x}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

추가 과제

5. 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\frac{2x}{x^2+1}$와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.



6. 곡선 $y=\sin 2x$와 이 곡선 위의 점 $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $-\frac{\pi^2}{72}+\frac{\sqrt{3}}{12}\pi-\frac{1}{4}$

② $-\frac{\pi^2}{36}+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi-\frac{1}{2}$

③ $-\frac{\pi^2}{72}+\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$

④ $-\frac{\pi^2}{36}+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

⑤ $-\frac{\pi^2}{72}+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

7. 모든 실수 a, b에 대하여

$$\int_{-b}^{-a} f(x)dx+\int_{a}^{b} f(x)dx=0$$

이 성립하는 함수인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(x)=x^6-1$

ㄴ. $f(x)=x^{2017}+x^{2015}$

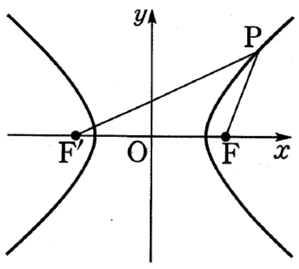
ㄷ. $f(x)=\frac{2^x-2^{-x}}{2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

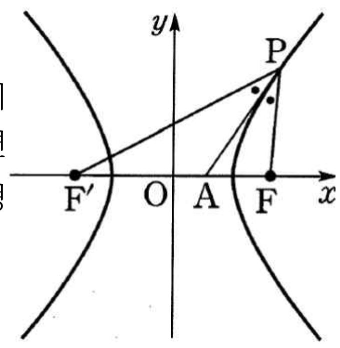
8. 연속함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)+f(-x)=x^2\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)$이 성립할 때, 정적분 $\int_{-1}^{1} f(x)dx$의 값은?

① $\frac{2}{e}$ ② $\frac{5}{e}$ ③ $e-1$
④ $e-\frac{5}{e}$ ⑤ $3e-\frac{5}{e}$

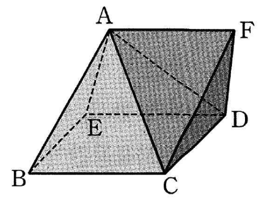
9. 쌍곡선 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$위의 점 P와 두 초점 F, F $'$에 대하여 세 선분 PF, FF $'$, PF $'$의 길이는 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 이때 $\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF}'}^2$의 값은 (단, $\overline{\mathrm{PF}'}>\overline{\mathrm{PF}}$)



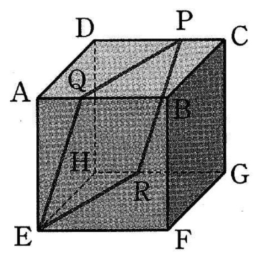
10. 쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$위의 한 점 P와 두 초점 F, F $'$에 대하여 $\angle$F$'$PF의 이등분선이 x축과 만나는 점을 A라 하면 $\overline{\mathrm{F'A}}:\overline{\mathrm{FA}}=5:3$이다. 이때 삼각형 PFF $'$의 둘레의 길이를 구하여라.



11. 오른쪽 그림은 모든 모서리의 길이가 같은 사각뿔 $ABCDE$와 정사면체 $ACDF$가 면 ACD를 공유하도록 붙여 놓은 것이다. 두 면 $BCDE$와 CDF가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.



12. 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 3인 정육면체에서 $\overline{AQ}=\overline{CP}=\overline{HR}=1$이다. 평면 $PQER$와 평면 $EFGH$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.



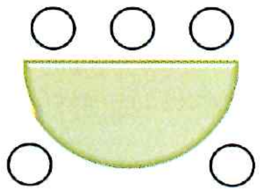
13. 두 구 $x^2+y^2+z^2=9$, $x^2+y^2+z^2-4x+6y-12z+33=0$이 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$에서 서로 접할 때, $a+b-c$의 값은?

① $-\dfrac{33}{7}$ ② -3 ③ $-\dfrac{3}{7}$

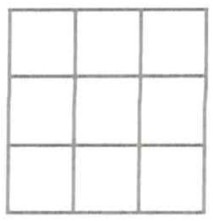
④ $\dfrac{5}{7}$ ⑤ 2

14. 구 $(x-2)^2+(y+3)^2+z^2=6$에 접하고 직선 $x-1=y=\dfrac{z+1}{2}$에 수직인 평면의 방정식을 모두 구하여라.

15. 오른쪽 그림과 같은 탁자에 5명이 둘러앉는 방법의 수를 구하여라.



16. 오른쪽 그림과 같이 정사각형을 9등분한 도형의 각 영역을 서로 다른 9가지 색을 모두 이용하여 칠하는 방법의 수는 $k\times7!$이다. 이때 상수 k의 값을 구하여라.



17. 어느 음료수 회사에서 이벤트로 음료수 10병중에서 1병의 비율로 병뚜껑에 '한 병 더'라는 글씨를 새겨, 이 뚜껑을 가져온 고객에게는 음료수 한 병을 경품으로 준다고 한다. 이 음료수를 3병 구입한 사람이 경품으로 1병의 음료수를 받을 확률이 $\frac{3^k}{10^4}$ 일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

18. 어느 호텔을 예약한 사람 중에서 실제로 그 호텔에 투숙하는 사람은 80%라 한다. 방이 20개인 이 호텔에서 같은 날 22개의 예약을 받은 경우 실제로 방이 부족할 확률을 구하여라.
(단, $0.8^{21}=0.009$, $0.8^{22}=0.007$로 계산한다.)

19. 확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{45}\mathrm{C}_x \cdot \frac{2^x}{3^{45}}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 45)$$

일 때, $\mathrm{E}(X)$와 $\mathrm{V}(X)$는?

① $\mathrm{E}(X)=10,\ \mathrm{V}(X)=1$
② $\mathrm{E}(X)=10,\ \mathrm{V}(X)=5$
③ $\mathrm{E}(X)=15,\ \mathrm{V}(X)=10$
④ $\mathrm{E}(X)=30,\ \mathrm{V}(X)=5$
⑤ $\mathrm{E}(X)=30,\ \mathrm{V}(X)=10$

20. 한 번의 타석에서 안타칠 확률이 0.2인 야구 선수가 10번의 타석에서 안타를 친 횟수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{P}(X\le 9)$는?

① $\left(\frac{4}{5}\right)^{10}$ ② $\left(\frac{4}{5}\right)^{11}$ ③ $1-\left(\frac{1}{5}\right)^{9}$
④ $1-\left(\frac{1}{5}\right)^{10}$ ⑤ $1-\left(\frac{1}{5}\right)^{11}$

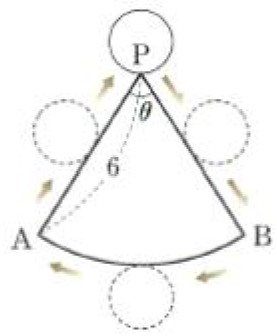
추가 과제

21. $0<a<1$일 때, 함수 $y=a^{-x^2+4x-2}$의 최솟값이 $\frac{1}{4}$이다. 이때 상수 a의 값은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

22. 방정식 $(x-2)^{x-5}=6^{x-5}$의 모든 근의 곱을 구하여라. (단, $x>2$)

23. 중심각의 크기가 θ이고 반지름의 길이가 6인 부채꼴 PAB 위의 점 P에서 반지름의 길이가 1인 원이 부채꼴과 접하고 있다. 원이 점 P를 출발하여 부채꼴과 접하면서 세 바퀴를 굴렀더니 점 P로 되돌아 왔다. 이때 θ의 값은?



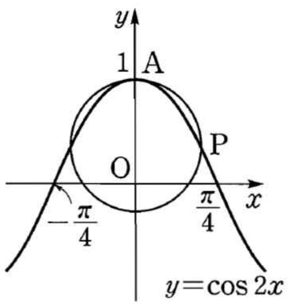
① $\pi-\frac{5}{2}$ ② $\pi-2$ ③ $\pi-\frac{3}{2}$
④ $\frac{\pi}{2}-1$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

24. $\cos 2x=\frac{1}{3}$일 때, 등비급수

$$1+\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^6 x+\cdots$$

의 합을 구하여라.

25. 곡선 $y=\cos 2x$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대하여 두 점 A, P를 지나고 중심이 y축 위에 있는 원의 반지름의 길이를 r라 하자. 점 P가 점 A에 한없이 가까워질 때, r의 극한값을 구하여라.
(단, P는 제1사분면 위의 점이다.)



26. 함수 $f(x)=x^3+2x-2$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)-1}{x-1}$의 값은?

① $\frac{11}{5}$　② $\frac{16}{5}$　③ $\frac{21}{5}$
④ $\frac{26}{5}$　⑤ $\frac{31}{5}$

27. 함수 $f(x)=\frac{e^{ax}}{x+1}$이 구간 $(1,\ \infty)$에서 증가하도록 하는 정수 a의 최솟값을 구하여라.

28. 함수 $f(x)=\frac{a}{x}+\ln x^3-x$가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때, 모든 정수 a의 값의 합은?

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

29. 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$의 두 점근선이 이루는 둔각의 크기를 구하여라.

30. 기울기가 -1이고 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$에 접하는 두 직선 사이의 거리는?

① $\sqrt{3}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ③ $\sqrt{6}$

④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

31. 매개변수 t로 나타낸 함수
$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$
에 대하여 $\frac{dy}{dx}$를 t에 대한 함수로 나타내면? (단, $a>0$)

① $\cos\frac{t}{2}$ ② $\tan\frac{t}{2}$ ③ $\sec\frac{t}{2}$

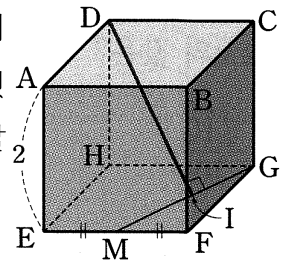
④ $\csc\frac{t}{2}$ ⑤ $\cot\frac{t}{2}$

32. 곡선 $x=\theta+\sin\theta,\ y=1-\cos\theta$에서 $\theta=\frac{\pi}{2}$에 대응하는 점에서의 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{\pi^2}{8}$ ② $\frac{\pi^2}{4}$ ③ $\frac{\pi^2}{2}$

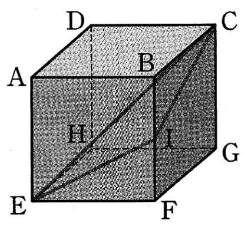
④ 1 ⑤ π

33. 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체에서 $\overline{EF}$의 중점을 M, 꼭짓점 D에서 $\overline{GM}$에 내린 수선의 발을 I라 할 때, $\overline{HI}$의 길이는?



① $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\frac{6\sqrt{5}}{5}$
④ $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

34. 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체에서 모서리 BF의 중점을 I라 하고, 두 평면 CEI, $EFGH$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?



① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

35. 한 평면 위에 있는 6개의 직선 중에서 어느 두 직선도 평행하지 않고 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않을 때, 6개의 직선으로 만들 수 있는 삼각형의 개수를 구하여라.

36. 지우와 혜리가 각각 오후 2시부터 오후 2시 30분 사이의 임의의 시간에 A지점에 가서 10분 동안 기다리기로 하였다. 두 사람이 만나게 될 확률을 구하여라.

37. 두 사건 A, B에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 골라라.

| 보 기 |

ㄱ. A, B가 서로 배반사건이면 A, B는 서로 독립이다.
ㄴ. A, B가 서로 독립이면 A, B^c도 서로 독립이다.
ㄷ. A^c, B^c가 서로 독립이면 A, B도 서로 독립이다.

38. 6개의 문자 a, b, c, d, e, f 중에서 임의로 한 개의 문자를 뽑을 때, b를 뽑는 사건을 $[b]$, b 또는 c를 뽑는 사건을 $[b,\ c]$라 하자. 사건 $[a,\ b,\ c,\ d]$와 서로 독립인 사건인 것만을 보기에서 있는 대로 골라라.

| 보 기 |

ㄱ. $[d,\ f]$　　ㄴ. $[c,\ d,\ e]$　　ㄷ. $[c,\ d,\ e,\ f]$

39. 표준편차가 5인 정규분포를 따르는 모집단의 평균을 신뢰도 99%로 추정할 때, 모평균 m과 표본평균 $\overline{X}$의 값 $\overline{x}$의 차가 $\frac{1}{2}$ 이하가 되도록 하려면 적어도 몇 개의 표본을 조사해야 하는가? (단, $\mathrm{P}(|Z| \le 3) = 0.99$)

① 100개　② 225개　③ 400개
④ 625개　⑤ 900개

40. 어느 도시의 주민 525명을 임의추출하여 자전거 사용률을 조사했더니 16%이었다. 이 도시 주민의 자전거 사용률 p의 신뢰도 95%의 신뢰구간은? (단, $\mathrm{P}(|Z| \le 2) = 0.95$)

① $0.128 \le p \le 0.192$　② $0.132 \le p \le 0.188$
③ $0.136 \le p \le 0.184$　④ $0.140 \le p \le 0.180$
⑤ $0.144 \le p \le 0.176$

정답 & 해설

[난문현답 기출 정답]

1. ③

2. ③

3. 10

4. ⑤

5. 180

6. 21

7. 17

8. 45

9. 14

10. ⑤

[추가 과제 해설]

1) 정답 ⑤

ㄱ. $f(2x)g(2x)=2^{2x}\cdot 3^{2x}=(2^x)^2\cdot(3^x)^2$

$=(2^x\cdot 3^x)^2=\{f(x)g(x)\}^2$

ㄴ. $f(-3x)g(2x)=2^{-3x}\cdot 3^{2x}=\left(\frac{1}{8}\right)^x\cdot 9^x=\left(\frac{9}{8}\right)^x$

따라서 함수 $f(-3x)g(2x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $a<b$이면

$f(-3a)g(2a)<f(-3b)g(2b)$

ㄷ. $f(4x)g(-3x)=2^{4x}\cdot 3^{-3x}=16^x\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^x=\left(\frac{16}{27}\right)^x$

따라서 함수 $f(4x)g(-3x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $a<b$이면

$f(4a)g(-3a)>f(4b)g(-3b)$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

2) 정답 6

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$m=3$

즉 두 함수 $f(x)=a^{x-3}$, $g(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-3}$에서

$f(2)=a^{2-3}=\frac{1}{a}$, $g(2)=\left(\frac{1}{a}\right)^{2-3}=a$

따라서 $\mathrm{P}\left(2,\ \frac{1}{a}\right)$, $\mathrm{Q}(2,\ a)$이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{3}{2}$이므로

$a-\frac{1}{a}=\frac{3}{2}$, $\qquad 2a^2-3a-2=0$

$(2a+1)(a-2)=0$ $\qquad \therefore\ a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=2$

그런데 $a>1$이므로 $\qquad a=2$

$\therefore\ am=6$

3) 정답 4

$$\lim_{x\to0+}\frac{a^x+\log_b x}{b^x+\log_a x}=\lim_{x\to0+}\frac{a^x+\frac{\ln x}{\ln b}}{b^x+\frac{\ln x}{\ln a}} \qquad \bullet\ 30\ \%$$

이때 $\lim\limits_{x\to0+}a^x=1$, $\lim\limits_{x\to0+}b^x=1$이고, $\lim\limits_{x\to0+}\ln x=-\infty$이므로 위의 식의 분모, 분자를 각각 $\ln x$로 나누면

$$\lim_{x\to0+}\frac{\frac{a^x}{\ln x}+\frac{1}{\ln b}}{\frac{b^x}{\ln x}+\frac{1}{\ln a}}=\frac{\ln a}{\ln b}=\log_b a=\frac{1}{4} \qquad \bullet\ 50\ \%$$

$$\therefore\ \log_a b=\frac{1}{\log_b a}=4 \qquad \bullet\ 20\ \%$$

4) 정답 ②

$\sin^{-1}\frac{x}{2}=h$로 놓으면 $\frac{x}{2}=\sin h$ $\qquad \therefore\ x=2\sin h$

또 $x\to0$일 때 $h\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}\frac{x}{2}}{x}=\lim_{h\to0}\frac{h}{2\sin h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{\sin h}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$$

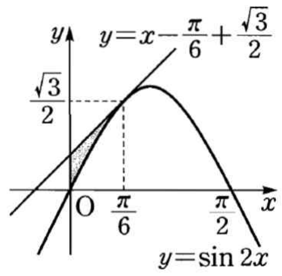
5) 정답 $\ln 10$

$\int_{-1}^{0}\left(-\frac{2x}{x^1+1}\right)dx+\int_{0}^{2}\frac{2x}{x^2+1}dx$

$=\left[-\ln(x^2+1)\right]_{-1}^{0}+\left[\ln(x^2+1)\right]_{0}^{2}$

$=\ln2+\ln5=\ln10$

6) 정답 ①



$y=\sin 2x$에서 $y=2\cos 2x$이므로 곡선 위의

점 $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$2\cos\frac{\pi}{3}=1$이고 접선의 방정식은

$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=x-\frac{\pi}{6}$

$\therefore\ y=x-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

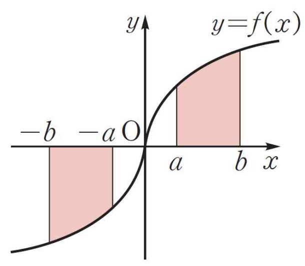
따라서 구하는 넓이는

$\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\left(x-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin 2x\right)dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{\pi}{6}x+\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{0}^{\frac{\pi}{6}}$

$=-\frac{\pi^2}{72}+\frac{\sqrt{3}}{12}\pi-\frac{1}{4}$

7) 정답 ⑤



$\int_{-b}^{-a}f(x)dx+\int_{a}^{b}f(x)dx=0$에서

$\int_{-b}^{-a}f(x)dx=-\int_{a}^{b}f(x)dx$이므로 오른쪽 그림에서 $f(x)$는 기함수이다.

ㄱ. $f(-x)=(-x)^6-1=x^6-1$

$=f(x)$

따라서 $f(x)$는 우함수이다.

ㄴ. $f(-x)=(-x)^{2017}+(-x)^{2015}$

$=-x^{2017}-x^{2015}$

$=-(x^{2017}+x^{2015})$

$=-f(x)$

따라서 $f(x)$는 기함수이다.

ㄷ. $f(-x)=\frac{2^{-x}-2^x}{2}=-\frac{2^x-2^{-x}}{2}=-f(x)$

따라서 $f(x)$는 기함수이다.

이상에서 주어진 등식이 성립하는 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

8) 정답 ④

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $-x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-1$

또한 $x=-1$일 때 $t=1$, $x=0$일 때 $t=0$이므로

$\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{1}^{0}f(-t)\cdot(-1)dt$

$=\int_{0}^{1}f(-t)dt=\int_{0}^{1}f(-x)dx \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(-x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx$

$=\int_{0}^{1}\{f(-x)+f(x)\}dx$

$=\int_{0}^{1}x^2\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)dx=\int_{0}^{1}x^2(e^x+e^{-x})dx$

이때 $g(x)=x^2$, $h'(x)=e^x+e^{-x}$으로 놓으면

$g'(x)=2x$, $h(x)=e^x-e^{-x}$

$$\therefore \int_0^1 x^2(e^x+e^{-x})dx$$
$$=\left[x^2(e^x-e^{-x})\right]_0^1-2\int_0^1 x(e^x-e^{-x})dx$$
$$=e-\frac{1}{e}-2\int_0^1 x(e^x-e^{-x})dx \quad \cdots\cdots ㉢$$

$\int_0^1 x(e^x-e^{-x})dx$에서 $u(x)=x,\ v'(x)=e^x-e^{-x}$으로 놓으면

$$u'(x)=1,\ v(x)=e^x+e^{-x}$$
$$\therefore \int_0^1 x(e^x-e^{-x})dx=\left[x(e^x+e^{-x})\right]_0^1-\int_0^1(e^x+e^{-x})dx$$
$$=e+\frac{1}{e}-\left[e^x-e^{-x}\right]_0^1$$
$$=e+\frac{1}{e}-e+\frac{1}{e}=\frac{2}{e} \quad \cdots\cdots ㉣$$

㉣을 ㉢에 대입하면

$$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2(e^x+e^{-x})dx$$
$$=e-\frac{1}{e}-\frac{4}{e}=e-\frac{5}{e}$$

9) 답 338

[해설] 쌍곡선 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$에서 $\sqrt{25+11}=6$이므로 초점의 좌표는 $(6,0)$, $(-6,0)$ $\quad \therefore \overline{\mathrm{FF'}}=12$

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2\cdot 5=10$

$\therefore \overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PF'}}-10$

$\overline{\mathrm{PF}}$, $\overline{\mathrm{FF'}}$, $\overline{\mathrm{PF'}}$의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2\overline{\mathrm{FF'}}$에서 $(\overline{\mathrm{PF'}}-10)+\overline{\mathrm{PF'}}=2\cdot 12$

$\therefore \overline{\mathrm{PF'}}=17$

따라서 $\overline{\mathrm{PF}}=17-10=7$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF'}}^2=49+289=338$

10) 답 $8+16\sqrt{3}$

[해설] $\overline{\mathrm{PA}}$가 $\angle\mathrm{F'PF}$의 이등분선이므로

$\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{F'A}}:\overline{\mathrm{FA}}=5:3$

즉 $\overline{\mathrm{PF'}}=5k$, $\overline{\mathrm{PF}}=3k$ $(k>0)$로 놓으면 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2k=2\cdot 2\sqrt{3}$

$\therefore k=2\sqrt{3}$

$\therefore \overline{\mathrm{PF'}}=10\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{PF}}=6\sqrt{3}$

한편 $\sqrt{12+4}=4$에서 $\overline{\mathrm{FF'}}=8$이므로 $\triangle\mathrm{PFF'}$의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{FF'}}=8+16\sqrt{3}$

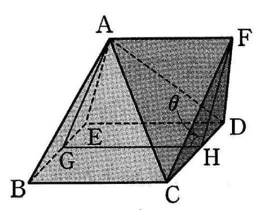
11) 답 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

[해설]

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BE}$와 $\overline{CD}$의 중점을 각각 G, H라 하면

$\overline{AG}=\overline{FH}$, $\overline{AF}=\overline{GH}$

이므로 □$AGHF$는 평행사변형이다.



•20%

이때 두 면 $BCDE$와 CDF가 이루는 각의 크기는 $\overline{GH}$와 $\overline{FH}$가 이루는 각의 크기와 같으므로

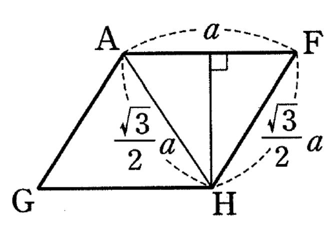
$\cos\theta=\cos(\angle GHF)=\cos(180^\circ-\angle AFH)$

$=-\cos(\angle AFH)$ •40%

각 모서리의 길이를 a라 하면

$\overline{AH}=\overline{FH}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

오른쪽 그림에서



$$\cos(\angle AFH)=\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\therefore \cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

•40%

12) 답 $\frac{\sqrt{11}}{11}$

[해설]

□$PQER$는 마름모이고

$\overline{QR}=\overline{BG}=3\sqrt{2}$,

$\overline{PE}=\sqrt{\overline{DE}^2+\overline{DP}^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{22}$

이므로 □$PQER$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times\sqrt{22}=3\sqrt{11}$

한편 두 점 P, Q에서 밑면 $EFGH$에 내린 수선의 발을 각각 P', Q'이라 하면 □$P'REQ'$은 평행사변형이므로 그 넓이는

$1\times 3=3$

이때 □$PQER$의 평면 $EFGH$위로의 정사영이 □$P'REQ'$이므로

□$PQER\cos\theta=$□$P'REQ'$, $\quad 3\sqrt{11}\cos\theta=3$

$\therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{11}}{11}$

13) 답 ②

[해설] 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$는 주어진 두 구 위에 있으므로

$a^2+b^2+c^2=9$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$a^2+b^2+c^2-4a+6b-12c+33=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠-㉡을 하면 $4a-6b+12c+42=0$

$\therefore 2a-3b+6c-21=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

$x^2+y^2+z^2-4x+6y-12z+33=0$에서

$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-6)^2=16$

이므로 구의 중심의 좌표는 $(2,\ -3,\ 6)$

따라서 주어진 두 구의 중심 $(0,\ 0,\ 0)$, $(2,\ -3,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{6}$

점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$가 이 직선 위에 있으므로

$\frac{a}{2}=\frac{b}{-3}=\frac{c}{6}=t$ (t는 실수)

로 놓으면 $a=2t$, $b=-3t$, $c=6t$

이를 ㉢에 대입하면

$4t+9t+36t-21=0$ $\quad\therefore t=\frac{3}{7}$

따라서 $a=\frac{6}{7}$, $b=-\frac{9}{7}$, $c=\frac{18}{7}$이므로

$a+b-c=-3$

14) 답 $x+y+2z-5=0$, $x+y+2z+7=0$

[해설] 직선 $x-1=y=\frac{z+1}{2}$에 수직인 평면의 법선벡터는 $(1,\ 1,\ 2)$이므로 구하는 평면의 방정식을

$x+y+2z+k=0$ (k는 상수)

으로 놓을 수 있다.

이 평면이 주어진 구와 접하므로 구의 중심 $(2,\ -3,\ 0)$과 평면 $x+y+2z+k=0$ 사이의 거리는 구의 반지름의 길이와 같다. 즉

$\frac{|2-3+k|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\sqrt{6}$, $|k-1|=6$

$\therefore k=-5$ 또는 $k=7$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$x+y+2z-5=0$, $x+y+2z+7=0$

15) 정답 120

5명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$(5-1)!=4!=24$

이때 주어진 모양의 탁자에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 5가지씩 존재한다.

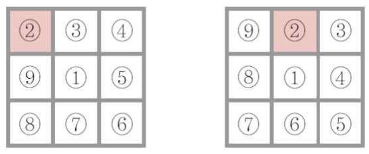
따라서 구하는 방법의 수는 $\quad 24\cdot 5=120$

16) 정답 18

가운데 정사각형을 칠하는 방법의 수는 9이고, 나머지 8개의 정사각형을 칠하는 방법의 수는

$(8-1)!=7!$

이때 8개의 정사각형을 칠하는 한 가지 방법에 대하여 주어진 도형에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 구하는 방법의 수는 $9 \cdot 7! \cdot 2 = 18 \cdot 7!$

$\therefore\ k = 18$

17) **정답** 7

경품을 받을 확률이 $\dfrac{1}{10}$ 이므로 음료수를 3병 구입한 사람이 경품으로 1병의 음료수를 받을 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{1}{10}\right)^1\left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot \frac{9}{10} = \frac{3 \cdot 9^3}{10^4} = \frac{3^7}{10^4}$$

따라서 $\dfrac{3^7}{10^4} = \dfrac{3^k}{10^4}$ 이므로 $k = 7$

18) [정답] 0.0466

실제로 호텔에 투숙하는 사람 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B(22,\ 0.8)$을 따르므로

$$P(X = x) = {}_{22}C_x\, 0.8^x \times 0.2^{22-x}\ (x = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 22)$$

방이 부족하려면 $X > 20$이어야 하므로 구하는 확률은

$$P(X > 20) = P(X = 21) + P(X = 22)$$
$$= {}_{22}C_{21}\, 0.8^{21} \times 0.2 + {}_{22}C_{22}\, 0.8^{22} \times 0.2^0$$
$$= 22 \times 0.009 \times 0.2 + 1 \times 0.007 \times 1$$
$$= 0.0466$$

19) [정답] ⑤

$$P(X = x) = {}_{45}C_x \cdot \frac{2^x}{3^{45}}$$
$$= {}_{45}C_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{45-x}\ (x = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 45)$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(45,\ \dfrac{2}{3}\right)$를 따르므로

$$E(X) = 45 \cdot \frac{2}{3} = 30,\ \ V(X) = 45 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 10$$

20) [정답] ④

확률변수 X가 이항분포 $B\left(10,\ \dfrac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$P(X = x) = {}_{10}C_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{10-x}\ (x = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$$

따라서 구하는 확률은

$$P(X \le 9) = 1 - P(X = 10)$$
$$= 1 - {}_{10}C_{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\left(\frac{4}{5}\right)^0$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{10}$$

21) 정답 ④

함수 $y = a^{-x^2+4x-2}$에서 $0 < a < 1$이므로 $-x^2+4x-2$가 최대일 때에는 y는 최솟값을 갖는다.

$-x^2+4x-2 = -(x-2)^2+2$에서 $-x^2+4x-2$의 최댓값은 2이므로

$$a^2 = \frac{1}{4} \qquad \therefore\ a = \frac{1}{2}\ \ (\because\ a > 0)$$

22) 정답 40

(ⅰ) $x-5 = 0$, 즉 $x = 5$일 때, 주어진 방정식은 $3^0 = 6^0 = 1$이므로 성립한다. ● 40 %

(ⅱ) $x-5 \ne 0$일 때, $x-2 = 6$이므로 $x = 8$ ● 40 %

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 근의 곱은 $5 \cdot 8 = 40$ ● 20 %

23) **정답** ②

[풀이] 원의 둘레의 길이는 $2\pi \cdot 1 = 2\pi$이고, 부채꼴의 둘레의 길이는 $6+6+6\theta = 12+6\theta$이다.

부채꼴의 둘레의 길이는 원의 둘레의 길이의 3배와 같으므로

$$12+6\theta = 2\pi \cdot 3,\ \ 6\theta = 6\pi - 12$$

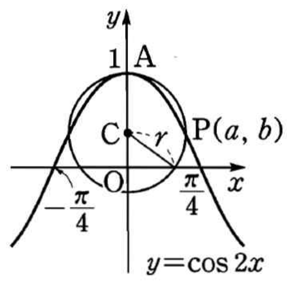
$$\therefore\ \theta = \pi - 2$$

24) **정답** 3

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1+\frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{3} \qquad \cdot\ 50\ \%$$

$$\therefore\ 1+\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^6 x+\cdots$$
$$= \frac{1}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3 \qquad \cdot\ 50\ \%$$

25) **정답** $\dfrac{1}{4}$



원의 중심을 C라 하면

$C(0,\ 1-r)$이고 $r = \overline{CP}$이므로

$$r^2 = a^2 + \{b-(1-r)\}^2$$
$$2(1-b)r = a^2 + (1-b)^2$$
$$\therefore\ r = \frac{a^2}{2(1-b)} + \frac{1-b}{2}\ \cdots ㉠$$

또 점 $P(a,\ b)$가 곡선 $y = \cos 2x$ 위의 점이므로

$$b = \cos 2a$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$r = \frac{a^2}{2(1-\cos 2a)} + \frac{1-\cos 2a}{2}$$
$$= \frac{a^2}{4\sin^2 a} + \sin^2 a$$

점 P가 점 A에 한없이 가까워질 때 $a \to 0+$이므로

$$\lim_{a\to 0+} r = \lim_{a\to 0+}\left(\frac{a^2}{4\sin^2 a} + \sin^2 a\right)$$
$$= \lim_{a\to 0+}\left\{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a}{\sin a}\right) + \sin^2 a\right\}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot 1^2 + 0 = \frac{1}{4}$$

26) 정답 ④

$f(x) = x^3+2x-2$에서 $f(1) = 1$이므로 $\qquad g(1) = 1$

$$\therefore\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)-1}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{g(x)\{f(x)-1\}+g(x)-1}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1} \cdot g(x) + \lim_{x\to 1}\frac{g(x)-1}{x-1}$$
$$= f'(x)g(1) + g'(1)$$

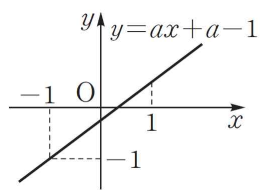
이때 $f'(x) = 3x^2+2$이므로

$$f'(1) = 5,\ \ g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5}$$

따라서 구하는 값은 $\qquad 5 \cdot 1 + \dfrac{1}{5} = \dfrac{26}{5}$

27) **정답** 1

$$f'(x) = \frac{ax^{ax}(x+1)-e^{ax}}{(x+1)^2} = \frac{(ax+a-1)e^{ax}}{(x+1)^2}$$



함수 $f(x)$가 구간 $(1,\ \infty)$에서 증가하려면 $x > 1$일 때 $f'(x) \ge 0$이어야 한다.

즉 $ax+a-1 \ge 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$$a > 0,\ \ 2a-1 \ge 0$$
$$\therefore\ a \ge \frac{1}{2}$$

따라서 정수 a의 최솟값은 1이다.

28) **정답** ②

$f(x) = \dfrac{a}{x} + \ln x^3 - x$에서 $x > 0$이고

$f'(x)=-\frac{a}{x^2}+\frac{3}{x}-1=\frac{-x^2+3x-a}{x^2}$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $-x^2+3x-a=0$이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(ⅰ) $-x^2+3x-a=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=9-4a>0 \qquad \therefore\ a<\frac{9}{4}$$

(ⅱ) (두 근의 합)$=3>0$

(ⅲ) (두 근의 곱)$=a>0$

이상에서 $\quad 0<a<\frac{9}{4}$

따라서 정수 a는 1, 2이므로 구하는 합은

$1+2=3$

29) 답 $\frac{2}{3}\pi$

[해설] 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$

두 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$, $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, $\theta_2(0\le\theta_1<\pi, 0\le\theta_2<\pi)$라 하면

$\tan\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan\theta_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ \theta_1=\frac{\pi}{6}$, $\theta_2=\frac{5}{6}\pi$

따라서 구하는 둔각의 크기는

$\theta_2-\theta_1=\frac{2}{3}\pi$

30) 답 ③

[해설]

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{4}-y_1y=1 \qquad \therefore\ y=\frac{x_1}{4y_1}x-\frac{1}{y_1}$$

접선의 기울기가 -1이므로

$$\frac{x_1}{4y_1}=-1 \qquad \therefore\ x_1=-4y_1$$

이때 $\frac{x_1^2}{4}-y_1^2=1$이므로

$$3y_1^2=1 \qquad \therefore\ y_1=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

따라서 접선의 방정식은

$y=-x\pm\sqrt{3}$

구하는 두 직선 사이의 거리는 직선 $y=-x-\sqrt{3}$ 위의 점 $(0,\ -\sqrt{3})$과 직선 $y=-x+\sqrt{3}$, 즉 $x+y-\sqrt{3}=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-\sqrt{3}-\sqrt{3}|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{6}$$

31) 답 ⑤

[해설]

$\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$, $\frac{dy}{dt}=a\sin t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}$$

$$=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\cot\frac{t}{2}$$

32) 답 ①

[해설]

$\frac{dx}{d\theta}=1+\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\ (\cos\theta\ne-1)$$

$\theta=\frac{\pi}{2}$일 때 $x=\frac{\pi}{2}+1$, $y=1$, $\frac{dy}{dx}=1$

이므로 접선의 방정식은 $y-1=x-\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$

$\therefore\ y=x-\frac{\pi}{2}$

따라서 접선의 x절편과 y절편이 각각 $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{8}$$

33) 답 ①

[해설]

$\overline{DH}\perp$(평면 $EFGH$), $\overline{DI}\perp\overline{GM}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{HI}\perp\overline{GM}$

$\triangle HMG=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$이므로

$\overline{HI}\cdot\overline{GM}=4$

$\overline{GM}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이므로

$\overline{HI}=4\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

34) 답 ⑤

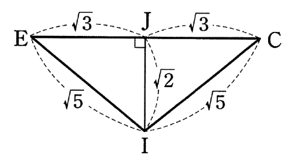
[해설]

$\triangle CEI$의 평면 $EFGH$ 위로의 정사영은 $\triangle GEF$이므로

$$\triangle GEF=\triangle CEI\cos\theta \qquad \therefore\ \cos\theta=\frac{\triangle GEF}{\triangle CEI}$$

$\overline{CE}=2\sqrt{3}$, $\overline{EI}=\overline{CI}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

이므로 오른쪽 그림과 같이 $\triangle CEI$의 꼭짓점 I에서 밑변 CE에 내린 수선의 발을 J라 하면



$\overline{IJ}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{2}$

$\therefore\ \triangle CEI=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}$

이때 $\triangle GEF=\frac{1}{2}\times2\times2=2$이므로

$$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

35) 정답 20

어느 두 직선도 평행하지 않고 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않으므로 6개의 직선 중에서 3개의 직선을 택하면 삼각형이 결정된다.

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$${}_6C_3=20$$

36) 정답 $\frac{5}{9}$

지우가 도착한 시각을 오후 2시 x분, 혜리가 도착한 시각을 오후 2시 y분이라 하면

$$0\le x\le30,\ 0\le y\le30 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

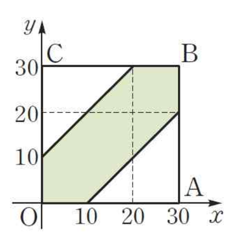
두 사람이 만나려면 $|x-y|\le10$이어야 하므로

$$-10\le x-y\le10$$

$$\therefore\ x-10\le y\le x+10 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

오른쪽 그림에서 부등식 ㉠의 영역은 □OABC의 내부(경계선 포함)이고, 부등식 ㉠, ㉡의 공통인 영역은 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.

따라서 구하는 확률은



$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square\text{OABC의 넓이})}$$

$$= \frac{30 \cdot 30 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20\right)}{30 \cdot 30} = \frac{5}{9}$$

37) **정답** ㄴ, ㄷ

ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\quad \mathrm{P}(A \cap B) = 0$

이때 $\mathrm{P}(A) \neq 0$, $\mathrm{P}(B) \neq 0$이면

$$\mathrm{P}(A \cap B) \neq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

이므로 A, B는 서로 독립이 아니다.

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\quad \mathrm{P}(A \mid B^c) = \mathrm{P}(A)$

$$\therefore \mathrm{P}(A \cap B^c) = \mathrm{P}(A \mid B^c)\mathrm{P}(B^c) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^c)$$

따라서 A, B^c도 서로 독립이다.

ㄷ. A^c, B^c가 서로 독립이면 $\quad \mathrm{P}(A^c \cap B^c) = \mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B^c)$

$$\begin{aligned} \therefore \mathrm{P}(A \cap B) &= 1 - \mathrm{P}\left((A \cap B)^c\right) \\ &= 1 - \mathrm{P}(A^c \cup B^c) \\ &= 1 - \{\mathrm{P}(A^c) + \mathrm{P}(B^c) - \mathrm{P}(A^c \cap B^c)\} \\ &= 1 - \{\mathrm{P}(A^c) + \mathrm{P}(B^c) - \mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B^c)\} \\ &= \{1 - \mathrm{P}(A^c)\}\{1 - \mathrm{P}(B^c)\} \\ &= \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \end{aligned}$$

따라서 A, B도 서로 독립이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

38) **정답** ㄴ

사건 $[a,\ b,\ c,\ d]$를 A라 하면 $\quad \mathrm{P}(A) = \frac{2}{3}$

ㄱ. 사건 $[d,\ f]$를 B라 하면 $A \cap B = [d]$이므로

$$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A \cap B) \neq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

따라서 A와 B는 서로 종속이다.

ㄴ. 사건 $[c,\ d,\ e]$를 C라 하면 $A \cap C = [c,\ d]$이므로

$$\mathrm{P}(C) = \frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A \cap C) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$$

따라서 A와 C는 서로 독립이다.

ㄷ. 사건 $[c,\ d,\ e,\ f]$를 D라 하면 $A \cap D = [c,\ d]$이므로

$$\mathrm{P}(D) = \frac{2}{3},\ \mathrm{P}(A \cap D) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A \cap D) \neq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(D)$$

따라서 A와 D는 서로 종속이다.

이상에서 $[a,\ b,\ c,\ d]$와 서로 독립인 사건은 ㄴ뿐이다.

39) **[정답]** ⑤

모표준편차가 5이므로 표본의 크기를 n이라 하면 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 3 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 3 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{-15}{\sqrt{n}} \leq m - \bar{x} \leq \frac{15}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |m - \bar{x}| \leq \frac{15}{\sqrt{n}}$$

모평균 m과 표본평균 $\bar{x}$의 차가 $\frac{1}{2}$ 이하이어야 하므로

$$\frac{15}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2},\ \sqrt{n} \geq 30 \qquad \therefore n \geq 900$$

따라서 적어도 900개의 표본은 조사해야 한다.

40) **[정답]** ①

표본의 크기가 525, 표본비율이 $\hat{p} = 0.16$이므로 자전거 사용률 p를 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간은

$$0.16 - 2\sqrt{\frac{0.16 \times 0.84}{525}} \leq p \leq 0.16 + 2\sqrt{\frac{0.16 \times 0.84}{525}}$$

$$0.16 - 2 \times 0.016 \leq p \leq 0.16 + 2 \times 0.016$$

$$\therefore 0.128 \leq p \leq 0.192$$

고지우의 난문현답

제 3 회

1. 2005년 수능
2. 2010년 6월 평가원
3. 2014년 사관학교
4. 2016년 3월 교육청
5. 2016년 6월 평가원
6. 2014년 사관학교
7. 2016년 9월 평가원
8. 2010년 3월 교육청
9. 2015년 경찰대
10. 2009년 10월 교육청

1. 함수 $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$에 대하여 옳은 것을 모두 고른 것은?

ㄱ. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$
ㄴ. $f(x)+f(1-x)=1$
ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} f\left(\dfrac{k}{101}\right)=50$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\sin x}-e^{1-\tan x}}{\tan x-\sin x}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{e}$　② $\dfrac{2}{e}$　③ 1
④ e　⑤ $2e$

3. $0 \le x \le \pi$에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x+2}$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=\pi$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. S_1+S_2의 값은?

① $\ln\dfrac{3}{2}$ ② $\ln\dfrac{4}{3}$ ③ $2\ln\dfrac{3}{2}$
④ $2\ln\dfrac{4}{3}$ ⑤ $4\ln\dfrac{3}{2}$

4. 함수 $f(x)=\dfrac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}$에 대하여

$$a=f(\pi-x)+f(x), \quad b=\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

일 때, $a+\dfrac{100}{\pi}b$의 값을 구하시오.

5. 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 P는 제 1사분면에 있다. (나) 삼각형 PFF′가 이등변삼각형이다.

삼각형 PF′F의 넓이를 a라 할 때, 모든 a의 값의 곱은?

① $3\sqrt{77}$ ② $6\sqrt{21}$ ③ $9\sqrt{10}$
④ $21\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{105}$

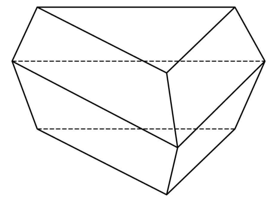
6. 좌표공간에 여섯 개의 점 A$(0,0,2)$, B$(2,0,0)$, C$(0,2,0)$, D$(-2,0,0)$, E$(0,-2,0)$, F$(0,0,-2)$를 꼭짓점으로 하는 정팔면체 ABCDEF가 있다. 이 정팔면체와 평면 $x+y+z=0$이 만나서 생기는 도형의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오.

7. 좌표공간에 두 개의 구

$$S_1 : x^2+y^2+(z-3)^2=1,\ S_2 : x^2+y^2+(z+3)^2=4$$

가 있다. 점 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right)$을 포함하고, S_1과 S_2에 동시에 접하는 평면을 α라 하자. 점 $Q(k, -\sqrt{3}, 2)$가 평면 α 위의 점일 때 $120k$의 값을 구하시오.

8. 아래 그림과 같이 합동인 정삼각형 2개와 합동인 등변사다리꼴 6개로 이루어진 팔면체가 있다. 팔면체의 각 면에는 한 가지의 색을 칠한다고 할 때, 서로 다른 8개의 색을 모두 사용하여 팔면체의 각 면을 칠하는 경우의 수는?
(단, 팔면체를 회전시켰을 때 색의 배열이 일치하면 같은 경우로 생각한다.)



① 6520 ② 6620 ③ 6720
④ 6820 ⑤ 6920

9. 좌석의 수가 50인 어느 식당에서 예약한 사람이 예약을 취소하는 경우가 10명 중 1 명꼴이라고 한다. 52명이 예약을 했을 때, 좌석이 부족하게 될 확률은 $p\times0.9^{52}$이다. p의 값은?

① $\frac{61}{9}$ ② 7 ③ $\frac{56}{9}$
④ $\frac{67}{9}$ ⑤ $\frac{23}{3}$

10. 표는 $k=0,1,2,3,4$일 때, $p_k={}_{30}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{30-k}$의 값을 소수점 아래 셋째자리까지 나타낸 것이다.

k	0	1	2	3	4
p_k	0.004	0.025	0.073	0.137	0.185

주사위를 30번 던져 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 할 때, 위의 표를 이용하여 $\sum_{r=3}^{30} r\mathrm{P}(\mathrm{X}=r)$의 값을 구한 것은?

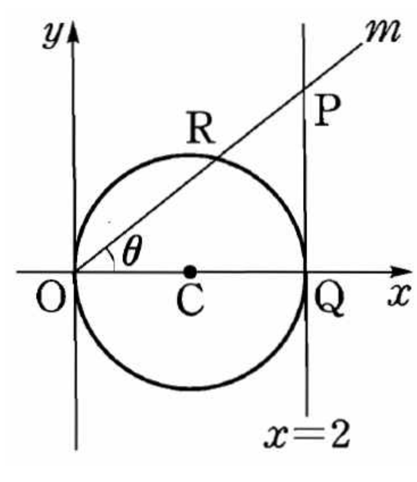
① 4.765 ② 4.829 ③ 4.902
④ 4.946 ⑤ 4.971

추가 과제

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\circ} \sin\frac{1}{x}$ 의 값은?

① 0 ② $\frac{\pi}{180}$ ③ $\frac{1}{\pi}$
④ 1 ⑤ $\frac{180}{\pi}$

2. 아래쪽 그림과 같이 중심이 $\mathrm{C}(1,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 직선 $x=2$가 원점 O를 지나고 기울기가 양수인 직선 m과 만나는 점을 P, x축과 만나는 점을 Q라 하고, 직선 m이 원과 만나는 원점이 아닌 점을 R라 하자. 직선 m이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ, 호 RQ의 길이를 l이라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{\overline{\mathrm{PR}}}{l^2}$의 값을 구하여라.



3. 함수 $f(x)=4\cos x-\cos 2x\ \ (0<x<2\pi)$는 $x=a$에서 극솟값 b를 갖는다. 이때 ab의 값은?

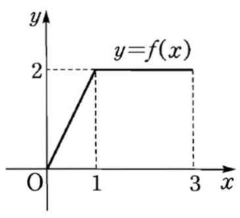
① -5π ② -2π ③ 0
④ 2π ⑤ 5π

4. 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 P에서의 접선과 x축 및 두 직선 $x=2,\ x=6$ 으로 둘러싸인 사다리꼴의 넓이의 최솟값을 구하여라.

5. 정적분 $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ 의 값과 반지름의 길이가 r 인 원의 넓이가 같을 때, r 의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\sqrt{2}$
④ $\sqrt{3}$　⑤ 2

6. $0 \le x \le 3$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 정적분 $\int_0^2 e^x f(x+1)\,dx$ 의 값을 구하면?



① $2e^2-2$　② $2e^2$　③ $2e^2+1$
④ $3e^2-2$　⑤ $3e^2-1$

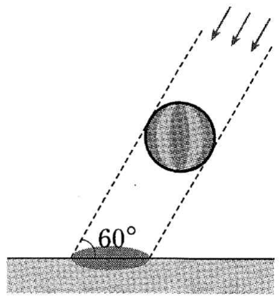
7. 곡선 $y=\ln(a-x)$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1 일 때, 상수 a 의 값은? (단, $a>1$)

① $\frac{1}{2}e$　② e　③ $2e$
④ e^2　⑤ $2e^2$

8. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}e^x+1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때,

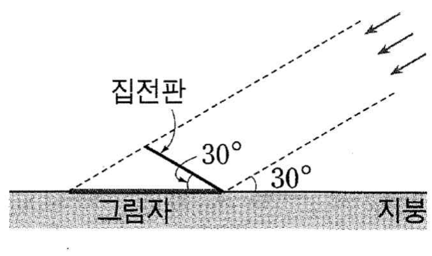
$\int_0^1 f(x)dx+\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}e+1} g(x)dx$ 의 값을 구하여라.

9. 아래쪽 그림과 같이 구 모양의 애드벌룬이 하늘에 떠 있다. 태양이 지면과 60°의 각도로 비출 때, 지면 위에 생긴 애드벌룬의 그림자의 넓이는 $8\sqrt{3}\pi m^2$이다. 이때 애드벌룬의 반지름의 길이는 몇 m인지 구하여라.

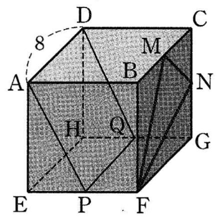


10. 아래쪽 그림은 지붕과 30°의 각을 이루면서 설치되어 있는 태양열 집전판과 그 그림자를 나타낸 것이다. 지붕이 태양 빛과 이루는 각의 크기가 30°일 때, 지붕 위에 생긴 집전판의 그림자의 넓이가 21이다. 태양열 집전판의 넓이는?

① $3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $5\sqrt{3}$
④ $6\sqrt{3}$ ⑤ $7\sqrt{3}$



11. 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 8인 정육면체에서 네 모서리 EF, GH, BC, CG의 중점을 각각 P, Q, M, N이라 할 때, $\triangle FNM$의 평면 $APQD$ 위로의 정사영의 넓이는?



① $\frac{24}{5}$ ② $\frac{24\sqrt{2}}{5}$ ③ $\frac{48}{5}$
④ $\frac{24\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{48\sqrt{5}}{5}$

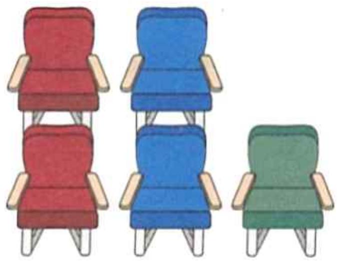
12. 점 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 4)$에서 나온 빛에 의하여 xy평면에 구 $x^2+y^2+z^2-2z=0$의 그림자가 생긴다. 이 그림자의 넓이를 구하여라.

13. 두 구 $x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z-6=0$, $x^2+y^2+z^2-4x-10y-2z+a=0$이 만나지 않도록 하는 자연수 a의 개수는?

① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

14. 구 $x^2+y^2+z^2+kx-6y+10z+18=0$이 xy평면과 만나서 생기는 원의 넓이를 S, yz평면과 만나서 생기는 원의 넓이를 S'이라 하자. $S:S'=3:1$일 때, 상수 k에 대하여 k^2의 값을 구하여라.

15. 아래쪽 그림과 같은 좌석에 다섯 명의 학생이 앉아 발레 공연의 일부를 관람했다. 10분간의 휴식 시간 후 2부 공연을 관람하기 위해 임의로 좌석에 앉을 때, 한 사람만 1부 공연에 앉은 열과 같은 열의 좌석에 앉게 되는 방법의 수를 구하여라.



16. 각 자리의 숫자의 합이 4인 자연수를 작은 수부터 순서대로 나열했을 때, 가장 작은 다섯 자리 자연수는 몇 번째 수인지 구하여라.

17. 지우와 혜리가 각각 정답이 한 개인 오지선다형 문제 5개를 풀었는데 혜리는 1번 문제부터 5번 문제까지의 답을 각각 1, 2, 3, 4, 5로 택했고, 지우는 답을 모두 3으로 택했다. 이때 지우와 혜리 둘 다 3문제씩 맞히는 경우의 수를 구하여라.

18. 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키는 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는?

> (가) $A\cap B=\varnothing$
> (나) $n(A)=n(B)=2$
> (다) 집합 A의 원소 중 가장 큰 수는 집합 B의 원소 중 가장 큰 수보다 크다.

① 70 ② 84 ③ 90
④ 96 ⑤ 105

19. 10명의 회원으로 구성된 동아리에서 각 회원이 동아리 모임에 참석할 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 구성원의 $\frac{4}{5}$ 이상이 참석할 때 동아리 활동을 진행할 수 있다고 하면 동아리 활동이 진행될 확률이 $\frac{n}{2^7}$이다. 이때 자연수 n의 값을 구하여라.

20. 한 개의 주사위를 60번 던질 때, 6의 약수가 k번 나올 확률을 $\mathrm{P}(k)$라 하자. 이때 $\sum_{k=1}^{30}\{\mathrm{P}(2k-1)-\mathrm{P}(2k)\}$의 값을 구하여라.

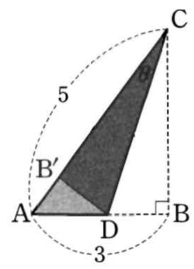
21. 함수 $f(x)=\log_5 x+2$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 다음 중 a의 값에 관계없이 항상 일정한 값을 갖는 것은? (단, $a\neq 0$)

① $g(a)+g(-a)$ ② $g(a)-g(-a)$ ③ $g(a)+g\left(\frac{1}{a}\right)$

④ $g(a)g\left(\frac{1}{a}\right)$ ⑤ $g(a)g(-a)$

22. 함수 $f(x)=\begin{cases} 24-2x & (x<12) \\ 1-\log_3(x-9) & (x\geq 12) \end{cases}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $(g\circ g\circ g)(k)=3$을 만족시키는 상수 k의 값을 구하여라.

23. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=5$, $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 모양의 종이를 변 AB 위에 한 점 D를 잡고 선분 CD를 접는 선으로 하여 접었더니 꼭짓점 B가 변 AC 위의 한 점 B′과 겹쳐졌다. $\angle ACD=\theta$라 하면 $\cos^2\theta=\frac{q}{p}$일 때, $p-q$의 값을 구하여라.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



24. 직선 $x\sin\theta+y\cos\theta=6$과 점 $P(4\sin\theta,\ 2\sin\theta)$사이의 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하여라.

25. 함수 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

| 보 기 |

ㄱ. 치역은 $\left\{y \,\middle|\, y \le \frac{1}{e}\right\}$ 이다.

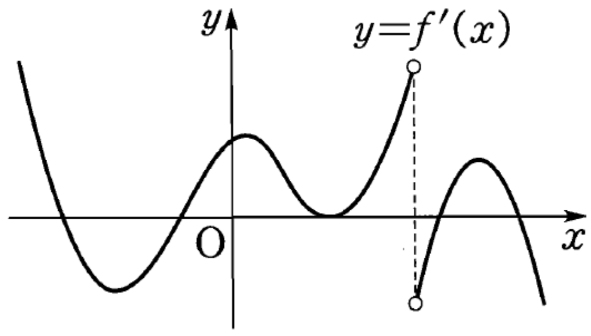
ㄴ. $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=0,\ y=0$ 이다.

ㄷ. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}\left(e,\ \frac{1}{e}\right)$ 에 대하여 선분 AB 는 부등식 $y \ge f(x)$ 의 영역에 있다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

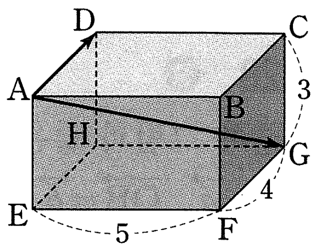
26. 함수 $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ 의 최댓값을 구하여라.

27. 연속함수 $y=f(x)$ 의 도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 개수를 구하여라.



28. 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 등식 $f(x)-g(x)=\frac{1}{10}x^2-\cos x$ 를 만족시킬 때, 방정식 $\frac{g'(x)}{f'(x)}+\frac{f'(x)}{g'(x)}=2$ 의 서로 다른 실근의 개수를 구하여라.
(단, $f'(x)g'(x) \ne 0$)

29. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{EF}=5, \overline{FG}=4, \overline{CG}=3$ 인 직육면체에서 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AD}+(1-k)\overrightarrow{AG}$를 만족시키는 점 P의 자취의 길이는?
(단, $0 \le k \le 1$)



① 4 ② 5 ③ $\sqrt{34}$
④ $\sqrt{41}$ ⑤ 6

30. 좌표공간의 세 점 A,B,C의 위치벡터가 각각 $\overrightarrow{OA}=(5,\ -2,\ 3)$, $\overrightarrow{OB}=(6,\ 2,\ 1)$, $\overrightarrow{OC}=(4,\ 0,\ 2)$이다. $\angle ACB$의 크기는 θ라 할 때, $\sin\theta$의 값을 구하여라.

31. 네 점 $A(-1,\ 3,\ 3), B(1,1,2), P(1,0,-1), Q(x,y,z)$에 대하여 벡터 $\overrightarrow{PQ}$는 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 평행한 단위벡터이다. 이 때 xyz의 값을 구하여라. (단, $xyz>0$)

32. 구 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$가 평면 $2x+y+2z=11$과 만날 때 생기는 원의 넓이는?

① 3π ② 4π ③ 9π
④ 16π ⑤ 25π

33. 구 $(x-4)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$이 평면 $x+2y+2z-5=0$과 만날 때 생기는 원의 중심의 좌표를 $\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$라 할 때, $a+b+c$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

34. 두 점 $\left(0,\ \frac{2\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$, $(0,\ 0,\ 2)$를 지나는 평면 α가 구 $x^2+y^2+z^2=1$에 접할 때, 점 $(\sqrt{3},\ 0,\ 4)$와 평면 α 사이의 거리를 구하여라.

35. 7개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4를 일렬로 나열할 때, 짝수 번째에는 짝수를 나열하는 방법의 수를 구하여라.

36. 좌표평면 위의 점들의 집합 $S=\{(x,\ y)\,|\,x,\ y\text{는 정수}\}$가 있다. 집합 S에 속하는 한 점에서 S에 속하는 다른 점으로 이동하는 '점프'는 다음 규칙을 만족시킨다.

점 P에서 한 번의 점프로 점 Q로 이동할 때, 선분 PQ의 길이는 1 또는 $\sqrt{2}$이다.

점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$에서 점 $\mathrm{B}(3,\ 0)$까지 6번만 점프하여 이동하는 방법의 수를 구하여라.
(단, 이동하는 과정에서 지나는 점이 다르면 다른 경우이다.)

37. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$에 대하여 함수 $f: X \to Y$중에서 $f(2) \neq 2$인 함수의 개수는?

① 64　② 96　③ 100
④ 124　⑤ 125

38. 빨간색, 파란색, 흰색의 세 깃발이 있다. 이 깃발들을 다섯 번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수는? (단, 깃발은 한 번 이상 올려야 하고, 두 개 이상의 깃발을 동시에 올리지 않는다.)

① 351　② 354　③ 357
④ 360　⑤ 363

39. 집합 $A=\{x|x$는 한 자리의 자연수$\}$에 대하여 집합 A의 부분집합 중에서 2를 원소로 갖고 원소의 개수가 3인 부분집합의 개수를 구하여라.

40. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 함수 $f: X \to Y$ 중에서 치역의 원소가 3개인 함수의 개수를 구하여라.[40]

[난문현답 기출 정답]

1. ⑤
2. ④
3. ③
4. 51
5. ⑤
6. 27
7. 40
8. ③
9. ①
10. ②

[추가 과제 정답]

1) **정답** ②

$x^\circ = \dfrac{\pi}{180}x$ 이므로

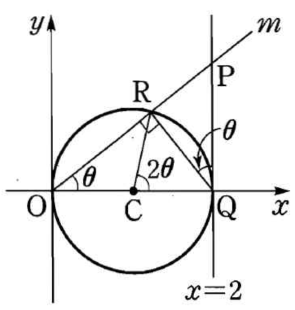
$$\lim_{x\to\infty} x^\circ \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{180}x\sin\frac{1}{x} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\dfrac{1}{x}=t$ 로 놓으면 $x\to\infty$ 일 때 $t\to 0$ 이므로 ㉠은

$$\lim_{t\to 0}\frac{\pi}{180}\cdot\frac{\sin t}{t}=\frac{\pi}{180}\cdot 1=\frac{\pi}{180}$$

2) **정답** $\dfrac{1}{2}$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{RC}$, $\overline{RQ}$ 를 그으면
$\angle RCQ=2\theta$ 이므로 부채꼴 RCQ 에서
$l=2\theta$
또 $\triangle PRQ \backsim \triangle PQO$ 이므로
$\angle PQR=\angle POQ=\theta$
직각삼각형 POQ 에서
$\overline{PQ}=\overline{OQ}\tan\theta=2\tan\theta$
직각삼각형 PRQ 에서



$$\overline{PR}=\overline{PQ}\sin\theta=2\tan\theta\sin\theta=\frac{2\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{PR}}{l^2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{2\sin^2\theta}{\cos\theta}}{4\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{2\cos\theta}$$

$$=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

3) **정답** ①

$f'(x)=-4\sin x+2\sin 2x=-4\sin x+4\sin x\cos x$
$\quad =4\sin x(\cos x-1)$
$f'(x)=0$ 에서 $\sin x=0$ 또는 $\cos x=1$
$\therefore\ x=\pi\ (\because\ 0<x<2\pi)$

x	(0)	$\cdots$	π	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	-5	↗	

따라서 $f(x)$ 는 $x=\pi$ 에서 극솟값 -5 를 가지므로
$a=\pi$, $b=-5$ $\quad\therefore\ ab=-5\pi$

4) **정답** 8

[풀이]

$f(x)=\sqrt{x}$ 로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

점 P의 좌표를 $(t,\ \sqrt{t})\ (t>0)$ 라 하면 점 P 에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ 이므로 접선의 방정식은 $y-\sqrt{t}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)$

$$\therefore\ y=\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2} \quad\cdots\cdots ㉠$$

$x=2$ 를 ㉠에 대입하면 $\quad y=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\cdot 2+\dfrac{\sqrt{t}}{2}=\dfrac{2+t}{2\sqrt{t}}$

$x=6$ 을 ㉠에 대입하면 $\quad y=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\cdot 6+\dfrac{\sqrt{t}}{2}=\dfrac{6+t}{2\sqrt{t}}$

따라서 사다리꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2+t}{2\sqrt{t}}+\frac{6+t}{2\sqrt{t}}\right)\cdot(6-2)=2\cdot\frac{4+t}{\sqrt{t}}=2\left(\frac{4}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right)$$

이때, $\dfrac{4}{\sqrt{t}}>0$, $\sqrt{t}>0$ 에서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{4}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}\ge 2\sqrt{\frac{4}{\sqrt{t}}\cdot\sqrt{t}}=4$$

(단, 등호는 $t=4$ 일 때 성립)

이므로 사다리꼴의 넓이의 최솟값은
$2\cdot 4=8$

5) **정답** ②

$x=2\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ 로 놓으면 $\quad\dfrac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$

또한 $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=2$ 일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta\, d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2\theta\, d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=\Big[\,2\theta+\sin 2\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$

따라서 반지름의 길이가 r 인 원의 넓이가 π 이므로

$$\pi r^2=\pi \qquad \therefore\ r=1\ (\because\ r>0)$$

[다른 풀이]

$y=\sqrt{4-x^2}$ 의 그래프는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2 인 원의 위쪽 반원이므로 $\displaystyle\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ 의 값은 반지름의 길이가 2 인 원의 넓이의 $\dfrac{1}{4}$ 과 같다.

$$\therefore\ \int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2=\pi$$

따라서 $\pi r^2=\pi$ 이므로 $\quad r=1\ (\because\ r>0)$

6) **정답** ①

[풀이]

$x+1=t$ 로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=1$

또한 $x=0$ 일 때 $t=1$, $x=2$ 일 때 $t=3$ 이므로

$$\int_0^2 e^x f(x+1)\,dx=\int_1^3 e^{t-1}f(t)\,dt$$

이때 $1\le t\le 3$ 에서 $f(t)=2$ 이므로

$$\int_1^3 e^{t-1}f(t)\,dt=\int_1^3 2e^{t-1}dt=\Big[2e^{t-1}\Big]_1^3=2e^2-2$$

[다른 풀이]

함수 $y=f(x+1)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향

으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

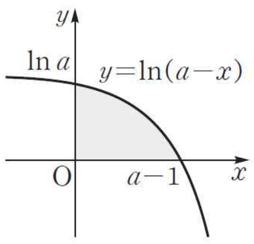
$$f(x+1)=\begin{cases}2x+2 & (-1\le x\le 0)\\ 2 & (0\le x\le 2)\end{cases}$$

$$\therefore \int_0^2 e^x f(x+1)\,dx=\int_0^2 2e^x\,dx=\left[2e^x\right]_0^2=2e^2-2$$

7) **정답** ②

$y=\ln(a-x)$에서 $\quad a-x=e^y$

$\therefore\ x=a-e^y$



오른쪽 그림에서 어두운 부분의 넓이는

$$\int_0^{\ln a}(a-e^y)\,dy$$

$$=\left[ay-e^y\right]_0^{\ln a}$$

$$=a\ln a-a+1$$

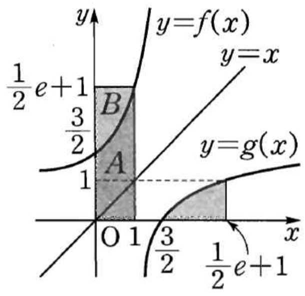
따라서 $a\ln a-a+1=1$이므로

$a(\ln a-1)=0,\quad \ln a-1=0\ (\because\ a>1)$

$\ln a=1\quad \therefore\ a=e$

8) **정답** $\frac{1}{2}e+1$

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같이 $\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}e+1}g(x)dx$의 값은 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=\frac{1}{2}e+1$로 둘러싸인 도형의 넓이, 즉 B와 같다.

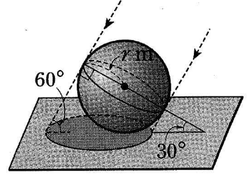


$$\therefore \int_0^1 f(x)dx+\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}e+1}g(x)dx=A+B=\frac{1}{2}e+1$$

9) 답 $2\sqrt{3}$

[해설]

애드벌룬의 반지름의 길이를 $r\,m$라 하고 오른쪽 그림과 같이 애드벌룬을 지면과 접하도록 이동시키면 태양 빛과 수직으로 만나는 구의 지름이 지면과 이루는 각의 크기가 30°이다.



이때 $8\sqrt{3}\pi\cos30^\circ=\pi r^2$이므로

$$8\sqrt{3}\pi\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\pi r^2$$

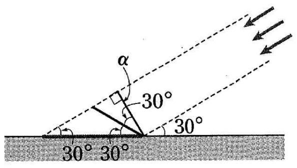
$r^2=12\quad \therefore r=2\sqrt{3}$

10) 답 ⑤

[해설]

오른쪽 그림과 같이 태양 빛과 수직인 평면을 α라 하면 평면 α가 지붕과 이루는 각의 크기는 60°이다.

또 집전판의 평면 α 위로의 정사영은 집전판의 그림자의 평면 α 위로의 정사영과 같다.



이때 집전판의 넓이를 S, 정사여의 넓이를 S'이라 하면

$S'=S\cos30^\circ \quad\cdots\cdots$ ㉠

한편 집전판의 그림자의 넓이가 21이므로

$S'=21\cos60^\circ \quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad S\cos30^\circ=21\cos60^\circ$

$$\therefore S=21\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=7\sqrt{3}$$

11) 답 ⑤

[해설]

(평면 $AEHD$) // (평면 FNM) 이므로 삼각형 FNM과 평면 $APQD$가 이루는 각의 크기는 평면 $AEHD$와 평면 $APQD$가 이루는 각의 크기와 같다.

$\overline{EP}=4$이므로

$$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{EP}^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$$

$\angle EAP=\theta$라 하면

$$\cos\theta=\frac{\overline{AE}}{\overline{AP}}=\frac{8}{4\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

이때

$$\triangle FNM=\square BFGC-(\triangle BFM+\triangle FGN+\triangle CMN)$$

$$=8\times8-\left(\frac{1}{2}\times4\times8+\frac{1}{2}\times8\times4+\frac{1}{2}\times4\times4\right)$$

$$=64-40=24$$

이므로 $\triangle FNM$의 평면 $APQD$ 위로의 정사영의 넓이는

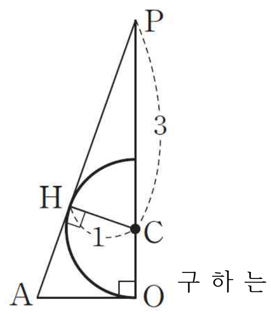
$$\triangle FNM\cos\theta=24\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{48\sqrt{5}}{5}$$

12) [정답]

$x^2+y^2+z^2-2z=0$에서 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$

구의 중심을 C라 하면 $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 구의 접선 PA에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle$PHC에서



$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

이때 $\triangle\mathrm{PAO}\backsim\triangle\mathrm{PCH}$이므로

$\overline{\mathrm{PO}}:\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{HC}}$

$4:2\sqrt{2}=\overline{\mathrm{OA}}:1$

$$\therefore\ \overline{OA}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

따라서 그림자는 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원이므로 구하는 그림자의 넓이는 $\pi(\sqrt{2})^2=2\pi$

13) [정답] 15

$x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z-6=0$에서

$(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=9$

이므로 중심의 좌표가 $(-1,\ -1,\ -1)$이고 반지름의 길이가 3인 구이다.

또, $x^2+y^2+z^2-4x-10y-2z+a=0$

$(x-2)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=30-a$이므로 중심의 좌표가 $(2,\ 5,\ 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{30-a}$인 구이다.

두 구의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(2+1)^2+(5+1)^2+(1+1)^2}=7$

$0<\sqrt{30-a}<6$이므로 두 구가 만나지 않으려면

$3+\sqrt{30-a}<7,\ \sqrt{30-a}<4$

$0<30-a<16\qquad \therefore\ 14<a<30$

따라서 구하는 자연수 a는 15, 16, 17, $\cdots$, 29의 15개이다.

14) [정답] 228

$x^2+y^2+z^2+kx-6y+10z+18=0$에서

$$\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+(y-3)^2+(z+5)^2=\frac{k^2}{4}+16\quad\cdots\cdots ㉠$$

xy평면 위의 점은 z좌표가 0이므로 $z=0$을 ㉠에 대입하면

$$\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{k^2}{4}-9$$

yz평면 위의 점은 x좌표가 0이므로 $x=0$을 ㉠에 대입하면

$(y-3)^2+(z+5)^2=16$

즉, $S=\left(\frac{k^2}{4}-9\right)\pi,\ S'=16\pi$이므로

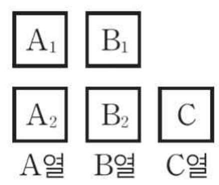
$$\left(\frac{k^2}{4}-9\right)\pi:16\pi=3:1$$

$$48\pi=\left(\frac{k^2}{4}-9\right)\pi\quad \therefore\ k^2=228$$

15) **정답** 36

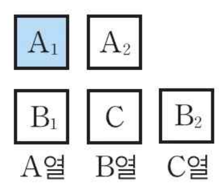
[풀이]

오른쪽 그림과 같이 1부 공연에 다섯 명의 학생이 앉은 좌석을 각각 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{B_2}$, C라 하자.



(ⅰ) 1부 공연 때 A열에 앉은 학생 중에서 한 명이 2부 공연에서도 A열에 앉는 경우

$\mathrm{A_1}$에 앉았던 학생이 A열에 앉으면 나머지 학생들은 오른쪽 그림과 같이 앉을 수 있다.



이때 $\mathrm{A_1}$과 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_1}$는 자리를 바꿀 수 있고, 같은 열에 앉은 학생들끼리도 자리를 바꿀 수 있으므로 가능한 방법의 수는

$2!\cdot2!\cdot2!\cdot2!=16$

(ⅱ) 1부 공연 때 B열에 앉은 학생 중에서 한 명이 2부 공연에서도 B열에 앉는 경우

$\mathrm{B_1}$에 앉았던 학생이 B열에 앉으면 나머지 학생들은 오른쪽

그림과 같이 앉을 수 있다.

따라서 가능한 방법의 수는 (ⅰ)과 같이

$2!\cdot2!\cdot2!\cdot2!=16$

A열	B열	C열
B_2	B_1	
C	A_1	A_2

(ⅲ) 1부 공연 때 C열에 앉은 학생 한 명이 2부 공연에서도 C열에 앉는 경우

C에 앉았던 학생이 C열에 앉으면 나머지 학생들은 오른쪽 그림과 같이 앉을 수 있다.

이때 A_1과 A_2, B_1과 B_2는 자리를 바꿀 수 있으므로 가능한 방법의 수는

$2!\cdot2!=4$

A열	B열	C열
B_1	A_1	
B_2	A_2	C

이상에서 구하는 방법의 수는

$16+16+4=36$

16) **정답** 36번째

[풀이]

각 자리의 숫자의 합이 4인 네 자리 이하의 자연수는 다음의 숫자들을 나열하여 만들 수 있다.

$4,\ 0,\ 0,\ 0$ 또는 $3,\ 1,\ 0,\ 0$ 또는 $2,\ 2,\ 0,\ 0$ 또는 $2,\ 1,\ 1,\ 0$ 또는 $1,\ 1,\ 1,\ 1$

(ⅰ) $4,\ 0,\ 0,\ 0$으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$\frac{4!}{3!}=4$

(ⅱ) $3,\ 1,\ 0,\ 0$으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(ⅲ) $2,\ 2,\ 0,\ 0$으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$\frac{4!}{2!\cdot2!}=6$

(ⅳ) $2,\ 1,\ 1,\ 0$으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(ⅴ) $1,\ 1,\ 1,\ 1$로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

1

이상에서 각 자리의 숫자의 합이 4인 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$4+12+6+12+1=35$

따라서 구하는 자연수는 36번째 수이다.

17) **정답** 6

지우와 혜리 둘 다 3문제씩 맞히기 위해서는 3번의 정답은 반드시 3이어야 한다.

따라서 지우는 3번 문제를 제외한 나머지 4개의 문제 중에서 2문제를 맞히고, 혜리는 3번 문제와 지우가 맞힌 2문제를 제외한 나머지 2문제 중에서 2문제를 맞혀야 하므로 구하는 경우의 수는

${}_4C_2\cdot{}_2C_2=6\cdot1=6$

18) **정답** ⑤

[풀이]

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$의 7개의 수 중에서 4개를 뽑으면 그 중에 가장 큰 수는 집합 A의 원소가 된다.

나머지 3개의 수 중에서 집합 A의 다른 한 원소를 택하면 집합 B의 두 원소가 정해지므로 구하는 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는

${}_7C_4\cdot{}_3C_1=35\cdot3=105$

19) **정답** 7

$10\times\frac{4}{5}=8$(명)이므로 8명 이상 참석해야 동아리 활동을 진행할 수 있다.

(ⅰ) 8명이 참석할 확률은 ${}_{10}C_8\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{45}{2^{10}}$

(ⅱ) 9명이 참석할 확률은 ${}_{10}C_9\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{10}{2^{10}}$

(ⅲ) 10명이 참석할 확률은 ${}_{10}C_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{2^{10}}$

이상에서 동아리 활동이 진행될 확률은

$\frac{45}{2^{10}}+\frac{10}{2^{10}}+\frac{1}{2^{10}}=\frac{56}{2^{10}}=\frac{7}{2^7}$

$\therefore\ n=7$

20) **정답** 0

[풀이]

주사위를 한 번 던질 때, 6의 약수가 나올 확률이 $\frac{2}{3}$이므로

$$\mathrm{P}(k)={}_{60}C_k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{60-k}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 60)$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ &\sum_{k=1}^{30}\{\mathrm{P}(2k-1)-\mathrm{P}(2k)\}\\
&=\{\mathrm{P}(1)-\mathrm{P}(2)\}+\{\mathrm{P}(3)-\mathrm{P}(4)\}+\cdots+\{\mathrm{P}(59)-\mathrm{P}(60)\}\\
&=\left\{{}_{60}C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^{59}-{}_{60}C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{58}\right\}\\
&\quad+\left\{{}_{60}C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^{57}-{}_{60}C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^{56}\right\}\\
&\quad+\cdots+\left\{{}_{60}C_{59}\left(\frac{2}{3}\right)^{59}\left(\frac{1}{3}\right)^1-{}_{60}C_{60}\left(\frac{2}{3}\right)^{60}\left(\frac{1}{3}\right)^0\right\}\\
&={}_{60}C_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^{60}-\left\{{}_{60}C_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^{60}-{}_{60}C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^{59}\right.\\
&\quad\left.+{}_{60}C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{58}-\cdots+{}_{60}C_{60}\left(\frac{2}{3}\right)^{60}\left(\frac{1}{3}\right)^0\right\}\\
&=\left(\frac{1}{3}\right)^{60}-\sum_{k=0}^{60}{}_{60}C_k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(-\frac{1}{3}\right)^{60-k}\\
&=\left(\frac{1}{30}\right)^{60}-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)^{60}\\
&=\left(\frac{1}{3}\right)^{60}-\left(\frac{1}{3}\right)^{60}=0
\end{aligned}$$

21) 정답 ⑤

$y=\log_5 x+2$로 놓으면 $y-2=\log_5 x$ $\quad\therefore\ x=5^{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=5^{x-2}$ $\quad\therefore\ g(x)=5^{x-2}$

① $g(a)+g(-a)=5^{a-2}+5^{-a-2}=5^{-2}(5^a+5^{-a})$

② $g(a)-g(-a)=5^{a-2}-5^{-a-2}=5^{-2}(5^a-5^{-a})$

③ $g(a)+g\left(\frac{1}{a}\right)=5^{a-2}+5^{\frac{1}{a}-2}=5^{-2}\left(5^a+5^{\frac{1}{a}}\right)$

④ $g(a)g\left(\frac{1}{a}\right)=5^{a-2}\cdot5^{\frac{1}{a}-2}=5^{a+\frac{1}{a}-4}$

⑤ $g(a)g(-a)=5^{a-2}\cdot5^{-a-2}=5^{-4}=\frac{1}{625}$

22) 정답 26

$(g\circ g\circ g)(k)=3$에서 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로

$(f\circ f\circ f)(3)=k$

이때 $f(3)=24-2\cdot3=18,\ f(18)=1-\log_3(18-9)=-1,$

$f(-1)=24-2\cdot(-1)=26$이므로

$k=(f\circ f\circ f)(3)=f(f(f(3)))=f(f(18))$

$=f(-1)=26$

23) **정답** 1

$\triangle BCD\equiv\triangle B'CD$에서 $\angle ACB=2\theta$이고, $\overline{BC}=\sqrt{5^2-3^2}=4$이므로

$$\cos2\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{4}{5}$$

$$\therefore\ \cos^2\theta=\frac{1+\cos2\theta}{2}=\frac{1+\frac{4}{5}}{2}=\frac{9}{10}$$

따라서 $p=10,\ q=9$이므로

$p-q=1$

24) **정답** 8

점 $\mathrm{P}(4\sin\theta,\ 2\sin\theta)$와 직선 $x\sin\theta+y\cos\theta-6=0$사이의 거리는

$$\frac{|4\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-6|}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=|4\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-6|$$

$f(\theta)=4\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-6$으로 놓으면

$$f(\theta)=4\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}+\sin2\theta-6$$

$= \sin 2\theta - 2\cos 2\theta - 4$

$= \sqrt{5}\sin(2\theta+\alpha) - 4$

(단, $\sin\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$)

이때 $-1 \le \sin(2\theta+\alpha) \le 1$ 이므로

$-\sqrt{5}-4 \le \sqrt{5}\sin(2\theta+\alpha)-4 \le \sqrt{5}-4$

즉 $-\sqrt{5}-4 \le f(\theta) \le \sqrt{5}-4$ 이므로

$4-\sqrt{5} \le |f(\theta)| \le 4+\sqrt{5}$

따라서 $M=4+\sqrt{5}$, $m=4-\sqrt{5}$ 이므로

$M+m=8$

25) 정답 ③

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 에서 $x>0$ 이고

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}$$

$f'(x)=0$ 에서 $1-\ln x=0$

$\ln x = 1$ $\quad\therefore\ x=e$

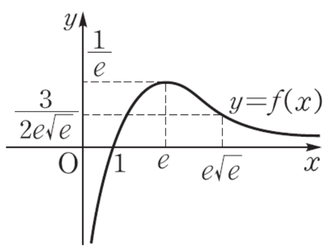
$f''(x)=0$ 에서 $2\ln x-3=0$

$\ln x=\dfrac{3}{2}$ $\quad\therefore\ x=e\sqrt{e}$

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	$e\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{3}{2e\sqrt{e}}$	↘

또 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x}=-\infty$ 이므로

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 치역은 $\left\{y \,\middle|\, y \le \dfrac{1}{e}\right\}$ 이다.

ㄴ. 점근선의 방정식은 x축, y축, 즉 $y=0$, $x=0$ 이다.

ㄷ. $f(1)=0$, $f(e)=\dfrac{1}{e}$ 이므로 두 점 A, B는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이다.

이때 $x \le e\sqrt{e}$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 위로 볼록한 모양이므로 $\overline{\text{AB}}$ 는 $y=f(x)$ 의 그래프의 아래쪽에 있다.

즉, $\overline{\text{AB}}$ 는 부등식 $y \le f(x)$ 의 영역에 있다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

26) 정답 $\dfrac{1}{2e}$

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$ 에서 $x>0$ 이고

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\ln x\cdot 2x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

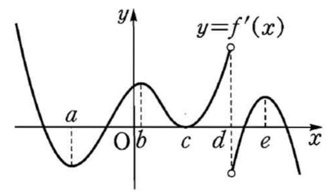
$f'(x)=0$ 에서 $\quad \ln x=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\ x=\sqrt{e}$

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{2e}$	↘

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(\sqrt{e})=\dfrac{1}{2e}$ 이다.

27) 정답 4

오른쪽 그림과 같이 a, b, c, d, e 를 정하고 $f''(x)$ 의 부호를 조사하면 다음과 같다.



x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$

$x=a$, $x=b$, $x=c$, $x=e$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 개수는 4 이다.

28) 정답 5

방정식 $\dfrac{g'(x)}{f'(x)}+\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=2$ 의 양변에 $f'(x)g'(x)$ 를 곱하여 정리하면

$\{f'(x)\}^2-2f'(x)g'(x)+\{g'(x)\}^2=0$

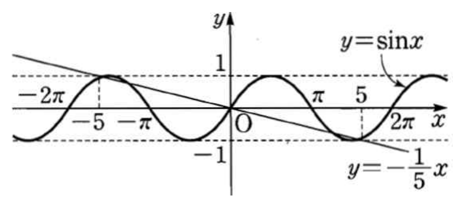
$\{f'(x)-g'(x)\}^2=0$

$\therefore\ f'(x)-g'(x)=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠ $\quad$ • 30 %

$f(x)-g(x)=\dfrac{1}{10}x^2-\cos x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$f'(x)-g'(x)=\dfrac{1}{5}x+\sin x$ $\cdots\cdots$ ㉡ $\quad$ • 20 %

㉠, ㉡에서 $\dfrac{1}{5}x+\sin x=0$ 이고, 이 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=\sin x$ 와 직선 $y=-\dfrac{1}{5}x$ 의 교점의 개수와 같으므로 다음 그림에서 5 개다. $\quad$ • 50 %



29) 답 ③

[해설] $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AD}+(1-k)\overrightarrow{AG}$에서

$\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AG}=k(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AG})$

$\therefore \overrightarrow{GP}=k\overrightarrow{GD}$

$0 \le k \le 1$에서 점 P의 자취는 선분 GD이므로

$\overline{GD}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$

30) 답 $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

[해설]

$\overrightarrow{CA}=(1,-2,1)$, $\overrightarrow{CB}=(2,2,-1)$이므로

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=\frac{1\times2+(-2)\times2+1\times(-1)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{-3}{3\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{6}}$$

$$=\frac{\sqrt{30}}{6}\ (\because 0 \le \theta \le \pi)$$

31) 답 $\dfrac{40}{27}$

[해설] $\overrightarrow{AB}=(2,\ -2,\ -1)$, $\overrightarrow{PQ}=(x-1,\ y,\ z+1)$.

두 벡터 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PQ}$가 서로 평행하므로

$\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{AB}(k\neq0)$

$(x-1,\ y,\ z+1)=k(2,\ -2,\ -1)$

$\therefore x-1=2k,\ y=-2k,\ z+1=-k$

$\therefore x=2k+1,\ y=-2k,\ z=-k-1$

이때 $\overrightarrow{PQ}$는 단위벡터이므로

$|\overrightarrow{PQ}|=1$

$\sqrt{(2k)^2+(-2k)^2+(-k)^2}=1$

$|3k|=1, \quad \therefore k=\pm\dfrac{1}{3}$

㉠에 $\therefore k=\pm\dfrac{1}{3}$를 대입하면

$x=\frac{5}{3},\ y=-\frac{2}{3},\ z=-\frac{4}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{3},\ y=\frac{2}{3},\ z=-\frac{2}{3}$

이때 $xyz>0$이므로

$x=\frac{5}{3},\ y=-\frac{2}{3},\ z=-\frac{4}{3}$

$\therefore xyz=\frac{40}{27}$

32) 답 ④

[해설] 구의 중심 $(1,\ 2,\ -1)$과 평면 $2x+y+2z-11=0$ 사이의

거리는 $\frac{|2+2-2-11|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{9}{3}=3$

구의 반지름의 길이는 5이므로 평면과 구가 만날 때 생기는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5^2-3^2}=4$

따라서 구하는 원의 넓이는 16π이다.

33) 답 ④

[해설] 구의 중심을 C라 하면 $C(4,\ 2,\ 3)$

이므로 $\overrightarrow{CA}=(a-4,\ b-2,\ c-3)$

주어진 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면 $\vec{n}=(1,\ 2,\ 2)$이고 $\overrightarrow{CA}//\vec{n}$

이므로

$\overrightarrow{CA}=k\vec{n}\ (k\neq 0)$

즉 $a-4=k,\ b-2=2k,\ c-3=2k$이므로

$a=k+4,\ b=2k+2,\ c=2k+3$

이때 점 A가 주어진 평면 위에 있으므로

$a+2b+2c-5=0$

$k+4+2(2k+2)+2(2k+3)-5=0$

$\therefore k=-1$

따라서 $a=3,\ b=0,\ c=1$이므로

$a+b+c=4$

34) 답 1

[해설] 평면 α의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라 하면 평면 α가

점 $(0,\ \frac{2\sqrt{3}}{3},\ 0)$을 지나므로

$\frac{2\sqrt{3}}{3}b+d=0 \qquad \therefore b=-\frac{\sqrt{3}}{2}d$

또 평면 α가 점 $(0,\ 0,\ 2)$를 지나므로

$2c+d=0 \qquad \therefore c=-\frac{1}{2}d$

구 $x^2+y^2+z^2=1$과 평면 α가 접하면 구의 중심 $(0,\ 0,\ 0)$과 평면 α 사이의 거리는 구의 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=1$

$\therefore d^2=a^2+b^2+c^2$

㉠, ㉡을 위의 식에 대입하면

$d^2=a^2+\frac{3}{4}d^2+\frac{1}{4}d^2,\ a^2=0$

$\therefore a=0$

따라서 평면 α의 방정식은

$-\frac{\sqrt{3}}{2}dy-\frac{1}{2}dz+d=0$, 즉 $\sqrt{3}y+z-2=0$

이므로 점 $(\sqrt{3},\ 0,\ 4)$와 평면 α 사이의 거리는

$\frac{|4-2|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=1$

35) 정답 12

다음 그림에서 짝수 2, 2, 4는 △에, 홀수 1, 3, 3, 3은 ○에 놓이게 된다.

○ △ ○ △ ○ △ ○

이때 3개의 숫자 2, 2, 4를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

4개의 숫자 1, 3, 3, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수는

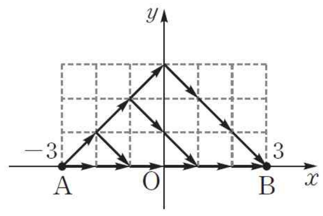
$\frac{4!}{3!}=4$

따라서 구하는 방법의 수는 $3\cdot 4=12$

36) 정답 141

[풀이]

점 $A(-3,\ 0)$에서 점 $B(3,\ 0)$까지 6번만 점프하여 이동하려면 오른쪽 그림과 같이 길이가 1인 점프의 방향은 →, 길이가 $\sqrt{2}$인 점프의 방향은 ↗ 또는 ↘이어야 한다.



• 10 %

이때 점 $A(-3,\ 0)$에서 점 $B(3,\ 0)$까지 이동하는 방법은 다음과 같다.

(ⅰ) →, →, →, →, →, →로 점프하는 경우의 수는

1

(ⅱ) ↗, ↘, →, →, →, →로 점프하는 경우의 수는

$\frac{6!}{4!}=30$

(ⅲ) ↗, ↗, ↘, ↘, →, →로 점프하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}=90$

(ⅳ) ↗, ↗, ↗, ↘, ↘, ↘로 점프하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\cdot 3!}=20$

이상에서 구하는 방법의 수는

$1+30+90+20=141$

37) 정답 ③

X에서 Y로의 함수의 개수는 ${}_5\Pi_3=5^3=125$

X에서 Y로의 함수 중 $f(2)=2$인 함수의 개수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 함수의 개수는 $125-25=100$

38) 정답 ⑤

깃발을 한 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_3\Pi_1=3$

깃발을 두 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_3\Pi_2=3^2$

같은 방법으로 깃발을 세 번, 네 번, 다섯 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 각각 ${}_3\Pi_3$, ${}_3\Pi_4$, ${}_3\Pi_5$이므로 구하는 신호의 개수는

$3+3^2+3^3+3^4+3^5=\frac{3(3^5-1)}{3-1}=363$

39) 정답 (1) 28

(1) 2를 제외한 8개의 수 중에서 2개를 택하는 방법의 수와 같으므로 구하는 부분집합의 개수는

${}_8C_2=28$

40) 정답 1500

[풀이]

집합 X의 5개의 원소 중에서 치역의 원소가 되는 3개를 택하는 방법의 수는

${}_5C_3=10$

이때 치역의 원소를 $a,\ b,\ c$라 하면 $a,\ b,\ c$ 중에서 함숫값을 택하는 경우는

$a,\ a,\ a,\ b,\ c$ 또는 $a,\ a,\ b,\ b,\ c$

의 2가지이다.

(ⅰ) 함숫값이 $a,\ a,\ a,\ b,\ c$인 함수의 개수는

${}_3C_1\cdot\frac{5!}{3!}=60$

(ⅱ) 함숫값이 $a,\ a,\ b,\ b,\ c$인 함수의 개수는

${}_3C_2\cdot\frac{5!}{2!2!}=90$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수의 개수는

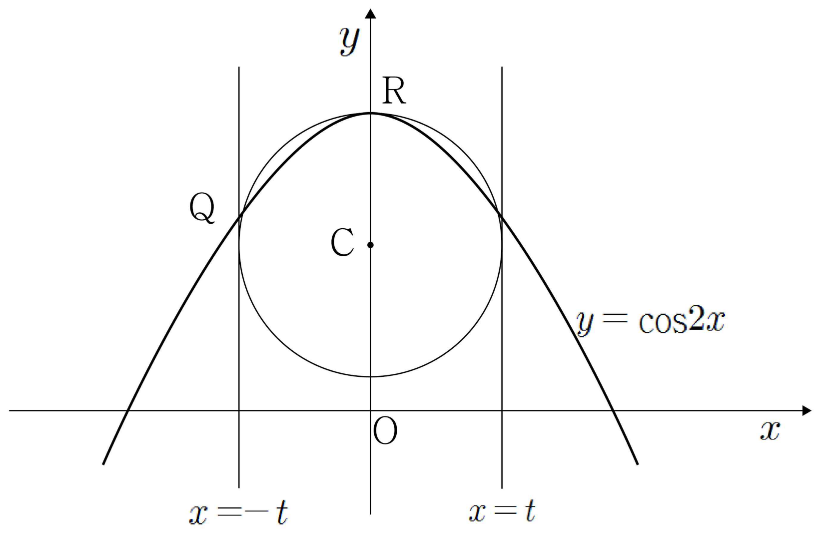
$10\cdot(60+90)=1500$

제 4 회

1. 2014년 수능
2. 2016년 사관학교
3. 2013년 9월 평가원
4. 2011년 10월 교육청
5. 2008년 10월 교육청
6. 2015년 사관학교
7. 2011년 9월 평가원
8. 2016년 경찰대
9. 2005년 9월 평가원
10. 2009년 수능

1. 좌표평면에서 $a>1$인 자연수 a에 대하여 두 곡선 $y=4^x$, $y=a^{-x+4}$과 직선 $y=1$로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표가 y좌표가 모두 정수인 점의 개수가 20 이상 40이하가 되도록 하는 a의 개수를 구하시오.

2. 좌표평면에서 곡선 $y=\cos 2x$가 두 직선 $x=t$, $x=-t$ $\left(0<t<\frac{\pi}{4}\right)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 곡선 $y=\cos 2x$가 y축과 만나는 점을 R이라 하자. 세 점 P, Q, R을 지나는 원의 중심을 $\mathrm{C}(0, f(t))$라 할 때, $\lim_{t\to 0+} f(t)=\alpha$이다. 100α의 값을 구하시오.



3. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고
> $g'(x) \le \dfrac{1}{3}$이다.
>
> (나) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)}=\frac{8}{9}$

$f(1)$의 값은?

① -11　② -9　③ -7
④ -5　⑤ -3

4. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=e^x+\dfrac{1}{x}$이 $x=\alpha$에서 극값을 가질 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? (단, e는 자연로그의 밑이다.)

> ㄱ. $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha^2}$
> ㄴ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 존재한다.
> ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 세 이차곡선

$$x^2=4py(p\neq 0),\ \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ \ (x\neq\pm a),\ \ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ \ (|x|>a)$$

각각에 대하여, 곡선 위에 있는 임의의 점에서의 접선의 기울기들의 집합을 M_1, M_2, M_3라 하자. 다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

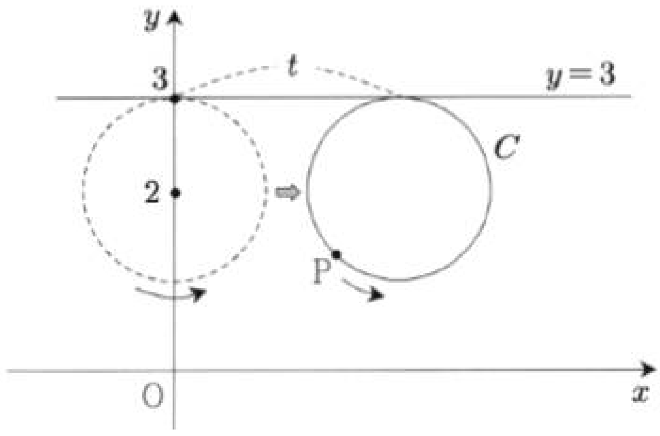
ㄱ. $\left|\frac{2b}{a}\right|\in M_3$

ㄴ. $M_1=M_2$

ㄷ. $M_2\supset M_3$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 좌표평면에 중심이 $(0,2)$이고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있고, 이 원 위의 점 P가 점 $(0,3)$의 위치에 있다. 원 C는 직선 $y=3$에 접하면서 x축의 양의 방향으로 미끄러지지 않고 굴러간다.
그림은 원 C가 굴러간 거리가 t일 때, 점 P의 위치를 나타낸 것이다.

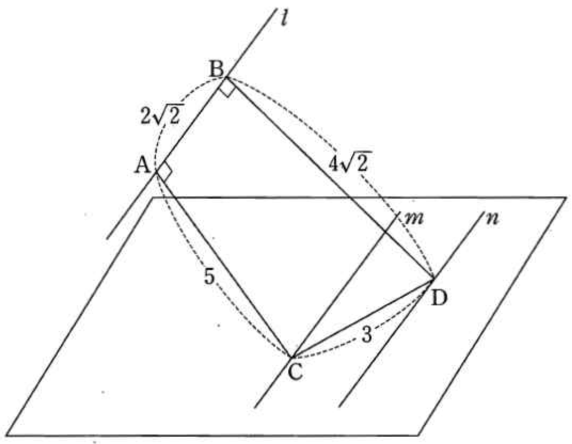


점 P가 나타내는 곡선을 F라 하자. $t=\frac{2}{3}\pi$일 때, 곡선 F 위의 점에서의 접선의 기울기는?

① $-\sqrt{3}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
④ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

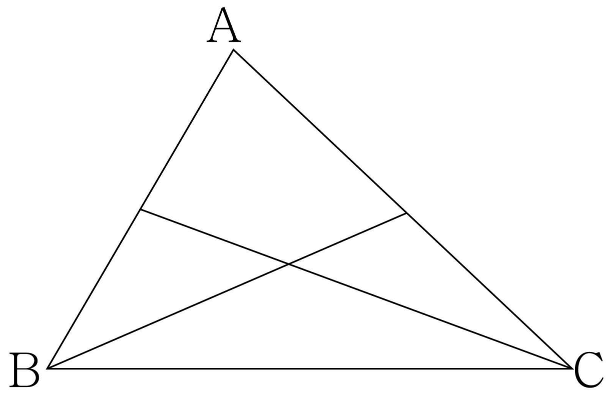
7. 같은 평면 위에 있지 않고 서로 평행한 세 직선 l, m, n이 있다. 직선 l 위의 두 점 A, B, 직선 m 위의 점 C, 직선 n 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{CD}=3$
(나) $\overline{AC}\perp l$, $\overline{AC}=5$
(다) $\overline{BD}\perp l$, $\overline{BD}=4\sqrt{2}$



두 직선 m, n을 포함하는 평면과 세 점 A, C, D를 포함하는 평면이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $15\tan^2\theta$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

8. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}$의 n등분점과 꼭짓점 C를 잇고, $\overline{AC}$의 n등분점과 꼭짓점 B를 잇는다. 이때, 만들어지는 삼각형(△ABC도 포함)의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $n=2$인 다음 그림에서 $a_2=8$이다. a_5의 값을 구하여라.



9. 표본공간 S는 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 12\}$이고 모든 근원사건의 확률은 같다. 사건 A가 $A=\{4, 8, 12\}$일 때, 사건 A와 독립이고 $n(A\cap X)=2$인 사건 X의 개수를 구하시오.
(단, $n(B)$는 집합 B의 원소의 개수를 나타낸다.)

10. 어떤 모집단에서 임의로 100명을 추출하여 구한 모비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $\left[\frac{1}{10}-c, \frac{1}{10}+c\right]$이었다. 같은 모집단에서 n명을 임의로 추출하여 구한 모비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $\left[\frac{1}{9}-s(n), \frac{1}{9}+s(n)\right]$이고 $s(n)=\frac{50}{81}c$이다. n의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따를 때, $P(|Z|\leq 1.96)=0.95$이다.)

추가 과제

1. 함수 $y=\sin^2 x+4\cos x+a$의 최댓값이 5일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

2. 삼각형 ABC에 대하여 $4\sin^2 A+4\cos A=5$가 성립할 때, $\sin\frac{B+C-2\pi}{2}$의 값을 구하여라.

3. 함수 $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x-x$에 대하여 $f'(\alpha)=\sqrt{2}-1$을 만족시키는 α의 값은? $\left(\text{단, } 0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\right)$

① $\frac{\pi}{12}$ ② $\frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{\pi}{4}$
④ $\frac{5}{12}\pi$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

4. 함수 $f(x)=4\sin^2 x+2\sin x\cos x+2\cos^2 x$의 최솟값은? $\left(\text{단, } 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $3-\sqrt{2}$
④ 2 ⑤ $3+\sqrt{2}$

5. 함수 $f(x)=\int_{2}^{x}(1-t^2)e^t\,dt$는 $x=a$에서 극댓값을 갖고, $x=b$에서 극솟값을 갖는다. 이때 $a-2b$의 값을 구하여라.

6. $f(x)=2^t+\ln t$일 때, $\lim_{x\to1}\frac{1}{x^3-1}\int_{1}^{x}f(t)\,dt$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

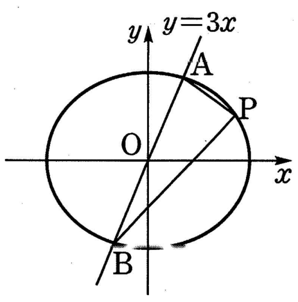
7. 두 곡선 $y=4\sqrt{x}$, $x=4\sqrt{y}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

8. 함수 $f(x)=\sqrt{x-2}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_{0}^{2}g(x)dx+\int_{2}^{6}f(x)dx$의 값을 구하여라.

9. 점 P $(4, 4)$에서 타원 $2x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 접점을 각각 Q (x_1, y_1), R (x_2, y_2)라 할 때, x_1x_2의 값은?

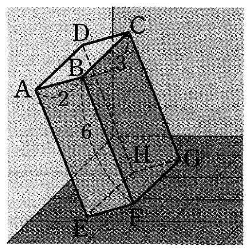
① $-\frac{2}{3}$　② $-\frac{1}{2}$　③ $-\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{2}{3}$

10. 오른쪽 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$과 직선 $y=3x$가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 타원 위의 점 P(a, b)에 대하여 삼각형 PAB의 넓이가 최대일 때, $a+b$의 값은? (단, $a>0$)

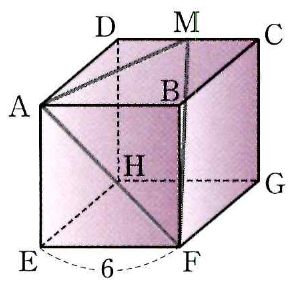


① $\frac{7\sqrt{13}}{13}$　② $\frac{8\sqrt{13}}{13}$　③ $\frac{9\sqrt{13}}{13}$
④ $\frac{10\sqrt{13}}{13}$　⑤ $\frac{11\sqrt{13}}{13}$

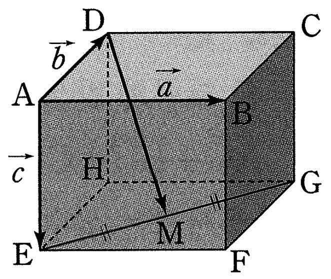
11. 오른쪽 그림과 같이 마룻바닥과 수직인 벽면에 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=3$, $\overline{BF}=6$인 직육면체가 모서리 AD는 벽면에 모서리 EH는 마룻바닥에 놓이도록 세워져 있다. 직사각형 $ABCD$의 마룻바닥 위로의 정사영의 넓이가 2일 때, 직사각형 $BFGC$의 벽면 위로의 정사영의 넓이를 구하여라.



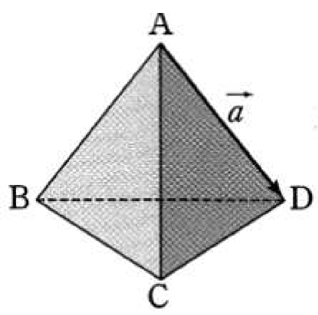
12. 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 6인 정육면체에서 모서리 CD의 중점을 M이라 할 때, 삼각형 AFM의 무게중심과 점 B 사이의 거리를 구하여라.



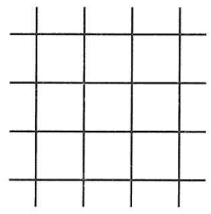
13. 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AD}=\vec{b}, \overrightarrow{AE}=\vec{c}$라 하고, 선분 EG의 중점을 M이라 하자. $\overrightarrow{DM}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$일 때, 실수 x, y, z에 대하여 xyz의 값을 구하여라.



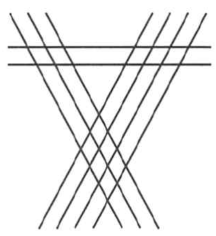
14. 오른쪽 그림은 한 모서리의 길이가 2인 정사면체이다. $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$라 하고 정사면체의 꼭짓점 중 서로 다른 두 점을 각각 시점과 종점으로 하는 벡터를 $\vec{x}$라 할 때, $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{x})=4$를 만족시키는 벡터 $\vec{x}$의 개수를 구하여라.



15. 오른쪽 그림과 같이 가로 방향의 평행한 직선 4개와 세로 방향의 평행한 직선 4개가 각각 수직으로 만나고 있다. 직선 사이의 간격이 일정하다고 할 때, 이 직선으로 만들 수 있는 정사각형이 아닌 직사각형의 개수를 구하여라.



16. 오른쪽 그림과 같이 2개의 평행선, 3개의 평행선, 4개의 평행선이 만나고 있다. 이들 평행선으로 만들어지는 평행사변형이 아닌 사다리꼴의 개수를 구하여라.



17. 10 미만의 자연수 중에서 서로 다른 5개의 숫자를 뽑을 때, 홀수와 짝수를 각각 적어도 2개씩 뽑는 방법의 수를 구하여라.

18. 1부터 9까지의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 숫자를 택하여 네 자리의 비밀번호를 만들려고 한다. 홀수 2개와 짝수 2개로 이루어진 비밀번호의 개수를 구하여라.

19. 1, 2, 3, 4를 일렬로 나열하여 네 자리 정수 $a_1a_2a_3a_4$를 만들 때, $a_i \neq i$를 만족시키는 정수의 개수는? (단, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$)

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

20. 1, 2, 3, 4, 5가 각각 하나씩 적힌 5개의 농구공을 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5라 쓰여진 가방에 각각 1개씩 넣을 때, 2번 공은 A_1에 넣고, k번 공은 A_k에 넣지 않는 방법의 수는? (단, $k=3,\ 4,\ 5$)

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

추가 과제

21. 방정식 $2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)=1$을 풀면? (단, $0<x<2\pi$)

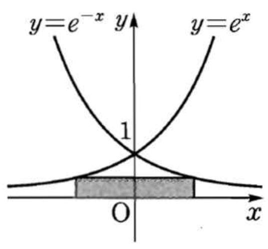
① $x=\frac{\pi}{6}$ ② $x=\frac{\pi}{4}$ ③ $x=\frac{\pi}{3}$

④ $x=\frac{2}{3}\pi$ ⑤ $x=\frac{4}{3}\pi$

22. $0\le x<2\pi$일 때, 방정식 $\sin 4x=\cos 2x$의 서로 다른 실근의 개수를 구하여라.

23. 구간 $[1,\ e^3]$에서 함수 $f(x)=3x-x\ln x$는 $x=\alpha$일 때 최댓값을 갖고, $x=\beta$일 때 최솟값을 가진다. 이때 $\alpha\beta$의 값을 구하여라.

24. 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{-x}$ 위의 두 점을 꼭짓점으로 하고 한 변이 x축 위에 있는 직사각형의 넓이의 최댓값은?

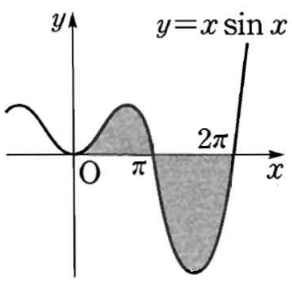


① $\frac{2}{e}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$

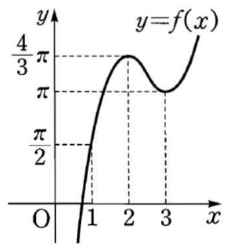
④ e ⑤ $2e$

25. 곡선 $y=(ax^2+1)e^x$ 이 실수 전체의 구간에서 아래로 볼록할 때, 상수 a의 최댓값을 구하여라.

26. 오른쪽 그림과 같이 구간 $[0,\ 2\pi]$에서 곡선 $y=x\sin x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.



27. $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 정적분 $\displaystyle\int_1^3 |f'(x)|\sin f(x)dx$의 값을 구하여라.



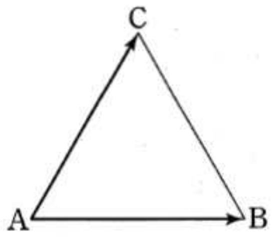
28. 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이다.
>
> (나) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(2x+1)dx=3,\ \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(4x)dx=2$

이때 정적분 $\displaystyle\int_{10}^{20} f(x)dx$의 값을 구하여라.

추가 과제

29. 오른쪽 그림과 같은 삼각형 OAB에서 변 OA를 $1:2$로 내분하는 점을 P, 변 AB의 중점을 Q라 하자. 이때 $\overrightarrow{PQ}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$를 만족시키는 실수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

30. 좌표평면 위의 세 점 $A(0,\ 0)$, $B(3,\ 0)$, $C(0,\ 3)$에 대하여 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=2$일 때, 점 P가 나타내는 도형의 넓이는?

① $\frac{4}{9}\pi$ ② $\frac{4}{3}\pi$ ③ $\frac{16}{9}\pi$
④ 2π ⑤ 4π

31. 좌표평면 위의 두 점 P, Q와 원점 O에 대하여 $|\overrightarrow{OP}|=4$, $|\overrightarrow{OQ}|=9$일 때, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. 이때 $M-m$의 값을 구하여라.

32. 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0},\ |\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=5,\ |\vec{c}|=7$$

일 때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 구하여라.

33. 세 점 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$, $\mathrm{B}(b,\ 0,\ a)$, $\mathrm{C}(0,\ a,\ b)$에 대하여 $a^2+b^2=6$일 때, 삼각형 ABC의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, $a>0$, $b>0$)

34. 점 $\mathrm{P}(a,\ 4,\ b)$에서 x축에 내린 수선의 발을 Q, y축에 내린 수선의 발을 R, 점 P와 zx평면에 대하여 대칭인 점을 S라 하자. 사면체 PQRS의 부피가 32일 때, 원점과 점 P 사이의 거리의 최솟값을 구하여라. (단, $a\neq0$, $b\neq0$)

35. 7개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5를 일렬로 나열할 때, 3, 4, 5는 크기가 작은 것부터 순서대로 나열하는 방법의 수는?

① 90 ② 105 ③ 210
④ 420 ⑤ 1260

36. 7개의 문자 A, B, C, D, E, F, G 중에서 A, B를 포함하여 5개를 뽑아 일렬로 나열할 때, A와 B가 서로 이웃하지 않는 경우의 수는?

① 360 ② 480 ③ 540
④ 600 ⑤ 720

37. 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 2^2)$, $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따르고 $\mathrm{P}(12 \le X \le 16) = \mathrm{P}(24 \le Y \le k)$일 때, 상수 k의 값은?

① 26 ② 28 ③ 30
④ 32 ⑤ 34

38. 확률변수 W, X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 5^2)$, $\mathrm{N}(62,\ 6^2)$, $\mathrm{N}(64,\ 7^2)$을 따를 때,

$$a = \mathrm{P}(W \ge 65),\ b = \mathrm{P}(X \le 56),\ c = \mathrm{P}(Y \ge 70)$$

이라 하자. a, b, c의 대소를 비교하면?

① $a < b < c$ ② $a = b < c$ ③ $b < a < c$
④ $c < a = b$ ⑤ $c = b < a$

39. 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다. 이 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균을 구하여라.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	a	$\frac{1}{4}$	1

40. 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 4)$를 따르는 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출할 때 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 $\mathrm{E}(\overline{X}^2)$을 구하여라.

정답 & 해설

[난문현답 기출 정답]

1. 15
2. 75
3. ①
4. ④
5. ⑤
6. ⑤
7. 30
8. 125
9. 252
10. 288

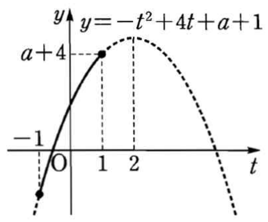
[추가 과제 정답]

1) 정답 1

$y=\sin^2 x+4\cos x+a$
$=(1-\cos^2 x)+4\cos x+a$
$=-\cos^2 x+4\cos x+a+1$ • 40 %

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고
$y=-t^2+4t+a+1=-(t-2)^2=a+5$ • 30 %

따라서 오른쪽 그림에서 $t=1$일 때 최댓값이
$a+4$이므로
$a+4=5$
$\therefore\ a=1$ • 30 %



2) 정답 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$4\sin^2 A+4\cos A=5$에서
$4(1-\cos^2 A)+4\cos A=5$
$4\cos^2 A-4\cos A+1=0,\quad (2\cos A-1)^2=0$
$\therefore\ \cos A=\dfrac{1}{2}$

$0<A<\pi$이므로 $A=\dfrac{\pi}{3}$ • 50 %

이때 $A+B+C=\pi$이므로
$B+C=\pi-A=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$ • 20 %

$\therefore\ \sin\left(\dfrac{B+C-2\pi}{2}\right)=\sin\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)=-\sin\dfrac{2}{3}\pi$
$=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ • 30 %

3) 정답 ④

$f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x-x$에서
$f'(x)=\sqrt{3}\cos x+\sin x-1$
$=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-1$

$f'(\alpha)=\sqrt{2}-1$에서 $2\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)-1=\sqrt{2}-1$
$\therefore\ \sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$에서 $\dfrac{\pi}{3}\le\alpha+\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{5}{6}\pi$이므로
$\alpha+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{4}\pi\qquad\therefore\ \alpha=\dfrac{5}{12}\pi$

4) 정답 ⑤

$f(x)=4\sin^2 x+2\sin x\cos x+2\cos^2 x$
$=4\cdot\dfrac{1-\cos 2x}{2}+\sin 2x+2\cdot\dfrac{1+\cos 2x}{2}$
$=\sin 2x-\cos 2x+3$
$=\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)+3$

$0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ 에서 $-\dfrac{\pi}{4}\le 2x-\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{3}{4}\pi$이므로
$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)\le 1$
$\therefore\ 2\le\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)+3\le 3+\sqrt{2}$

따라서 $f(x)$ 의 최댓값은 $3+\sqrt{2}$이다.

5) 정답 3

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)=(1-x^2)e^x=(1+x)(1-x)e^x$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값, $x=-1$에서 극솟값을 가지므로
$a=1,\ b=-1$
$\therefore\ a-2b=1-2\cdot(-1)=3$

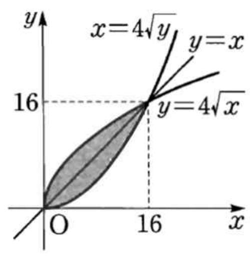
6) 정답 ②

$F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^3-1}\int_1^x f(t)\,dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x^3-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{1}{3}F'(1)=\frac{1}{3}f(1)=\frac{2}{3}$$

7) 정답 $\dfrac{256}{3}$

두 함수 $y=4\sqrt{x}$, $x=4\sqrt{y}$ 는 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
이때 두 곡선의 교점의 x좌표는 곡선 $y=4\sqrt{x}$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같으므로 $4\sqrt{x}=x$에서
$16x=x^2,\ x(x-16)=0\quad\therefore\ x=0$ 또는 $x=16$



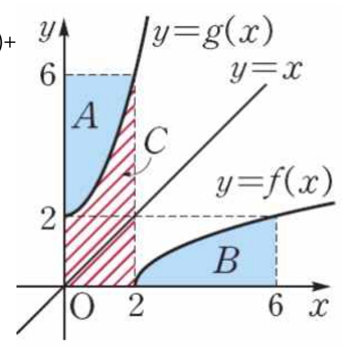
두 곡선 $y=4\sqrt{x}$, $x=4\sqrt{y}$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=4\sqrt{x}$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$2\int_0^{16}(4\sqrt{x}-x)dx=2\left[\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{16}=\frac{256}{3}$$

[유형12] 입체도형의 부피: 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면
밑면으로부터의 높이가 x인 곳에서 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형에서
⇒ 밑면으로부터의 높이가 a일 때의 부피는 $\displaystyle\int_0^a S(x)dx$

8) 정답 12

함수 $f(x)=\sqrt{x-2}$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
오른쪽그림에서 (A의 넓이)$=$(B의 넓이) 이므로
$\displaystyle\int_0^2 g(x)dx+\int_2^6 f(x)dx$=(C의 넓이)+($B$의 넓이)
=(C의 넓이)+(A의 넓이)
$=2\cdot6=12$



9) 답 ②

타원 $2x^2+y^2=4$ 위의 점 $(X,\ Y)$에서의 접선의 방정식은
$2Xx+Yy=4$
이 접선이 점 $(4,4)$를 지나므로
$8X+4Y=4\quad\therefore Y=-2X+1$
이때 $2X^2+Y^2=4$ 이므로

$2X^2+(-2X+1)^2=4$

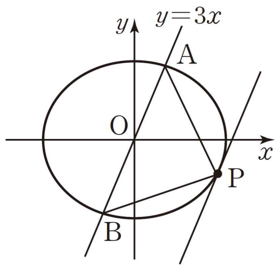
$6X^2-4X-3=0$

이때 x_1, x_2는 이 이차방정식의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$x_1, x_2=-\frac{1}{2}$$

10) 답 ③

[해설]



$\overline{AB}$의 길이는 일정하므로 타원 위의 점 $P(a,\ b)$와 직선 $y=3x$ 사이의 거리가 최대일 때, 즉 오른쪽 그림과 같이 점 $P(a,\ b)$에서의 접선이 직선 $y=3x$와 평행할 때 $\triangle PAB$의 넓이가 최대가 된다.

타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점 $P(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{ax}{12}+\frac{by}{9}=1$$

$$\therefore\ y=-\frac{3a}{4b}x+\frac{9}{b}$$

즉 $-\frac{3a}{4b}=3$이므로 $b=-\frac{1}{4}a$ ……㉠

이때 $\frac{a^2}{12}+\frac{b^2}{9}=1$이므로

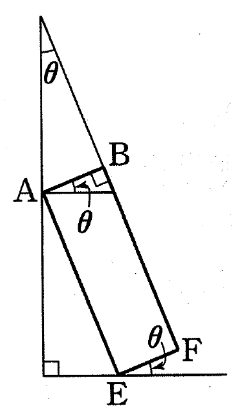
$$\frac{a^2}{12}+\frac{a^2}{144}=1,\quad 13a^2=144$$

$$a^2=\frac{144}{13}\qquad \therefore\ a=\frac{12\sqrt{13}}{13}\ (\because\ a>0)$$

이를 ㉠에 대입하면 $b=-\frac{3\sqrt{13}}{13}$

$$\therefore\ a+b=\frac{9\sqrt{13}}{13}$$

11) 답 6



오른쪽 그림과 같이 직사각형 $BFGC$와 벽면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면 직사각형 $ABCD$와 마룻바닥이 이루는 각의 크기도 θ이다.

•40%

직사각형 $ABCD$의 넓이는

$2\times3=6$

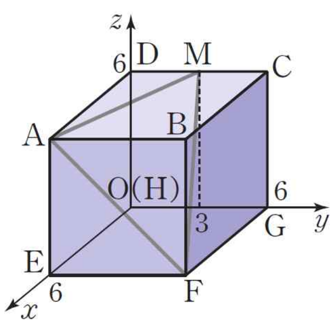
이므로 $6\cos\theta=2$

$\therefore \cos\theta=\frac{1}{3}$ •30%

$\square BFGC=3\times6=18$이므로 구하는 정사영의 넓이는

$\square BFGC\cos\theta=18\times\frac{1}{3}=6$ •30%

12) [정답] ③



오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 H를 원점으로 하고 세 모서리 EH, GH, DH가 각각 x축, y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 정육면체를 좌표공간에 놓으면

$A(6,\ 0,\ 6)$, $F(6,\ 6,\ 0)$,

$M(0,\ 3,\ 6)$, $B(6,\ 6,\ 6)$

$\triangle AFM$의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{6+6+0}{3},\ \frac{0+6+3}{3},\ \frac{6+0+6}{3}\right)$$

즉, $(4,\ 3,\ 4)$

따라서 $\triangle AFM$의 무게중심과 점 B사이의 거리는

$$\sqrt{(6-4)^2+(6-3)^2+(6-4)^2}=\sqrt{17}$$

13) 답 $-\frac{1}{4}$

[해설] $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\vec{c}-\vec{b}$, $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HG}=\vec{c}+\vec{a}$

점 M은 $\overline{EG}$의 중점이므로

$$\overrightarrow{DM}=\frac{\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DG}}{2}=\frac{(\vec{c}-\vec{b})+(\vec{c}+\vec{a})}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$$

따라서 $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$, $z=1$ 이므로

$$xyz=-\frac{1}{4}$$

14) 답 2

[해설] $|\vec{a}|=2$이므로 $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{x})=4$에서

$|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{x}=4$,

$4+\vec{a}\cdot\vec{x}=4$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{x}=0$

따라서

$\vec{x}$와 $\vec{a}$는 서로 수직이다.

주어진 정사면체에서 $\overline{AD}$와 수직인 모서리는 $\overline{BC}$이므로

구하는 벡터는 $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$의 2개이다.

15) **정답** (1) 22

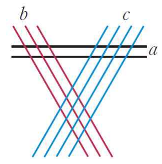
가로 방향의 평행한 직선 중에서 2개, 세로 방향의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 결정되므로 직사각형의 총 개수는

$${}_4C_2\cdot{}_4C_2=6\cdot6=36 \qquad \cdot\ 40\,\%$$

따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$$36-14=22 \qquad \cdot\ 20\,\%$$

16) **정답** 72



오른쪽 그림과 같이 2개의 평행선, 3개의 평행선, 4개의 평행선을 각각 a, b, c라 하면 평행사변형이 아닌 사다리꼴이 결정되는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) a에서 2개, b, c에서 각각 1개씩을 택하는 경우의 수는

${}_2C_2\cdot{}_3C_1\cdot{}_4C_1=1\cdot3\cdot4=12$

(ⅱ) b에서 2개, a, c에서 각각 1개씩을 택하는 경우의 수는

${}_3C_2\cdot{}_2C_1\cdot{}_4C_1=3\cdot2\cdot4=24$

(ⅲ) c에서 2개, a, b에서 각각 1개씩을 택하는 경우의 수는

${}_4C_2\cdot{}_2C_1\cdot{}_3C_1=6\cdot2\cdot3=36$

이상에서 구하는 사다리꼴의 개수는

$12+24+36=72$

17) **정답** 100

홀수와 짝수를 각각 적어도 2개씩 뽑을 때, 홀수의 개수를 a, 짝수의 개수를 b라 하면 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$

10 미만의 자연수 중에서 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개, 짝수는 2, 4, 6, 8의 4개이므로

(ⅰ) 홀수 2개, 짝수 3개를 뽑는 방법의 수는

${}_5C_2\cdot{}_4C_3=10\cdot4=40$

(ⅱ) 홀수 3개, 짝수 2개를 뽑는 방법의 수는

${}_5C_3\cdot{}_4C_2=10\cdot6=60$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는

$40+60=100$

18) **정답** 1440

홀수 1, 3, 5, 7, 9의 5개 중에서 2개를 선택하는 방법의 수는

${}_5C_2=10$

짝수 2, 4, 6, 8의 4개 중에서 2개를 선택하는 방법의 수는

${}_4C_2=6$

홀수 2개와 짝수 2개를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$4!=24$

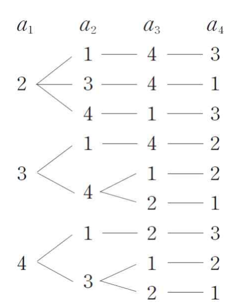
따라서 비밀 번호의 개수는

$10\cdot6\cdot24=1440$

19) **정답** ①

$a_1\neq1$이므로 a_1이 2, 3, 4인 경우에 대하여 a_2, a_3, a_4를 각각 구해 보면 오른쪽과 같다.

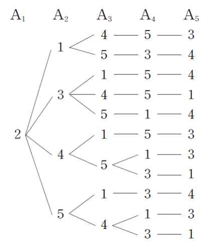
따라서 구하는 정수의 개수는 9이다.



20) **정답** ④

2번 공은 A_1에 넣고 k번 공은 A_k에 넣지 않는 경우를 구해 보면 오른쪽과 같다.

따라서 구하는 방법의 수는 11이다.



21) 정답 ④

$2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)=1$ 에서 $\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

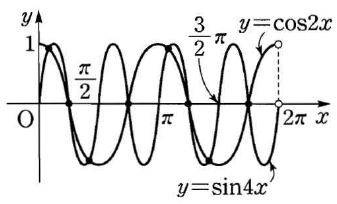
$\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}=t$ 로 놓으면 $0<x<2\pi$ 에서 $-\frac{\pi}{6}<t<\frac{5}{6}\pi$ 이고, 주어진 방정식은 $\sin t=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore\ t=\frac{\pi}{6}$

즉 $\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$ 이므로 $x=\frac{2}{3}\pi$

22) 정답 8

방정식 $\sin 4x=\cos 2x$ 의 실근은 두 함수 $y=\sin 4x$, $y=\cos 2x$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같다.

오른쪽 그림에서 두 함수 $y=\sin 4x$, $y=\cos 2x$ 의 그래프의 교점의 개수는 8이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 8이다.



23) 정답 e^5

$f'(x)=3-\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=2-\ln x$

$f'(x)=0$ 에서 $\ln x=2\quad\therefore\ x=e^2$

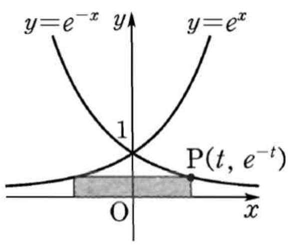
x	1	$\cdots$	e^2	$\cdots$	e^3
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	3	↗	극대	↘	0

따라서 $f(x)$ 는 $x=e^2$ 일 때 극대이며 최대이고, $x=e^3$ 일 때 최솟값을 가지므로 $\alpha=e^2$, $\beta=e^3$

$\therefore\ \alpha\beta=e^5$

24) 정답 ①

두 곡선 $y=e^x$ 과 $y=e^{-x}$ 은 y 축에 대하여 대칭이므로 제1사분면에 있는 직사각형의 꼭짓점을 $\mathrm{P}(t,\ e^{-t})\,(t>0)$, 직사각형의 넓이를 $S(t)$ 라 하면



$S(t)=2te^{-t}$

$S'(t)=2e^{-t}-2te^{-t}=2(1-t)e^{-t}$

$S'(t)=0$ 에서 $t=1$

따라서 $S(t)$ 는 $t=1$ 일 때 최댓값 $\frac{2}{e}$ 를 가지므로 직사각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{2}{e}$ 이다.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(t)$		+	0	−
$S(t)$		↗	$\frac{2}{e}$	↘

25) 정답 $\frac{1}{2}$

$f(x)=(ax^2+1)e^x$ 으로 놓으면

$$f'(x)=2axe^x+(ax^2+1)e^x=(ax^2+2ax+1)e^x$$
$$f''(x)=(2ax+2a)e^x+(ax^2+2ax+1)e^x$$
$$=(ax^2+4ax+2a+1)e^x$$

곡선 $y=f(x)$ 가 실수 전체의 구간에서 아래로 볼록하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f''(x)\geq 0$ 이어야 하므로 부등식

$$ax^2+4ax+2a+1\geq 0\ \ (\because\ e^x>0)\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

이 항상 성립해야 한다.

(ⅰ) $a=0$ 일 때, $1>0$ 이므로 부등식 ㉠이 성립한다.

(ⅱ) $a\neq 0$ 일 때, 부등식 ㉠이 항상 성립해야 하므로 $a>0$

방정식 $ax^2+4ax+2a+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4}=4a^2-a(2a+1)\leq 0$

$2a^2-a\leq 0,\ a(2a-1)\leq 0\qquad\therefore\ 0\leq a\leq\frac{1}{2}$

그런데 $a>0$ 이므로 $0<a\leq\frac{1}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $0\leq a\leq\frac{1}{2}$ 이므로 구하는 a 의 최댓값은 $\frac{1}{2}$ 이다.

26) 정답 4π

$$\int_0^{\pi}x\sin x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}(-x\sin x)dx$$
$$=\left\{\left[-x\cos x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-\cos x)dx\right\}$$
$$+\left\{\left[x\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}-\int_{\pi}^{2\pi}\cos x\,dx\right\}$$
$$=\pi-\left[-\sin x\right]_0^{\pi}+3\pi-\left[\sin x\right]_{\pi}^{2\pi}=4\pi$$

27) 정답 0

함수 $f(x)$ 의 구간 $[1,\ 2]$ 에서 증가하므로 $f'(x)\geq 0$ 이고, 구간 $[2,\ 3]$ 에서 감소하므로 $f'(x)\leq 0$ 이다.

$$\therefore\ \int_1^3|f'(x)|\sin f(x)dx$$
$$=\int_1^2 f'(x)\sin f(x)dx-\int_2^3 f'(x)\sin f(x)dx$$

$f(x)=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$

또한 $x=1$ 일 때 $t=\frac{\pi}{2}$, $x=2$ 일 때 $t=\frac{4}{3}\pi$, $x=3$ 일 때 $t=\pi$ 이므로

$$\int_1^2 f'(x)\sin f(x)dx-\int_2^3 f'(x)\sin f(x)dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{4}{3}\pi}\sin t\,dt-\int_{\frac{4}{3}\pi}^{\pi}\sin t\,dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{4}{3}\pi}\sin t\,dt+\int_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi}\sin t\,dt$$
$$=\left[-\cos t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{4}{3}\pi}+\left[-\cos t\right]_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-1\right)=0$$

28) 정답 36

$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(2x+1)dx=3$ 에서 $2x+1=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$

또한 $x=-\frac{1}{2}$ 일 때 $t=0$, $x=\frac{1}{2}$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(2x+1)dx=\int_0^2 f(t)\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt$$

즉 $\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt=3$ 이므로

$$\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2 f(x)dx=6\qquad\cdots\cdots\ ㉠\ \bullet\ 30\,\%$$

$\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(4x)dx=2$ 에서 $4x=s$ 로 놓으면 $\frac{ds}{dx}=4$

또한 $x=\frac{1}{2}$ 일 때 $s=2$, $x=1$ 일 때 $s=4$ 이므로

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(4x)dx=\int_2^4 f(s)\cdot\frac{1}{4}ds=\frac{1}{4}\int_2^4 f(s)ds$$

즉 $\frac{1}{4}\int_2^4 f(s)ds=2$ 이므로

$$\int_2^4 f(s)ds=\int_2^4 f(x)dx=8\qquad\cdots\cdots\ ㉡\ \bullet\ 30\,\%$$

$f(x+4)=f(x)$ 이므로 ㉠, ㉡에 의하여

$$\int_{10}^{20}f(x)dx$$
$$=\int_2^{12}f(x)dx=\int_2^4 f(x)dx+\int_4^{12}f(x)dx$$
$$=\int_2^4 f(x)dx+2\int_0^4 f(x)dx$$

$$=\int_2^4 f(x)dx+2\left\{\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx\right\}$$

$$=8+2(6+8)=36$$

29) 답 ③

[해설] $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OQ}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$이므로

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$

$=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

따라서 $m=\frac{1}{6}$, $n=\frac{1}{2}$이므로

$m+n=\frac{2}{3}$

30) 답 ①

[해설] 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$

$=(-x,\ -y)+(3-x,\ -y)+(-x,\ 3-y)$

$=(3-3x,\ 3-3y)$

$\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right|=2$에서 $\sqrt{(3-3x)^2+(3-3y)^2}=2$

$(3-3x)^2+(3-3y)^2=4$

$\therefore (x-1)^2+(y-1)^2=\frac{4}{9}$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(1,\ 1)$이고 반지름의 길이가 $\frac{2}{3}$인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$\pi\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}\pi$

31) 답 72

[해설] 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OQ}\right|\cos\theta$

$4\times9\times\cos\theta=36\cos\theta$

$-1\le\cos\theta\le1$이므로 $-36\le\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\le36$

따라서 $M=36$, $m=-36$이므로

$M-m=72$

32) 답 $\frac{\pi}{3}$

[해설] $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$에서 $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$

즉 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|-\vec{c}\right|$이므로 양변을 제곱하면

$\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=\left|\vec{c}\right|^2$

$\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$3^2+2\times3\times5\times\cos\theta+5^2=7^2$, $30\cos\theta=15$

$\therefore \cos\theta=\frac{1}{2}$ $\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$ $(\because 0\le\theta\le\pi)$

33) [정답] $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\overline{AB}=\sqrt{(a-b)^2+b^2+a^2}$, $\overline{BC}=\sqrt{b^2+a^2+(a-b)^2}$,

$\overline{CA}=\sqrt{a^2+(a-b)^2+b^2}$ 이므로

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

즉, $\triangle ABC$는 정삼각형이다.

$\therefore\ \triangle ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{AB}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\{(a-b)^2+b^2+a^2\}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\{2(a^2+b^2)-2ab\}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}(2\cdot6-2ab)=\frac{\sqrt{3}}{2}(6-ab)$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2\ge2\sqrt{a^2b^2}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$=2ab$

$6\ge2ab$ $\therefore\ ab\le3$

따라서 ab의 값이 최대일 때 $\triangle ABC$의 넓이가 최소이므로 구하는 최솟값은

$\frac{\sqrt{3}}{2}(6-3)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

34) [정답] 8

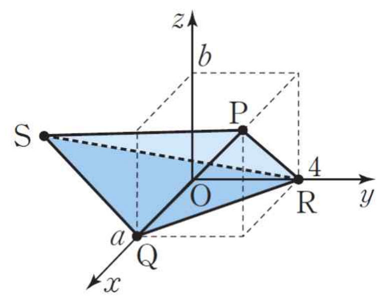
점 $P(a,\ 4,\ b)$에서 x축, y축에 내린 수선의 발은 각각

$(a,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 4,\ 0)$이고, 점 P와 zx평면에 대하여 대칭인 점은

$(a,\ -4,\ b)$이므로

$Q(a,\ 0,\ 0)$, $R(0,\ 4,\ 0)$, $S(a,\ -4,\ b)$

$a>0$, $b>0$인 경우 사면체 PQRS는 오른쪽 그림과 같고 세 점 P, Q, S의 x좌표가 같으므로 $\triangle PSQ$는 yz평면과 평행한 평면 위에 있다.



$\triangle PSQ$의 밑변을 $\overline{SP}$라 하면 높이는 점 P와 xy평면 사이의 거리와 같으므로

$\triangle PQS=\frac{1}{2}\cdot8\cdot|b|=4|b|$

사면체 PQRS의 밑면을 $\triangle PSQ$라 하면 높이는 점 P와 yz평면 사이의 거리와 같으므로 $|a|$이다.

사면체 PQRS의 부피가 32이므로

$\frac{1}{3}\triangle PQS\cdot|a|=\frac{4}{3}|ab|=32$

$\therefore\ |ab|=24$

원점과 점 P 사이의 거리를 l이라 하면 $a^2>0$, $b^2>0$이므로

$l^2=a^2+16+b^2$

$\ge16+2\sqrt{a^2b^2}$ (단, 등호는 $a^2=b^2$일 때 성립)

$=16+2|ab|$

$=16+2\cdot24=64$

따라서 l의 최솟값은 $\sqrt{64}=8$

35) 정답 ③

3, 4, 5의 순서가 정해져 있으므로 3, 4, 5를 모두 x로 생각하여 7개의 문자 1, 1, 2, 2, x, x, x를 일렬로 나열한 후 첫 번째 x는 3, 두 번째 x는 4, 세 번째 x는 5로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

$\frac{7!}{2!\cdot2!\cdot3!}=210$

36) 정답 ⑤

A, B를 제외한 5개의 문자 중에서 3개를 뽑아 일렬로 나열하는 방법의 수는 ${}_5P_3=60$

일렬로 나열한 문자들 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에 A, B를 나열하는 방법의 수는 ${}_4P_2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$60\cdot12=720$

37) [정답] ④

확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(10,\ 2^2)$, $N(20,\ 4^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-10}{2}$, $Z_Y=\frac{Y-20}{4}$

으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(12\le X\le16)=P(24\le Y\le k)$에서

$P\left(\frac{12-10}{2}\le Z_X\le\frac{16-10}{2}\right)$

$=P\left(\frac{24-20}{4}\le Z_Y\le\frac{k-20}{4}\right)$

$\therefore\ P(1\le Z_X\le3)=P\left(1\le Z_Y\le\frac{k-20}{4}\right)$

따라서 $\frac{k-20}{4}=3$이므로

$k-20=12$ $\therefore\ k=32$

38) [정답] ②

$Z_W=\frac{W-60}{5}$, $Z_X=\frac{X-62}{6}$, $Z_Y=\frac{Y-64}{7}$로 놓으면

Z_W, Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$a=P(W\ge65)=P\left(Z_W\ge\frac{65-60}{5}\right)=P(Z_W\ge1)$,

$b=P(X\le56)=P\left(Z_X\le\frac{56-62}{6}\right)$

$=P(Z_X\le-1)=P(Z_X\ge1)$,

$c=P(Y\ge70)=P\left(Z_Y\ge\frac{70-64}{7}\right)=P\left(Z_Y\ge\frac{6}{7}\right)$

이때 $P(Z_W\ge1)=P(Z_X\ge1)<P\left(Z_Y\ge\frac{6}{7}\right)$이므로

$a=b<c$

39) [정답] 2

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{4}+a+\frac{1}{4}=1 \quad \therefore\ a=\frac{1}{2}$$

이때 모집단의 평균은

$$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{4}=2$$

따라서 표본평균 $\overline{X}$의 평균은

$$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=2$$

40) [정답] 102

모평균이 10, 모분산이 4, 표본의 크기가 2이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=10,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{4}{2}=2$$

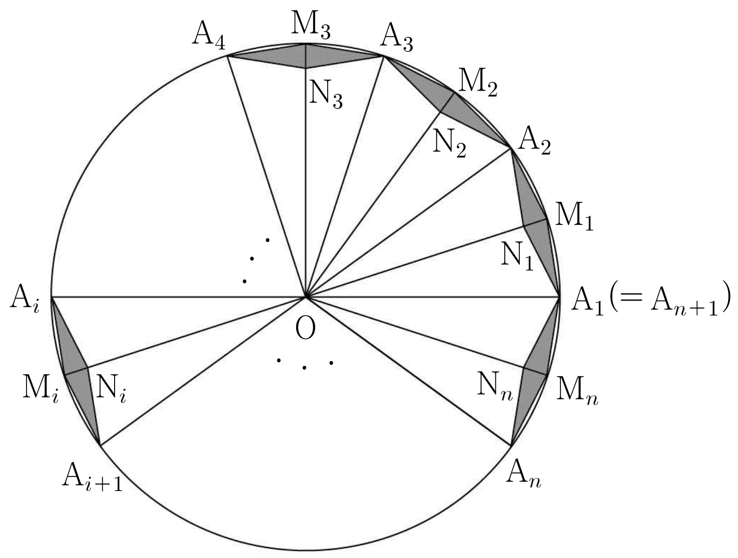
$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2=2+10^2=102$$

제 5 회

1. 2016년 7월 교육청
2. 2011년 10월 교육청
3. 2016년 수능
4. 2012년 6월 평가원
5. 2010년 9월 평가원
6. 2012년 9월 평가원
7. 2006년 수능
8. 2011년 경찰대
9. 2006년 수능
10. 2006년 10월 교육청

1. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원의 둘레를 $n\,(n \geq 4)$등분한 점을 A_1, A_2, $\cdots$, A_n이라 하자.
호 $A_iA_{i+1}\,(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$을 이등분한 점을 M_i라 하고 사각형 $A_iM_iA_{i+1}N_i$가 마름모가 되도록 하는 선분 OM_i 위의 점을 N_i라 하자. n개의 사각형 $A_1M_1A_2N_1$, $A_2M_2A_3N_2$, $A_3M_3A_4N_3$, $\cdots$, $A_nM_nA_{n+1}N_n$의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2 \times S_n\right)$의 값은? (단, $A_{n+1}=A_1$)



① π^3 ② $2\pi^3$ ③ $3\pi^3$ ④ $4\pi^3$ ⑤ $5\pi^3$

2. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수

$$f(x)=x^3-3x^2+15,\quad g(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$$

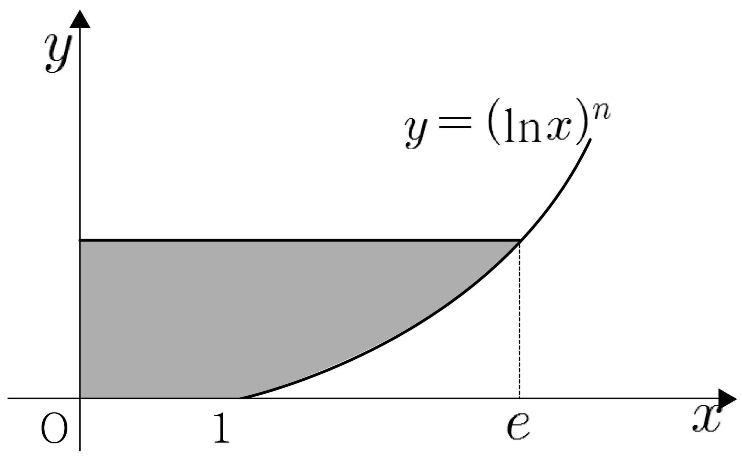
에 대하여 합성함수 $(f \circ g)(x)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

3. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \le b$일 때, $f(x) = a(x-b)^2 + c$이다. (단, a, b, c는 상수이다.) (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = \int_0^x \sqrt{4-2f(t)}\,dt$이다.

$\int_0^6 f(x)dx = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

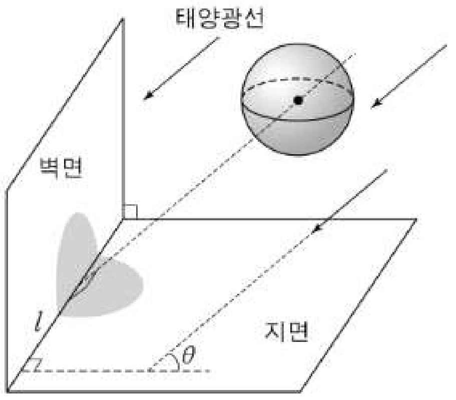
4. 2 이상의 자연수 n에 대하여 곡선 $y = (\ln x)^n (x \ge 1)$과 x축, y축 및 $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 하자
[보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



ㄱ. $1 \le x \le e$일 때, $(\ln x)^n \ge (\ln x)^{n+1}$이다. ㄴ. $S_n < S_{n+1}$ ㄷ. 함수 $f(x) = (\ln x)^n (x \ge 1)$의 역함수를 $g(x)$ 라 하면 $S_n = \int_0^1 g(x)dx$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

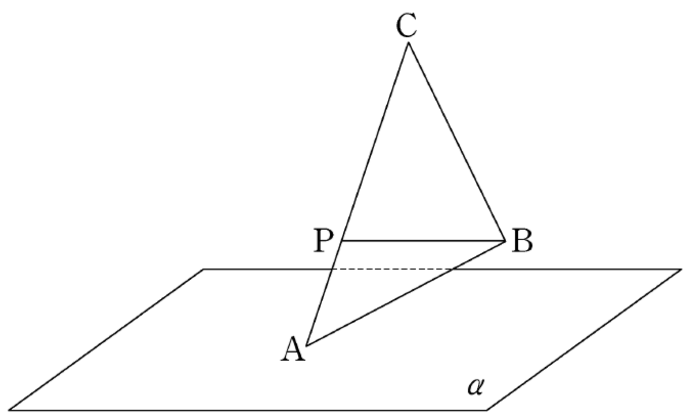
5. 그림과 같이 반지름의 길이가 r인 구 모양의 공이 공중에 있다. 벽면과 지면은 서로 수직이고, 태양광선이 지면과 크기가 θ인 각을 이루면서 공을 비추고 있다. 태양관선과 평행하고 공의 중심을 지나는 직선이 벽면과 지면의 교선 l과 수직으로 만난다.
벽면에 생긴 공의 그림자 위의 점에서 교선 l까지 거리의 최댓값을 a라 하고, 지면에 생기는 공의 그림자 위의 점에서 교선 l까지 거리의 최댓값을 b라 하자 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?



ㄱ. 그림자와 교선 l의 공통부분의 길이는 $2r$이다.
ㄴ. $\theta=60^{\circ}$ 이면 $a<b$이다.
ㄷ. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{r^2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 그림과 같이 평면 α 위에 점 A가 있고, α로부터의 거리가 각각 1,3인 두 점 B,C가 있다. 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{BP}}=4$이다. 삼각형 ABC의 넓이가 9일 때, 삼각형 ABC의 평면 α위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. S^2의 값을 구하시오.



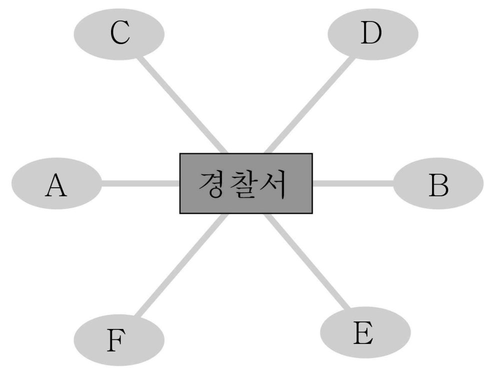
7. 좌표공간에서 xy평면, yz평면, zx평면은 공간을 8개의 부분으로 나눈다. 이 8개의 부분 중에서

구 $(x+2)^2+(y-3)^2+(x-4)^2=24$

가 지나는 부분의 개수는?

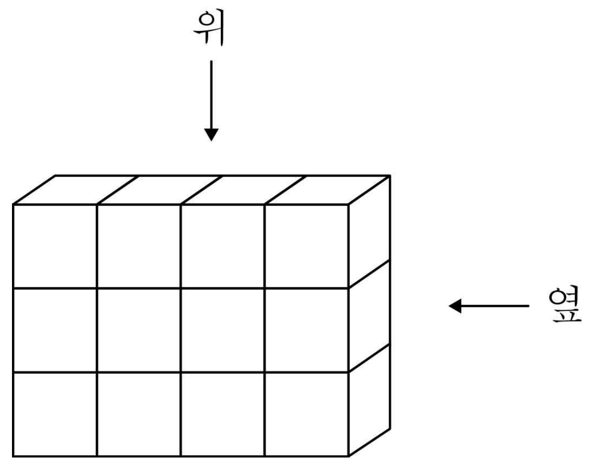
① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

8. 아래 그림과 같이 A, B, C, D, E, F의 6개의 구역이 경찰서를 중심으로 하여 길로 연결되어 있다. A와 B의 넓이는 각각 4km^2이고 C, D, E, F의 넓이는 각각 2km^2이다.
2명의 경찰관이 이 6개의 구역을 넓이의 합이 같아지도록 2부분으로 나누어 1부분씩을 맡고, 각자 맡은 모든 구역을 순서를 정하여 순찰하는 방법의 수는?
(단, 1개의 구역을 나누지는 않는다.)

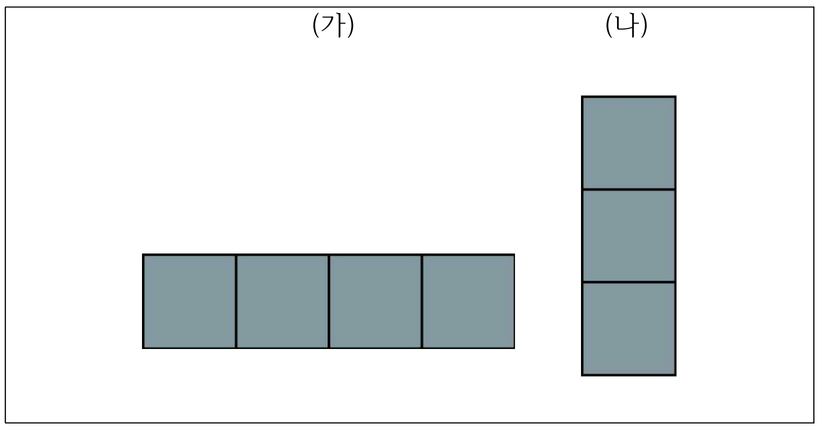


① 524 ② 528 ③ 532
④ 536 ⑤ 540

9. 그림과 같이 크기가 같은 정육면체 모양의 투명한 유리 상자 12개로 직육면체를 만들었다.



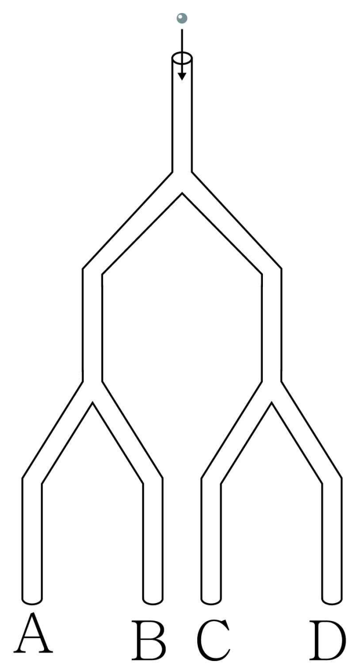
이 중에서 4개의 유리 상자를 같은 크기의 검은 색 유리 상자로 바꾸어 넣은 직육면체를 위에서 내려다 본 모양이 (가), 옆에서 본 모양이 (나)와 같이 되도록 만들 수 있는 방법의 수는?



① 30 ② 36 ③ 42
④ 48 ⑤ 54

10. 아래 그림은 어떤 오락기를 단순화하여 그린 것이다. 이 오락기는 입구에서 공을 넣으면 A, B, C, D 중 어느 한 곳을 지나면서 그 위치의 꺼져 있는 전등은 켜지고, 켜져 있는 전등은 꺼지도록 되어 있다.

예를 들어 전구가 모두 꺼진 상태에서 공을 두 번 넣어 두 번 모두 A를 지나면 A위치의 전등은 커졌다 꺼지고, 각각 A, B를 지나면 A, B 두 위치에 있는 전등은 모두 켜지게 된다. 이와 같이 공이 지날 때마다 전등이 켜지거나 꺼지기를 반복하다가 A, B, C, D 네 곳 모두 전등이 켜지면 게임은 끝난다. 여섯 번째 공을 넣었을 때 이 게임이 끝나게 될 확률을 $\frac{a}{b}$라고 하자. (a, b는 서로소인 자연수). 이때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, 처음 상태는 전등이 모두 꺼져 있으며, 갈림길에서 양쪽 방향으로 공이 지나갈 확률은 서로 같다.)



추가 과제

1. 곡선 $y=x^2e^{3x}$ 위의 점 $\left(-1,\ \frac{1}{e^3}\right)$을 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 y절편은?

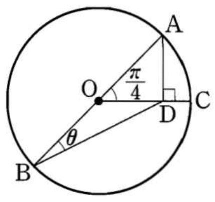
① $\frac{1}{e^3}-e^3$ ② $-\frac{2}{e^3}$ ③ 0
④ $\frac{2}{e^3}$ ⑤ $\frac{1}{e^3}+e^3$

2. 두 곡선 $y=ax^2$, $y=\ln x$가 한 점에서 접할 때, 상수 a의 값을 구하여라.

3. 함수 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$의 그래프는 $y=a\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다. 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라. $\left(단,\ a>0,\ -\frac{\pi}{2}<b<0\right)$

4. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta=\frac{2}{3}$일 때, $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$의 값을 구하여라.

5. 오른쪽 그림에서 선분 AB는 원O의 지름이고 $\angle \mathrm{AOC} = \frac{\pi}{4}$, $\overline{\mathrm{OC}} \perp \overline{\mathrm{AD}}$이다. $\angle \mathrm{ABD} = \theta$라 할 때, $\sin 2\theta$의 값을 구하여라.



6. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(2x^3 - x^2 + x)}{3x^3 + x^2 - x}$의 값은?

① -1　② $-\frac{2}{3}$　③ 0
④ $\frac{2}{3}$　⑤ 1

7. $x > 0$에서 정의된 다음 함수 $f(x)$ 중에서 임의의 양수 a에 대하여 $f(a+h) - f(a) < f'(a)h$를 만족시키는 함수는?
(단, h는 충분히 작은 양수이다.)

① $f(x) = x^2$　② $f(x) = x^3$　③ $f(x) = \frac{2}{x}$
④ $f(x) = 4^x$　⑤ $f(x) = \log x$

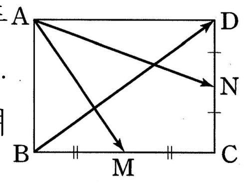
8. 곡선 $y = (\ln ax)^2$의 변곡점이 직선 $y = 2x - 1$ 위에 있을 때, 양수 a의 값을 구하여라.

9. 곡선 $\sin(x+y)+\sin(x-y)=1$ 위의 점 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right)$에서의 접선의 기울기를 구하여라.

10. 곡선 $e^x-e^y=e-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ 0)$에서의 접선을 l_1이라 하고, 점 P를 지나고 직선 l_1에 수직인 직선을 l_2라 하자. 이때 두 직선 l_1, l_2와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

11. 한 변의 길이가 10인 정사각형 $ABCD$에서 변 AB, AD위를 움직이는 점을 각각 P, Q라 하자. $4 \le |\overrightarrow{AP}| \le 7$, $5 \le |\overrightarrow{AQ}| \le 9$일 때, $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AR}$를 만족시키는 점 R가 존재하는 영역의 넓이를 구하여라.

12. 오른쪽 그림과 같이 직사각형 $ABCD$의 두 변 BC와 CD의 중점을 각각 M, N이라 하자. $\overrightarrow{BD}=x\overrightarrow{AM}+y\overrightarrow{AN}$일 때, 실수 x, y에 대하여 xy의 값은?



① -8　② -4　③ -2　④ 2　⑤ 4

추가 과제

13. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가 $x=\cos t$, $y=\sin t-\cos t$일 때, $t=\frac{3}{2}\pi$에서 점 P의 속도 $\vec{v}$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기 θ를 구하여라.
(단, $0 \le \theta < 2\pi$)

14. 평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x=\frac{1}{2}t^2-2t,\quad y=\frac{4\sqrt{2}}{3}t\sqrt{t}$$

로 주어질 때, $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리가 6이 되도록 하는 양수 a의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

15. 6개의 문자 a, b, c, d, e, f를 a는 e보다 앞에 오고, b는 d보다 앞에 오도록 일렬로 나열하는 방법의 수는?

① 150 ② 180 ③ 210
④ 240 ⑤ 270

16. 6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3중 4개를 택하여 만들 수 있는 3의 배수의 개수를 구하여라.

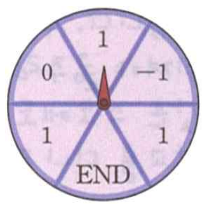
17. 똑같은 장미 8송이와 똑같은 국화 6송이를 A, B, C 세 사람에게 나누어 주려고 한다. 이때 세 사람이 장미와 국화를 모두 한 송이 이상씩은 받도록 나누어 주는 방법의 수를 구하여라.

18. 프로 농구 챔피언 결정전은 7번 경기를 해서 먼저 4번을 이기면 우승을 한다. 실력이 같은 정도로 기대되는 두 팀 H, K가 프로 농구 챔피언 결정전에서 맞붙게 되었을 때, 여섯 번째 경기에서 우승팀이 결정될 확률은? (단, 비기는 경우는 없다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{5}{16}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{7}{16}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

19. 이길 확률이 같은 두 사람 A, B가 게임을 하여 먼저 5번 이기는 사람이 상금을 모두 갖기로 하였다. 5번의 게임에서 A가 3번, B가 2번 이겼을 때, A가 상금을 모두 가질 확률을 구하여라. (단, 비기는 경우는 없다.)

20. 오른쪽 그림과 같이 6등분된 원판에 -1, 0, 1, END가 적혀 있다. 이 원판을 회전시켜 다음 규칙에 따라 수직선 위의 원점에 있는 점 P를 움직이는 시행을 최대 4번 할 수 있다.

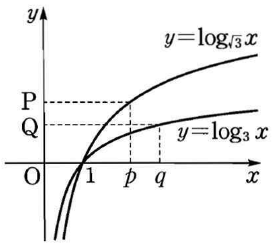


(가) 화살표가 1을 가리키면 점 P는 양의 방향으로 1만큼 움직인다.
(나) 화살표가 -1을 가리키면 점 P는 음의 방향으로 1만큼 움직인다.
(다) 화살표가 0을 가리키면 점 P는 움직이지 않는다.
(라) 화살표가 END를 가리키면 시행을 멈춘다.

점 P의 좌표가 2인 상황에서 시행이 끝났을 때, 마지막 시행에서 화살표가 END를 가리켰을 확률은?
(단, 화살표는 경계선에서 멈추지 않는다.)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{9}{48}$ ③ $\frac{7}{27}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

21. 오른쪽 그림은 두 함수 $y=\log_3 x$, $y=\log_{\sqrt{3}} x$의 그래프이다. $\overline{OP}:\overline{OQ}=3:2$일 때, p, q 사이의 관계식으로 옳은 것은? (단, O는 원점이고, 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)



① $3p=2q$　② $4p=3q$　③ $p^2=q$
④ $p^3=q^2$　⑤ $p^4=q^3$

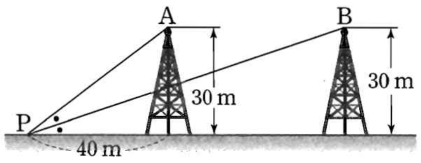
22. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

| 보 기 |

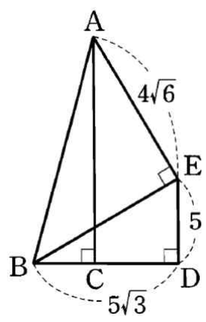
ㄱ. $x>1$이면 $\log_2 x>\log_3 x$이다.
ㄴ. $0<x<2$이면 $\log_2 x<\log_3(x+1)$이다.
ㄷ. 방정식 $2^x+\log_2 x=0$의 해를 $x=\alpha$라 하면 $\frac{1}{2}<\alpha<1$이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

23. 오른쪽 그림과 같이 높이가 30 m인 두 철탑 A, B가 지면에 수직으로 서 있고 지면에서 철탑 A로부터 40 m 떨어진 지점 P에 두 철탑의 지지선 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$가 연결되어 있다. 직선 PA와 지면이 이루는 예각을 직선 PB가 이등분할 때, 두 철탑 A, B 사이의 거리를 구하여라.
(단, 철탑의 두께는 무시한다.)



24. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}\perp\overline{AC}$, $\overline{BD}\perp\overline{ED}$, $\overline{BE}\perp\overline{AE}$이고, $\overline{BD}=5\sqrt{3}$, $\overline{DE}=5$, $\overline{AE}=4\sqrt{6}$일 때, $\overline{BC}$의 길이는?



① $3\sqrt{3}-\sqrt{6}$　② $5\sqrt{3}-2\sqrt{6}$　③ $5\sqrt{3}-\sqrt{6}$
④ $2\sqrt{3}+3$　⑤ $3\sqrt{3}+\sqrt{6}$

25. 연속함수 $f(x)$에 대하여

$$f(x)+f(-x)=\cos\frac{x}{2}$$

일 때, 정적분 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$의 값을 구하면?

① -2 ② $-\sqrt{3}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

26. $\int_{\pi}^{x}(x-t)f(t)\,dt=\sin x+ax-\pi$를 만족시키는 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(2\pi)=b$라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수이다.)

27. $0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 곡선 $y=a\cos x$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 곡선 $y=\sin x$가 이등분한다. 이때 양수 a의 값은?

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$
④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

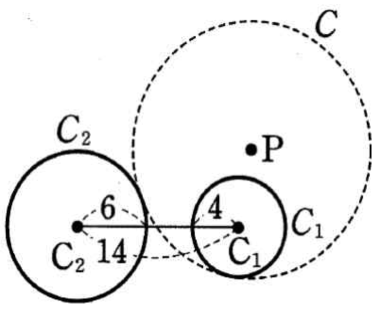
28. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) $x\le 2$일 때, $f(x)=1-e^{-x}$이다.
(나) 임의의 실수 x에 대하여 $\int_0^x f(t)dt+\int_0^{4-x}f(t)dt$의 값은 항상 일정하다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(0,\ 0)$, $(4,\ 0)$에서 접선을 각각 l, m이라 할 때, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 l, m로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

29. 두 점 O(0, 0), A(4, 0)에 대하여 $|\overline{\mathrm{PO}}-\overline{\mathrm{PA}}|=2$를 만족시키는 점 P의 자취의 방정식이 $ax^2+by^2+cx+dy=9$일 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

30. 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 4, 6인 두 원 C_1, C_2의 중심 사이의 거리가 14이다. 반지름의 길이가 4보다 큰 원 C가 원 C_1과 내접하고 원 C_2와 외접할 때, 원 C의 중심 P의 자취에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

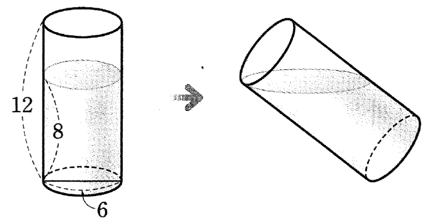


보 기

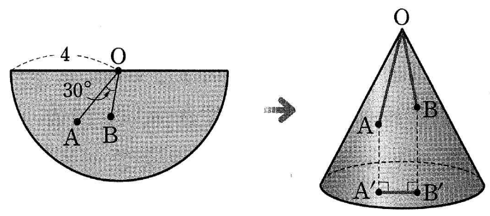
ㄱ. 점 P의 자취는 주축의 길이가 8인 쌍곡선의 일부이다.
ㄴ. 점 P의 자취의 두 점근선은 각각 원 C_2와 서로 다른 두 점에서 만난다.
ㄷ. 점 P가 선분 C_1C_2 위에 있을 때, $\overline{\mathrm{C_1P}}=2$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

31. 밑면의 지름의 길이가 6, 높이가 12인 원기둥 모양의 컵에 높이가 8만큼 물이 채워져 있다. 이 컵을 물이 쏟아지기 직전까지 기울였을 때, 수면의 넓이를 구하여라. (단, 컵의 두께는 고려하지 않는다.)



32. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 4인 반원의 내부에 두 점 A, B가 있다. 이 반원을 옆면으로 하는 원뿔을 만들 때, 두 점 A, B의 밑면 위로의 정사영을 각각 A', B'이라 하자. $\overline{OA}=3$, $\overline{OB}=2$, $\angle AOB=30°$일 때, $\overline{A'B'}$의 길이를 구하여라.



33. 점 $(1,\ -1,\ 1)$을 지나고 직선 $\frac{x-1}{2}=\frac{2-y}{3}=-z$와 수직인 평면 α와 구 $(x+2)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=k$가 만날 때 생기는 원의 넓이가 2π일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

34. 두 구 $x^2+y^2+z^2=3$, $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$가 만날 때 생기는 원의 반지름의 길이는?

① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ③ 1
④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

35. 서울의 어떤 지역에서는 국번 4자리를 포함하여 8자리의 전화번호를 사용하고 있다. 국번에 사용할 수 있는 숫자가 $0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8$일 때, 이 지역에서 사용할 수 있는 전화번호의 개수를 구하여라. (단, 국번의 첫 번째 자리의 숫자는 0이 아니고, 숫자를 중복하여 사용할 수 있다.)

36. $0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2$의 숫자가 각각 하나씩 적힌 6장의 카드를 모두 이용하여 만들 수 있는 여섯 자리 정수 중에서 짝수의 개수는?

① 16 ② 18 ③ 28
④ 34 ⑤ 36

37. 자연수 N에 대하여

$$N=9^2\cdot{}_5C_1+9^3\cdot{}_5C_2+9^4\cdot{}_5C_3+9^5\cdot{}_5C_4+9^6\cdot{}_5C_5$$

일 때, N의 각 자리의 숫자의 합은?

① 45 ② 46 ③ 47
④ 48 ⑤ 49

38. $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+{}_8C_1a_2+{}_8C_2a_3+\cdots+{}_8C_8a_9=3^p$일 때, 자연수 p의 값을 구하여라.

39. 표본공간 $S=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$에 대하여 사건 A, B가 $A=\{3,\ 4,\ 8\}$, $B=\{4,\ 5,\ 6\}$일 때, 사건 A, B와 모두 배반인 사건의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

40. 집합 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9\}$의 부분집합 중에서 임의로 한 집합 X를 택할 때,

$$2\in X,\ 4\in X,\ 6\notin X,\ 8\notin X$$

일 확률을 구하여라.

[난문현답 기출 정답]

1. ①
2. 10
3. 35
4. ⑤
5. ③
6. 45
7. ③
8. ②
9. ②
10. 35

[추가 과제 정답]

1) **정답** ①

$f(x)=x^2e^{3x}$ 으로 놓으면

$$f'(x)=2x\cdot e^{3x}+x^2\cdot 3e^{3x}=x(3x+2)e^{3x}$$

$$\therefore\ f'(-1)=-1\cdot(-1)\cdot\frac{1}{e^3}=\frac{1}{e^3}$$

점 $\left(-1,\ \frac{1}{e^3}\right)$에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{e^3}$ 이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-e^3$이고, 직선의 방정식은

$$y-\frac{1}{e^3}=-e^3(x+1) \qquad \therefore\ y=-e^3x+\frac{1}{e^3}-e^3$$

따라서 구하는 y절편은 $\frac{1}{e^3}-e^3$이다.

2) **정답** $\frac{1}{2e}$

$f(x)=ax^2,\ g(x)=\ln x$ 로 놓으면

$$f'(x)=2ax,\ g'(x)=\frac{1}{x}$$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 접한다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $at^2=\ln t$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $2at=\frac{1}{t}$ $\qquad \therefore\ at^2=\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{2}=\ln t \qquad \therefore\ t=\sqrt{e}$$

이것을 ㉡에 대입하면 $ae=\frac{1}{2}$

$$\therefore\ a=\frac{1}{2e}$$

3) **정답** $-\frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned} y&=\sqrt{3}\sin x+\cos x\\ &=2\left(\sin x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\cdot\frac{1}{2}\right)\\ &=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)\\ &=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

따라서 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$의 그래프는 $y=2\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것이므로

$$a=2,\ b=-\frac{\pi}{6} \quad \therefore\ ab=-\frac{\pi}{3}$$

4) **정답** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta&=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)\\ &=2\left(\sin\frac{2}{3}\pi\cos\theta+\cos\frac{2}{3}\pi\sin\theta\right)\\ &=2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

에서 $\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{1}{3}$ 이므로

$$\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$$

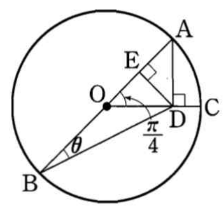
이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 에서 $\frac{\pi}{6}<\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{2}{3}\pi$ 이므로

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)>0$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)&=\sqrt{1-\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}\\ &=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta\\ &=2\left(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\theta\cdot\frac{1}{2}\right)\\ &=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)\\ &=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\\ &=2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

5) **정답** $\frac{3}{5}$



오른쪽 그림과 같이 점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 E, $\overline{OA}=\overline{OB}=2a$라 하면 $\triangle$AED와 $\triangle$OED는 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{AE}=\overline{DE}=\overline{OE}=a$$

따라서 $\overline{BE}=3a$ 이므로

$$\overline{BD}=\sqrt{\overline{BE}^2+\overline{DE}^2}=\sqrt{(3a)^2+a^2}=\sqrt{10}\,a$$

직각삼각형 BDE에서

$$\sin\theta=\frac{\overline{DE}}{\overline{BD}}=\frac{a}{\sqrt{10}\,a}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\theta=\frac{\overline{BE}}{\overline{BD}}=\frac{3a}{\sqrt{10}\,a}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore\ \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3}{5}$$

6) **정답** ①

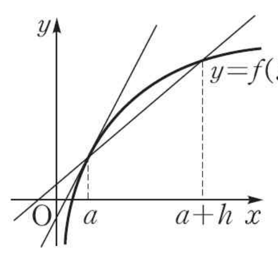
$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{\tan(2x^3-x^2+x)}{3x^3+x^2-x}\\ &=\lim_{x\to0}\frac{\tan(2x^3-x^2+x)}{2x^3-x^2+x}\cdot\frac{2x^3-x^2+x}{3x^3+x^2-x}\\ &=\lim_{x\to0}1\cdot\frac{x(2x^2-x+1)}{x(3x^2+x-1)}\\ &=\lim_{x\to0}\frac{2x^2-x+1}{3x^2+x-1}=-1\end{aligned}$$

7) 정답 ⑤

$f(a+h)-f(a)<f'(a)h$ 에서

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}<f'(a)$$

이때 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 의 값은 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+h$까지 변할 때의 평균변화율이고, $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기이므로 주어진 부등식을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x>0$에서 위로 볼록해야 한다.



따라서 구하는 함수는 ⑤이다.

8) 정답 e

$f(x)=(\ln ax)^2$ 으로 놓으면 $x>0$이고

$$f'(x)=2\ln ax \cdot \frac{1}{x}=\frac{2\ln ax}{x}$$

$$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\cdot x-2\ln ax}{x^2}=\frac{2-2\ln ax}{x^2}$$

$f''(x)=0$ 에서 $\ln ax=1,\ ax=e\quad \therefore\ x=\frac{e}{a}$

$0<x<\frac{e}{a}$ 일 때, $f''(x)>0,\ x>\frac{e}{a}$ 일 때 $f''(x)<0$

즉 $x=\frac{e}{a}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

$\left(\frac{e}{a},\ 1\right)$

이때 변곡점이 직선 $y=2x-1$ 위에 있으므로

$1=\frac{2e}{a}-1,\ \frac{2e}{a}=2\qquad \therefore\ a=e$

9) 답 1

[해설]

$\sin(x+y)+\sin(x-y)=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\cos(x+y)\cdot\left(1+\frac{dy}{dx}\right)+\cos(x-y)\cdot\left(1-\frac{dy}{dx}\right)=0$

$\{\cos(x-y)-\cos(x+y)\}\frac{dy}{dx}=\cos(x-y)+\cos(x+y)$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\cos(x+y)+\cos(x+y)}{\cos(x-y)-\cos(x+y)}$

$(\cos(x-y)\neq\cos(x+y))$

따라서 점 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos 0+\cos\frac{\pi}{2}}{\cos 0-\cos\frac{\pi}{2}}=1$$

10) 답 $\frac{e^2+1}{2e}$

[해설]

$e^x-e^y=e-1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$e^x-e^y\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{e^x}{e^y}=e^{x-y}$

점 $\mathrm{P}(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{dy}{dx}=e$

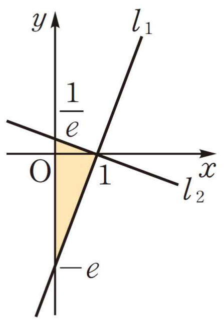
이므로 접선 l_1의 방정식은

$y=e(x-1)$

직선 l_2는 기울기가 $-\frac{1}{e}$이고 점 $\mathrm{P}(1,\ 0)$을 지나므로

$y=-\frac{1}{e}(x-1)$

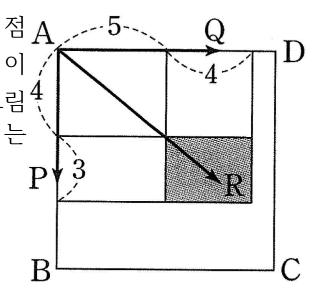
따라서 구하는 넓이는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(e+\frac{1}{e}\right)=\frac{e^2+1}{2e}$

11) 답 12

[해설] $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AR}$ 를 만족시키는 점 R는 $\square APRQ$가 직사각형이 되도록 하는 점이다. 따라서 점 R가 존재하는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같으므로 구하는 넓이는



$4\ \bullet\ 3=12$

12) 답 ②

[해설] $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ 라 하면

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$,

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$,

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$

이것을 $\overrightarrow{BD}=x\overrightarrow{AM}+y\overrightarrow{AN}$ 에 대입하면

$\vec{b}-\vec{a}=x\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)+y\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}\right)$

$=\left(x+\frac{y}{2}\right)\vec{a}+\left(\frac{x}{2}+y\right)\vec{b}$

따라서 $x+\frac{y}{2}=-1$, $\frac{x}{2}+y=1$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$x=-2,\ y=2$

$\therefore xy=-4$

13) 답 $\frac{7}{4}\pi$

[해설] $\frac{dx}{dt}=-\sin t,\ \frac{dy}{dt}=\cos t+\sin t$ 이므로

$\vec{v}=(-\sin t,\ \cos t+\sin t)$

따라서 $t=\frac{3}{2}\pi$에서 점 P의 속도는

$\vec{v}=(1,\ -1)$

이때 x축의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u}=(1,\ 0)$이므로

$\cos\theta=\frac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}\sqrt{1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\theta=\frac{\pi}{4}$ 또는 $\theta=\frac{7}{4}\pi\quad(\because 0\le\theta<2\pi)$

이때 $\vec{v}=(1,\ -1)$을 좌표평면에 나타내면 제 4사분면에 위치하므로 구하는 각의 크기는 $\frac{7}{4}\pi$이다.

14) 답 ①

[해설] $\frac{dx}{dt}=t-2,\ \frac{dy}{dt}=2\sqrt{2t}$

이므로 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리가 6이므로

$\int_0^a\sqrt{(t-2)^2+(2\sqrt{2t})^2}\,dt=6,\ \int_0^a\sqrt{t^2+4t+t}\,dt=6$

$\int_0^a\sqrt{(t+2)^2}\,dt=6,\ \int_0^a(t+2)dt=6$

$\left[\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^a=6,\quad \frac{1}{2}a^2+2a=6$

$a^2+4a-12=0,\quad (a+6)(a-2)=0$

$\therefore a=2\quad(\because a>0)$

15) 정답 ②

a, e와 b, d의 순서가 각각 정해져 있으므로 a, e를 모두 x로, b, d를 모두 y로 생각하여 6개의 문자 x, y, c, y, x, f를 일렬로 나열한 후 첫 번째 x는 a, 두 번째 x는 e로, 첫 번째 y는 b, 두 번째 y는 d로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

$\frac{6!}{2!\cdot 2!}=180$

16) 정답 10

각 자리의 숫자의 합이 3의 배수일 때 3의 배수가 된다.

6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3에서 4개를 택하여 그 합이

6이 되는 경우는 1, 1, 2, 2

9가 되는 경우는 2, 2, 2, 3

(ⅰ) 4개의 숫자 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

(ⅱ) 4개의 숫자 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 3의 배수의 개수는

$6+4=10$

17) 정답 210

먼저 A, B, C 세 사람에게 장미와 국화를 각각 한 송이씩 나누어 주면 장미 5송이, 국화 3송이가 남는다.

이때 장미 5송이를 A, B, C 세 사람에게 나누어 주는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$

국화 3송이를 A, B, C 세 사람에게 나누어 주는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$

따라서 구하는 방법의 수는

$21 \cdot 10 = 210$

18) **정답** ②

여섯 번째 경기에서 우승팀이 결정되려면 우승팀은 5번의 경기에서 3번 이기고 마지막 여섯 번째 경기에서도 이겨야 한다. 이때 두 팀 H, K는 실력이 같은 정도로 기대되므로 H팀과 K팀이 이길 확률은 각각 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ 이다.

(ⅰ) H팀이 우승할 확률은 ${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{32}$

(ⅱ) K팀이 우승할 확률은 ${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{32}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 $\frac{5}{32} + \frac{5}{32} = \frac{5}{16}$

19) **정답** $\frac{11}{16}$

[풀이]

(ⅰ) 7번째 게임에서 A가 상금을 모두 가지는 경우

A가 6번째 게임과 7번째 게임에서 모두 이겨야 하므로 확률은

${}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{4}$

(ⅱ) 8번째 게임에서 A가 상금을 모두 가지는 경우

A가 6번째 게임과 7번째 게임 중에서 1번 이기고 8번째 게임에서 이겨야 하므로 확률은

${}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

(ⅲ) 9번째 게임에서 A가 상금을 모두 가지는 경우

A가 6번째 게임, 7번째 게임, 8번째 게임 중에서 1번 이기고 9번째 게임에서 이겨야 하므로 확률은

${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

이상에서 구하는 확률은 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$

20) **정답** ④

[풀이]

점 P의 좌표가 2일 때 시행을 멈추는 경우의 확률은 다음과 같다.

(ⅰ) 첫 번째와 두 번째는 1을 가리키고, 세 번째는 END를 가리킬 확률은

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$

(ⅱ) 세 번째까지는 1을 2번, 0을 1번 가리키고 네 번째에 END를 가리킬 확률은

${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right) \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{48}$

(ⅲ) 1을 3번, -1을 1번 가리킬 확률은

${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}$

(ⅳ) 1을 2번, 0을 2번 가리킬 확률은

${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{24}$

이상에서 모든 시행이 끝났을 때 점 P의 좌표가 2인 사건을 A, 마지막 시행에서 화살표가 END를 가리키는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{9}{48}$

$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{24} + \frac{1}{48} = \frac{1}{16}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{9}{48}} = \frac{1}{3}$$

21) **정답** ⑤

$\overline{\mathrm{OP}} = \log_{\sqrt{3}} p$, $\overline{\mathrm{OQ}} = \log_3 q$이므로 $\overline{\mathrm{OP}} : \overline{\mathrm{OQ}} = 3 : 2$에서

$\log_{\sqrt{3}} p : \log_3 q = 3 : 2$

$2\log_3 p : \log_3 q = 3 : 2$

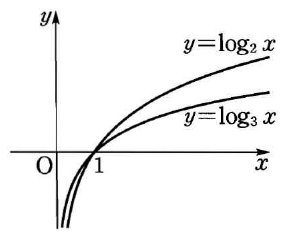
$4\log_3 p = 3\log_3 q$, $\log_3 p^4 = \log_3 q^3$

$\therefore\ p^4 = q^3$

22) **정답** ③

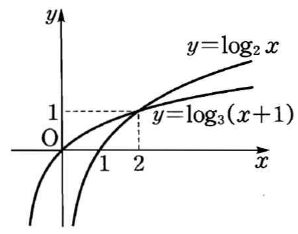
[풀이]

ㄱ. $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x > 1$이면 $\log_2 x > \log_3 x$이다.



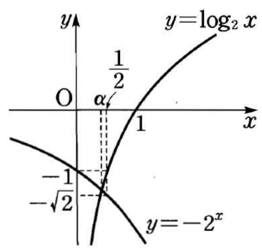
ㄴ. $y = \log_3(x+1)$의 그래프는 $y = \log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 $y = \log_2 x$, $y = \log_3(x+1)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 $0 < x < 2$이면

$\log_2 x < \log_3(x+1)$



ㄷ. 방정식 $2^x + \log_2 x = 0$의 실근은 $y = \log_2 x$, $y = -2^x$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다. $y = -2^x$, $y = \log_2 x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$0 < \alpha < \frac{1}{2}$



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

23) **정답** 50 m

두 철탑 A, B 사이의 거리를 x m, $\angle\mathrm{APB} = \theta$라 하면

$\tan\theta = \frac{30}{40+x}$, $\tan 2\theta = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$

$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$에서 $\frac{3}{4} = \frac{2 \cdot \frac{30}{40+x}}{1-\left(\frac{30}{40+x}\right)^2}$

$\frac{3}{4} = \frac{60(40+x)}{(40+x)^2 - 900}$

$(40+x)^2 - 900 = 80(40+x)$

$x^2 + 80x + 700 = 3200 + 80x$

$x^2 = 2500 \qquad \therefore\ x = 50\ (\because\ x > 0)$

따라서 두 철탑 A, B 사이의 거리는 50 m이다.

24) **정답** ②

$\overline{\mathrm{BE}} = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + 5^2} = 10$, $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{10^2 + (4\sqrt{6})^2} = 14$

$\angle\mathrm{EBD} = \alpha$, $\angle\mathrm{ABE} = \beta$라 하면

$\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\beta = \frac{2\sqrt{6}}{7}$, $\cos\beta = \frac{5}{7}$

$\therefore\ \cos(\angle\mathrm{ABC}) = \cos(\alpha+\beta)$

$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5}{7} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{7}$

$= \frac{5\sqrt{3} - 2\sqrt{6}}{14}$

따라서 $\triangle\mathrm{ABC}$에서

$\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{AB}}\cos(\angle\mathrm{ABC}) = 14 \cdot \frac{5\sqrt{3} - 2\sqrt{6}}{14}$

$= 5\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$

25) **정답** ③

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\int_{-\pi}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{\pi} f(x)dx$$

$\int_{-\pi}^{0} f(x)dx$ 에서 $-x=t$ 로 놓으면 $\quad \frac{dt}{dx}=-1$

또한 $x=-\pi$ 일 때 $t=\pi$, $x=0$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)dx=\int_{\pi}^{0} f(-t)\cdot(-1)dt=\int_{0}^{\pi} f(-t)dt$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{\pi} f(x)dx=\int_{0}^{\pi} f(-t)dt+\int_{0}^{\pi} f(x)dx$$
$$=\int_{0}^{\pi} f(-x)dx+\int_{0}^{\pi} f(x)dx$$
$$=\int_{0}^{\pi}\{f(-x)+f(x)\}dx=\int_{0}^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx$$
$$=\left[2\sin\frac{x}{2}\right]_{0}^{\pi}=2$$

26) **정답** 1

주어진 등식의 양변에 $x=\pi$ 를 대입하면

$$0=a\pi-\pi \qquad \therefore a=1$$

$\int_{\pi}^{x}(x-t)f(t)dt=\sin x+x-\pi$ 에서

$$x\int_{\pi}^{x} f(t)dt-\int_{\pi}^{x} tf(t)dt=\sin x+x-\pi$$

위의 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_{\pi}^{x} f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\cos x+1$$

$$\therefore \int_{\pi}^{x} f(t)dt=\cos x+1$$

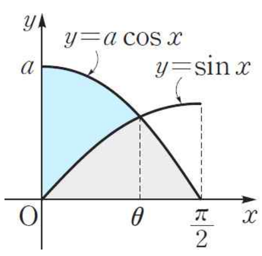
위의 등식의 양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)=-\sin x$$

따라서 $f(2\pi)=0$ 이므로 $b=0$

$$\therefore a+b=1$$

27) **정답** ②



두 곡선 $y=a\cos x$, $y=\sin x$ 의 교점의

x 좌표를 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 라 하면

$a\cos\theta=\sin\theta$ 에서

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=a, \text{ 즉 } \tan\theta=a$$

이므로 $\sin\theta=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ ⋯⋯ ㉠

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$ 에서 곡선 $y=a\cos x$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x\,dx=a\Big[\sin x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=a$$

$0\le x\le\theta$ 에서 두 곡선 $y=a\cos x$, $y=\sin x$ 와 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 이라 하면

$$S_2=\int_{0}^{\theta}(a\cos x-\sin x)dx=\Big[a\sin x+\cos x\Big]_{0}^{\theta}$$
$$=a\sin\theta+\cos\theta-1$$

이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$ 이므로 $\quad a\sin\theta+\cos\theta-1=\frac{a}{2}$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$$\frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}-1=\frac{a}{2}, \quad \frac{1+a^2}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{a}{2}+1$$

$$\sqrt{1+a^2}=\frac{a}{2}+1, \quad 1+a^2=\frac{a^2}{4}+a+1$$

$$3a^2-4a=0$$

$$a(3a-4)=0 \qquad \therefore a=\frac{4}{3}\ (\because a>0)$$

28) **정답** $2-\frac{2}{e^2}$

조건 (가)에서 $x<2$ 일 때, $f'(x)=e^{-x}$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$ 에서의 접선의 기울기는 1이고 접선 l 의 방정식은

$$y=x$$

이때 조건 (나)에서 $\int_{0}^{x} f(t)dt+\int_{0}^{4-x} f(t)dt=c$ (c는 상수)로 놓고,

양변을 x 에 대하여 미분하면

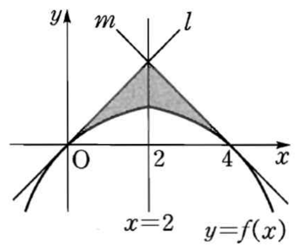
$$f(x)-f(4-x)=0, \text{ 즉 } f(x)=f(4-x)$$

위의 등식의 양변에 x 대신 $2-x$ 를 대입하면

$$f(2-x)=f(2+x)$$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$2\int_{0}^{2}\{x-(1-e^{-x})\}dx$$
$$=2\left[\frac{1}{2}x^2-x-e^{-x}\right]_{0}^{2}$$
$$=2\left(-\frac{1}{e^2}+1\right)=2-\frac{2}{e^2}$$

29) **답** 10

[해설] 점 P의 좌표를 (x,y)라 하면 $|\overline{PO}-\overline{PA}|=2$에서

$\overline{PO}-\overline{PA}=\pm2$, 즉 $\overline{PO}=\overline{PA}\pm2$이므로

$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-4)^2+y^2}\pm2$

양변을 제곱하여 정리하면

$2x-5=\pm\sqrt{(x-4)^2+y^2}$

다시 양변을 제곱하여 정리하면 $3x^2-12x-y^2=-9$

$\therefore -3x^2+y^2+12x=9$

따라서 $a=-3$, $b=1$, $c=12$, $d=0$이므로

$a+b+c+d=10$

30) **답** ⑤

[해설]

ㄱ. 원 C의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{PC_2}-\overline{PC_1}=(r+6)-(r-4)=10$

이므로 점 P의 자취는 두 점 C_1, C_2를 초점으로 하고 주축의 길이가 10인 쌍곡선의 일부이다.

ㄴ. 선분 C_1C_2의 중점이 원점, 직선 C_1C_2가 x축 위에 오도록 좌표평면 위에 놓으면

$C_1(7,0)$, $C_2(-7,0)$

점 P의 자취의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$이라 하면

$a^2+b^2=49$, $2a=10$

$\therefore a=5$, $b=2\sqrt{6}$

따라서 점 P의 자취의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{2\sqrt{6}}{5}x$, 즉 $2\sqrt{6}x\pm5y=0$

원 C_2의 중심 $C_2(-7,0)$과 직선 $2\sqrt{6}x\pm5y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\sqrt{6}\cdot(-7)|}{\sqrt{(2\sqrt{6})^2+(\pm5)^2}}=\frac{14\sqrt{6}}{7}=2\sqrt{6}<6$$

이므로 점 P의 자취의 두 점근선은 각각 원 C_2와 서로 다른 두 점에서 만난다.

ㄷ. ㄴ에서 점 P가 선분 C_1C_2위에 있을 때, 점 P는 쌍곡선 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$의 꼭짓점이다.

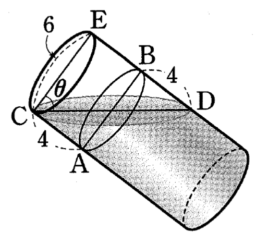
따라서 점 P의 좌표는 $(5,0)$이므로

$\overline{C_1P}=2$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

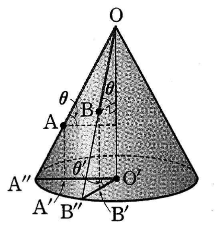
31) **답** 15π

[해설]
컵을 기울이면 한쪽 수면이 올라온 만큼 반대쪽 수면이 내려간다.
오른쪽 그림과 같이 컵을 기울이기 전의 수면의 지름을 $\overline{AB}$, 컵을 최대로 기울였을 때 수면의 장축을 $\overline{CD}$라 하면

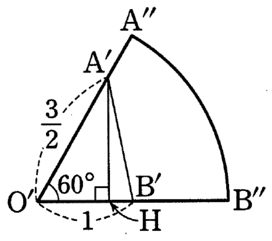


$\overline{AC}=\overline{BD}=4$, $\overline{DE}=8$
직각삼각형 CDE에서
$\overline{CD}=\sqrt{6^2+8^2}=10$
$\angle CDE=\theta$라 하면 $\cos\theta=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{CD}}=\dfrac{3}{5}$
이때 컵의 밑면의 넓이는 9π이므로 구하는 수면의 넓이를 S라 하면 $S\cos\theta=9\pi$
$\therefore S=\dfrac{9\pi}{\cos\theta}=\dfrac{9\pi}{\frac{3}{5}}=15\pi$

32) 답 $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$
[해설]
원뿔의 밑면의 반지름의 길이는 $4\times\dfrac{180^\circ}{360^\circ}=2$
오른쪽 그림과 같이 점 O의 밑면 위로의 정사영을 O', $\overline{OA}$와 밑면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면



$4\cos\theta=2$ $\quad\therefore \cos\theta=\dfrac{1}{2}$
$\therefore \overline{O'A'}=\overline{OA}\cos\theta=3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$
$\overline{O'B'}=\overline{OB}\cos\theta=2\times\dfrac{1}{2}=1$
한편 두 선분 OA, OB를 연장하여 밑면과 만나는 점을 각각 A'', B''이라 하고 $\angle A''OB'=\theta'$이라 하면
$4\times\dfrac{30^\circ}{360^\circ}=2\times\dfrac{\theta'}{360^\circ}=\overset{\frown}{A''B''}$ $\quad\therefore \theta'=60^\circ$
즉 오른쪽 그림과 같이 점 A'에서 $\overline{OB''}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{O'H}=\dfrac{3}{2}\cos60^\circ=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$
$\overline{A'H}=\dfrac{3}{2}\sin60^\circ=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$
따라서 $\triangle A'HB'$에서
$\overline{A'B'}=\sqrt{\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(1-\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$
•30%

33) 답 $\dfrac{16}{7}$
[해설] 점 $(1,\ -1,\ 1)$을 지나고 법선벡터가 $(2,\ -3,\ -1)$인 평면 α의 방정식은
$2(x-1)-3(y+1)-(z-1)=0$
$\therefore 2x-3y-z-4=0$
따라서 구의 중심 $(-2,\ -3,\ 3)$과 평면 α 사이의 거리는
$\dfrac{|-4+9-3-4|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{14}}$
이때 평면과 구가 만나서 생기는 원의 반지름의 길이를 r라 하면 $\pi r^2=2\pi$에서 $r=\sqrt{2}$이므로
$k=(\sqrt{2})^2+\left(\dfrac{2}{\sqrt{14}}\right)^2=\dfrac{16}{7}$

34) 답 ⑤
[해설] 두 구 $x^2+y^2+z^2=3$, $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$의 교선을 포함하는 평면의 방정식은
$2x+2y+2z-2=0$ $\quad\therefore x+y+z-1=0$
구 $x^2+y^2+z^2=3$의 중심 $(0,\ 0,\ 0)$과 평면 $x+y+z-1=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
이므로 평면과 구가 만날 때 생기는 원의 반지름의 길이는
$\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

35) **정답** 5000000
[풀이]
국번의 첫 번째 자리에는 0을 제외한 2, 4, 6, 8이 올 수 있고 나머지 자리에는 0, 2, 4, 8을 중복하여 사용할 수 있으므로 만들 수 있는 국번의 개수는
$4\cdot{}_5\Pi_3=4\cdot5^3=500$
또 전화 번호의 뒷자리 4개에는 0에서 9까지의 숫자를 중복하여 사용할 수 있으므로
${}_{10}\Pi_4=10^4=10000$
따라서 구하는 전화번호의 개수는
$500\cdot10000=5000000$

36) **정답** ④
일의 자리의 숫자가 0 또는 2일 때 짝수가 된다.
(ⅰ) 일의 자리의 숫자가 0인 경우
0, 1, 2, 2, 2가 적힌 카드를 일렬로 나열하는 방법의 수는
$\dfrac{5!}{3!}=20$
이때 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{3!}=4$
$\therefore\ 20-4=16$
(ⅱ) 일의 자리의 숫자가 2인 경우
0, 0, 1, 2, 2가 적힌 카드를 일렬로 나열하는 방법의 수는
$\dfrac{5!}{2!\cdot2!}=30$
이때 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$
$\therefore\ 30-12=18$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 짝수의 개수는
$16+18=34$

37) **정답** ①
{전략} $(1+x)^n$의 전개식을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.
[풀이] $9^2\cdot{}_5C_1+9^3\cdot{}_5C_2+9^4\cdot{}_5C_3+9^5\cdot{}_5C_4+9^6\cdot{}_5C_5$
$=9(1+9\cdot{}_5C_1+9^2\cdot{}_5C_2+9^3\cdot{}_5C_3+9^4\cdot{}_5C_4+9^5\cdot{}_5C_5)-9$
$=9(1+9)^5-9=9\cdot10^5-9$
$=899991$
따라서 각 자리의 숫자의 합은
$8+9+9+9+9+1=45$

38) **정답** 8
[전략] $a_1=a$, $a_{n+1}=ra_n$**으로 정의된 수열** $\{a_n\}$**은 첫째항이** a, **공비가** r**인 등비수열이다.**
[풀이]
수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로
$a_n=2^{n-1}$
$\therefore\ a_1+{}_8C_1a_2+{}_8C_2a_3+\cdots+{}_8C_8a_9$
$=1+{}_8C_1\cdot2+{}_8C_2\cdot2^2+\cdots+{}_8C_8\cdot2^8$
$={}_8C_0+{}_8C_1\cdot2+{}_8C_2\cdot2^2+\cdots+{}_8C_8\cdot2^8$
$=(1+2)^8=3^8$
$\therefore\ p=8$

39) **정답** ④
사건 A와 배반인 사건은 사건 A^c의 부분집합이고, 사건 B와 배반인 사건은 사건 B^c의 부분집합이므로 사건 A, B와 모두 배반인 사건은 $A^c\cap B^c$의 부분집합이다. 이때
$A^c\cap B^c=\{5,\ 6,\ 7,\ 9\}\cap\{3,\ 7,\ 8,\ 9\}=\{7,\ 9\}$
이므로 구하는 사건의 개수는 $2^2=4$

40) **정답** $\dfrac{1}{16}$
S의 부분집합 X가 될 수 있는 모든 경위 수는

$2^9 = 512$

2와 4를 반드시 원소로 갖고 6과 8을 반드시 원소로 갖지 않는 S의 부분집합의 개수는 $2^{9-4} = 2^5 = 32$

따라서 구하는 확률은 $\frac{32}{512} = \frac{1}{16}$

제 6 회

1. 2016년 7월 교육청
2. 2004년 6월 평가원
3. 2013년 수능
4. 2011년 9월 평가원
5. 2015년 3월 교육청
6. 2014년 사관학교
7. 2009년 10월 교육청
8. 2005년 7월 교육청
9. 2011년 6월 평가원
10. 2014년 사관학교

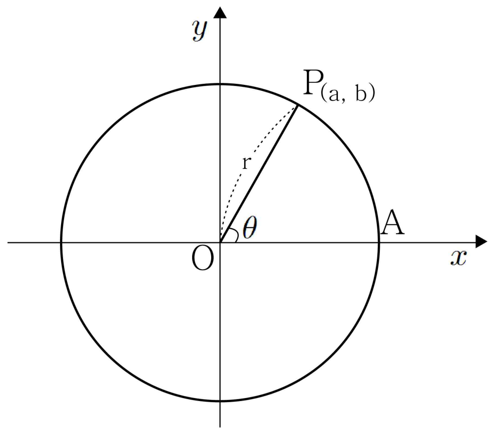
1. 두 함수 $f(x)=\ln x$, $g(x)=\ln\dfrac{1}{x}$의 그래프가 만나는 점을 P라 할 때 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 점 P의 좌표는 $(1, 0)$이다.
ㄴ. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 위의 점 P에서의 각각의 접선은 서로 수직이다.
ㄷ. $t>1$일 때, $-1<\dfrac{f(t)g(t)}{(t-1)^2}<0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 r인 원 위의 점 $P(a, b)$가 x축 위의 점 A에서 출발하여 원 위를 시계 반대 방향으로 회전하고 있다. 동경 OP가 나타내는 일반각 θ에 대하여 함수 $f(\theta)$를 $f(\theta)=\dfrac{a+b}{r}$로 정의하자. 다음 중 함수 $f(\theta)$에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르면?

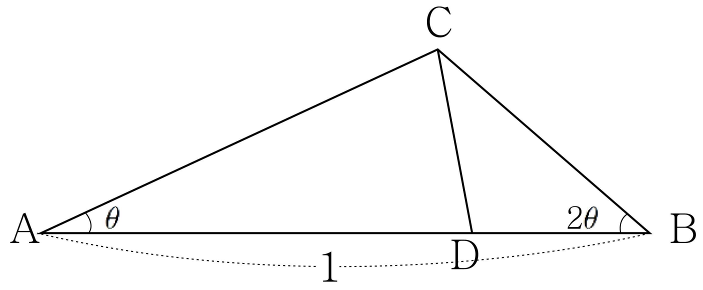


ㄱ. 주기함수이고 주기는 2π이다.
ㄴ. 최댓값은 $\sqrt{2}$이고 최솟값은 $-\sqrt{2}$이다.
ㄷ. $y=\sin\theta$의 그래프를 평행이동시켜 $y=f(\theta)$의 그래프와 일치시킬 수 있다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=1$이고 $\angle\mathrm{A}=\theta$, $\angle\mathrm{B}=2\theta$이다. 변 AB위의 점 D를 $\angle\mathrm{ACD}=2\angle\mathrm{BCD}$가 되도록 잡는다. $\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\theta}=a$일 때, $27a^2$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$이다.)



4. 다항함수 $f(x)$에 대하여 다음 표는 x의 값에 따른 $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$의 변화 중 일부를 나타낸 것이다.

x	$x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$
$f'(x)$		0		1
$f''(x)$	$+$		$+$	0
$f(x)$		$\frac{\pi}{2}$		π

함수 $g(x)=\sin(f(x))$에 대하여 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $g'(3)=-1$

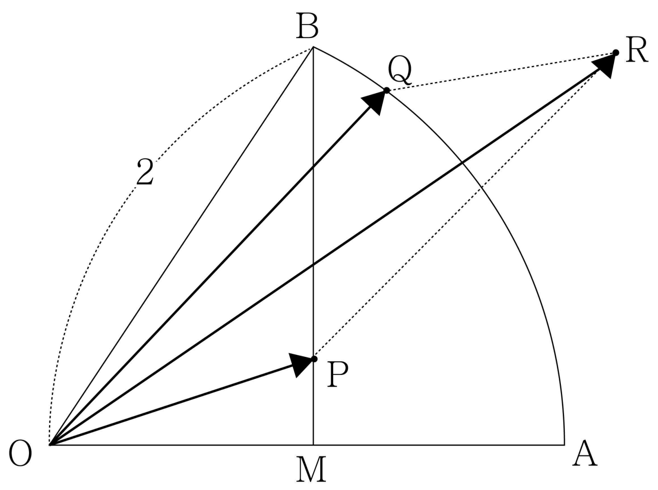
ㄴ. $1<a<b<3$이면 $-1<\frac{g(b)-g(a)}{b-a}<0$이다.

ㄷ. 점 $\mathrm{P}(1,1)$은 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 실수 t에 대하여 좌표평면에서 원점을 지나고 기울기가 $\tan(\sin t)$인 직선과 원 $x^2+y^2=e^{2t}$이 만나는 점 중에서 x좌표가 양수인 점을 P라 하고, 점 P가 나타내는 곡선을 C라 하자. $t=\pi$일 때, 곡선 C 위의 점 P에서의 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $a\times e^{b\pi}$이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.)

6. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 OAB에서 선분 OA의 중점을 M이라 하자. 점 P는 두 선분 OM과 BM 위를 움직이고, 점 Q는 호 AB 위를 움직인다. $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$를 만족시키는 점 R이 나타내는 영역 전체의 넓이는?



① $\sqrt{3}$　② 2　③ $2\sqrt{3}$　④ 4　⑤ $3\sqrt{3}$

7. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시간 t에서의 위치벡터를 $\vec{p}=(x, y)$라 하면

$$x=\frac{e^t+e^{-t}}{2},\ \ y=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

이 성립한다. 이때 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $t=1$에서 점 P의 속도 $\vec{v}$와 위치벡터 $\vec{p}$는 서로 수직이다.

ㄴ. 임의의 시각 t에서 점 P의 가속도 $\vec{a}$와 위치벡터 $\vec{p}$는 서로 같다.

ㄷ. 점 P가 $t=0$에서 $t=1$ 까지 움직인 거리는 1이상이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 철수는 국가대표팀의 축구 경기를 시청하고 있었다. 그런데 우리나라 국가대표팀이 전반전 경기를 1:0 으로 이기고 난 후 중간 휴식 시간에 갑자기 철수네 집이 정전이 되어 후반전 경기를 시청할 수 없었다.

다음날 친구들로부터 후반전 경기까지 마친 결과 5:3 으로 우리나라 국가대표팀이 승리하였다는 사실을 알게 되었지만, 두 팀이 골을 넣는 순서는 알 수 없었다. 철수는 <표1>과 같은 표를 만들어 후반전 경기에서 두 팀이 골을 넣어 가는 상황 중 한 가지를 <표2>와 같이 적어 보았다.

구 분	국가 대표팀	상대팀
전반전	1	0
후반전		
최종득점 결과	5	3

구 분	국가 대표팀	상대팀
전반전	1	0
후반전	2	0
	2	1
	2	2
	2	3
	3	3
	4	3
	5	3
최종득점 결과	5	3

이와 같이 철수가 <표1>의 어두운 부분을 완성할 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오.

9. A,B 두 사람이 탁구 시합을 할 때, 한 사람이 먼저 세 세트를 이기거나 연속하여 두 세트를 이기면 승리하기로 한다.

각 세트에서 A가 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이고, B가 이길 확률은 $\frac{2}{3}$이다. 첫 세트에서 A가 이겼을 때, 이 시합에서 A가 승리할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

10. 지호와 영수는 가위바위보를 한 번 할 때마다 다음과 같은 규칙으로 사탕을 받는 게임을 한다.

(가) 이긴 사람은 2개의 사탕을 받고, 진 사람은 1개의 사탕을 받는다.
(나) 비긴 경우에는 두 사람 모두 1개의 사탕을 받는다.

게임을 시작하고 나서 지호가 받은 사탕의 총 개수가 5인 경우가 생길 확률은 $\frac{k}{243}$이다. 자연수 k의 값을 구하시오

(단, 두 사람이 각각 가위, 바위, 보를 낼 확률은 같다.)

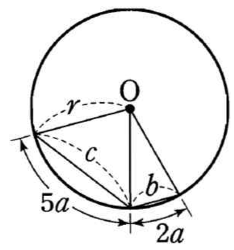
추가 과제

1. $\lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)\ln(1+x)}{ax^2 + b} = 1$ 을 만족시키는 상수 a, b에 대하여 $2a+b$의 값을 구하여라.

2. $x>0$에서 정의된 함수 $f(x) = \lim_{n \to \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)$에 대하여 $f(e) + f\left(\frac{1}{e}\right)$의 값은? (단, n은 자연수이다.)

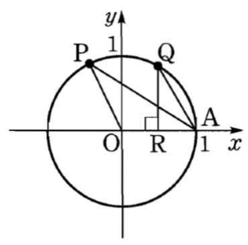
① 0 ② 1 ③ e
④ $e+1$ ⑤ $2e$

3. 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 r인 원 O에서 길이가 $2a$, $5a$인 호에 대한 현의 길이를 각각 b, c라 할 때, $\lim_{a \to 0+} \frac{b+c}{a}$의 값은?



① 5 ② $\frac{11}{2}$ ③ 6
④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

4. 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 P, Q가 점 A(1, 0)을 동시에 출발하여 원 $x^2+y^2=1$ 위를 시계바늘이 도는 반대 방향으로 점 P가 $2t$만큼 움직일 때 점 Q는 t만큼 움직인다. 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 R라 할 때, 삼각형 OAP의 넓이가 삼각형 RAQ의 넓이의 두 배가 될 때의 t의 값을 구하여라.



$\left(\text{단, } 0 < t < \frac{\pi}{2}\text{이고, O는 원점이다.}\right)$

5. 함수 $y=\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값을 구하여라.

6. $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$에서 함수 $f(x)=ax+a\cos 2x$의 최솟값이 $\frac{\pi}{2}$일 때, 최댓값을 구하여라. (단, $a>0$)

7. 함수 $f(x)=xe^{-x}$에 대하여 곡선 $y=f(x)$의 변곡점에서 이 곡선에 그은 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, $g(1)$의 값을 구하여라.

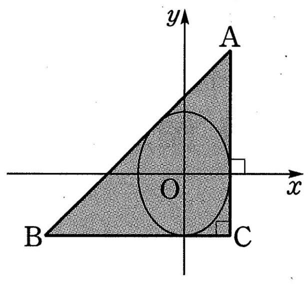
8. 함수 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}-x$에 대한 설명 중 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

| 보 기 |

ㄱ. 함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.
ㄴ. 0이 아닌 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $a+b=\frac{1}{e^2}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 오른쪽 그림과 같이 타원 $16x^2+9y^2=144$에 외접하는 직각 이등변 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.



10. 점 $\mathrm{A}(a,\ 0)$에서 쌍곡선 $x^2-5y^2=15$에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 APQ가 정삼각형일 때, 양수 a의 값을 구하여라.

11. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가

$$v(t)=\sin 2t-2\sin t \quad (0 \le t \le \pi)$$

일 때, 원점과 점 P 사이의 거리의 최댓값을 구하여라.

12. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가

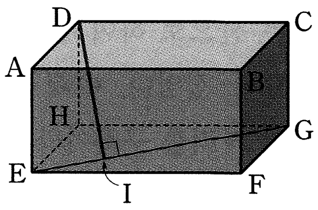
$$x=\sin t+\cos t,\ y=\cos t-\sin t$$

로 주어질 때, $t=0$에서 $t=\pi$까지 점 P가 움직인 거리는?

① π ② $\sqrt{2}\pi$ ③ $\sqrt{3}\pi$
④ 2π ⑤ 3π

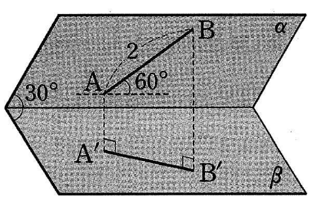
추가 과제

13. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=\overline{AE}=1$인 직육면체의 꼭짓점 D에서 밑면의 대각선 EG에 내린 수선의 발을 I라 할 때, $\overline{DI}$의 길이는?



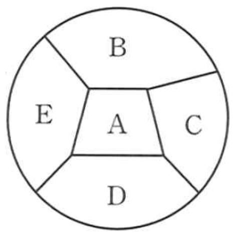
① $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ ③ $\sqrt{5}$
④ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\sqrt{3}$

14. 오른쪽 그림과 같이 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 30°이고, 평면 α 위에 길이가 2인 선분 AB가 있다. 두 평면 α, β의 교선과 직선 AB가 이루는 각의 크기가 60°일 때, 선분 AB의 평면 β 위로의 정사영인 선분 $A'B'$의 길이를 구하여라.



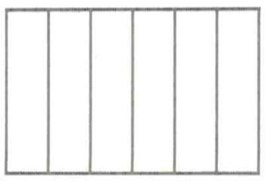
15. A, B, C 세 나라에서 각각 대표 3명씩을 뽑아 총 9명이 원탁에 앉아 회의를 하려고 한다. A, B 두 나라의 대표들만 자국의 대표끼리 이웃하게 앉는 방법의 수를 구하여라.

16. 서로 다른 5가지 색으로 오른쪽 그림을 칠하려고 한다. A, B, C, D, E의 영역에 같은 색을 중복하여 이용해도 좋으나 인접한 영역은 서로 다른 색으로 칠할 때, 칠하는 방법의 수를 구하여라.



① 160 ② 270 ③ 360
④ 420 ⑤ 540

17. 오른쪽 그림과 같은 6개의 영역을 빨강, 파랑, 노랑 3가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 이때 이웃하는 영역을 서로 다른 색으로 칠할 확률을 구하여라.



18. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{4,\ 5\}$에 대하여 A에서 B로의 함수 f를 만들 때, 이 함수가

$$f(1)+f(2)+f(3)=14$$

를 만족시킬 확률은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{3}{8}$

19. 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$의 임의의 두 원소 m, n에 대하여 3^m+4^n이 5로 나누어떨어질 확률은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{2}{5}$
④ $\frac{3}{25}$ ⑤ $\frac{6}{25}$

20. 서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b, c라 할 때, $(a-b)(b-c)(c-a)=0$일 확률을 구하여라.

21. 방정식 $\ln x = ax^2$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

22. 방정식 $x^2 - \ln(1+2x^2) = k$가 서로 다른 네 개의 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $\frac{1}{2} - \ln 2 < k < 0$

② $\ln 2 - 1 < k < 0$

③ $0 < k < \frac{1}{2} + \ln 2$

④ $0 < k < 1 + \ln 2$

⑤ $\frac{1}{2} - \ln 2 < k < \frac{1}{2} + \ln 2$

23. $f(k) = \int_1^k \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$에 대하여 다음 중 $f(k^{36})$의 값과 같은 것은? (단, $k > 1$)

① $8f(k)$　② $27f(k)$　③ $64f(k)$
④ $125f(k)$　⑤ $216f(k)$

24. 임의의 실수 a에 대하여 정적분 $\int_a^{a+\pi} |\cos x|\, dx$의 값을 구하여라.

25. 함수 $f(x)$가 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킬 때, 정적분의 값이 0인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

| 보 기 |

ㄱ. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin f(x)\,dx$

ㄴ. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos f(x)\,dx$

ㄷ. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x\,dx$

ㄹ. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos x\,dx$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄱ, ㄹ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄹ

26. 함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 등식

$$\int_{1}^{x} (x+t)f(t)\,dt = e^{2x}+x-e^{2}-1$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하여라.

27. $\lim_{x\to\pi} \frac{1}{\pi-x}\int_{\pi}^{x}(1+\cos^4 t)\,dt$의 값을 구하여라.

28. $x>0$일 때, 함수 $f(x)=\int_{x}^{x+1}\left(t+\frac{2}{t}\right)dt$의 최솟값을 구하여라.

29. 좌표공간에 두 점 $\mathrm{A}(4, 0, 5)$, $\mathrm{B}(0, 4, 3)$과 구 $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=1$ 위의 점 P가 있다. 세 점 A, B, P의 xy평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′, P′이라 할 때, 삼각형 A′B′P′의 넓이의 최솟값을 구하여라.

30. 반지름의 길이가 3인 구 C가 두 구

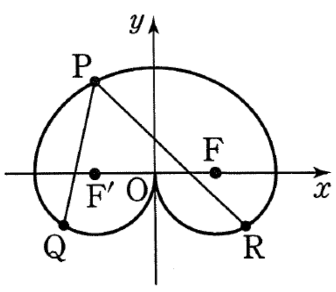
$$x^2+y^2+z^2=1,\ (x-3)^2+(y-1)^2+(z-\sqrt{6})^2=9$$

에 동시에 외접한다. 이 구 C의 중심을 P라 할 때, 점 P가 나타내는 도형의 둘레의 길이는?

① $\frac{3\sqrt{2}}{2}\pi$ ② $2\sqrt{7}\pi$ ③ $\frac{5\sqrt{7}}{2}\pi$
④ $3\sqrt{7}\pi$ ⑤ $\frac{7\sqrt{7}}{2}\pi$

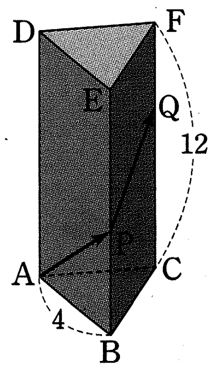
31. 원 $x^2+y^2=16$위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 PH의 중점 Q의 자취의 방정식은 $px^2+qy^2=1$이다. 이때 상수 p, q에 대하여 $\frac{q}{p}$의 값을 구하여라.

32. 오른쪽 그림과 같이 두 점 F, F'을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$위의 $y\ge 0$인 부분을 움직이는 점 P와 두 원 $(x+2)^2+y^2=4$, $(x-2)^2+y^2=4$ 위의 $y\le 0$인 부분을 각각 움직이는 두 점 Q, R가 있다. 이때 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}$의 최댓값은?



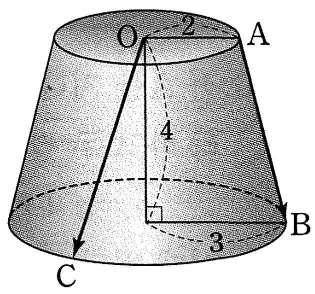
① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

33. 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형을 밑면으로 하고 높이가 12인 삼각기둥에서 선분 BE를 1:2로 내분하는 점을 P, 선분 CF를 2:1로 내분하는 점을 Q라 할 때, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PQ}$는?

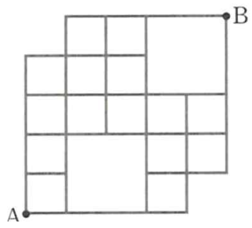


① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

34. 오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 각각 2, 3이고 높이가 4인 원뿔대가 있다. 반지름의 길이가 2인 밑면의 중심을 O, 둘레의 한 점을 A라 하고, 반지름의 길이가 3인 밑면의 둘레 위의 두 점을 각각 B, C라 할 때, $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OC}|$의 최솟값을 구하여라.
(단, 선분AB는 원뿔대의 모선이다.)

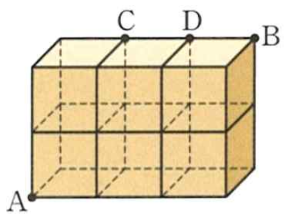


35. 오른쪽 그림과 같은 도로망이 있다. A를 출발하여 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는?



① 5 ② 15 ③ 50
④ 65 ⑤ 72

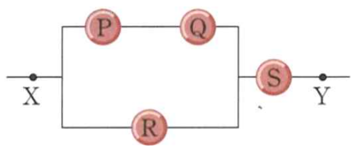
36. 오른쪽 그림과 같이 크기가 같은 정육면체 6개를 쌓아 올려 직육면체를 만들었을 때, 정육면체의 모서리를 따라 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 방법 중 모서리 CD를 지나지 않는 방법의 수를 구하여라.



추가 과제

37. 어떤 축구팀은 비가 내릴 때 경기에서 이길 확률이 0.7이고, 비가 내리지 않을 때 경기에서 이길 확률이 0.5라 한다. 내일 비가 내릴 확률이 0.2일 때, 이 팀이 내일 경기에서 이길 확률을 구하여라.

38. 오른쪽 그림과 같이 독립적으로 작동하는 네 개의 스위치 P, Q, R, S를 포함하는 회로가 있다. 각 스위치가 ON일 확률이 $\frac{1}{2}$일 때, X에서 Y로 전류가 흐를 확률을 구하여라.



39. 어느 학급 학생들을 대상으로 실시한 지능 검사 결과 학생들의 지능 지수는 평균 100, 분산 25인 정규분포를 따른다고 한다. 이때 상위 $10\,\%$ 이내에 속하는 학생의 최저 지능 지수는? (단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.3) = 0.4$)

① 105.5 ② 106 ③ 106.5
④ 107 ⑤ 107.5

40. 어떤 학생이 [정답]이 한 개인 오지선다형 문제 100개에 임의로 답을 할 때, a개 이상의 문제를 맞힐 확률이 0.01이라 한다. 이때 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 실수 a의 값을 구하면?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.5	0.43
2.0	0.48
2.5	0.49

① 10 ② 15 ③ 20
④ 25 ⑤ 30

[난문현답 기출 정답]

1. ⑤
2. ②
3. 16
4. ③
5. 25
6. ③
7. ④
8. 35
9. 118
10. 182

[추가 과제 정답]

1) **정답** 2

$x \to 0$ 일 때 (분자) $\to 0$ 이고 0 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to 0$ 이다.

즉 $\lim\limits_{x \to 0}(ax^2+b)=0$ 이므로 $b=0$

$b=0$ 을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \to 0}\frac{(e^x-1)\ln(1+x)}{ax^2}=\lim_{x \to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$$

$\frac{1}{a}=1$ 에서 $a=1$

$$\therefore\ 2a+b=2$$

2) **정답** ①

[풀이] $\sqrt[n]{x}-1=t$ 로 놓으면 $\sqrt[n]{x}=1+t$

$$\therefore\ x=(1+t)^n$$

위의 식의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln x=n\ln(1+t) \qquad \therefore\ n=\frac{\ln x}{\ln(1+t)}$$

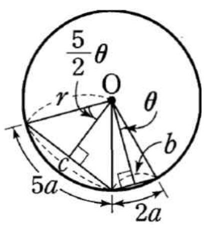
$n \to \infty$ 일 때 $t \to 0$ 이므로

$$f(x)=\lim_{n \to \infty}n(\sqrt[n]{x}-1)=\lim_{t \to 0}\frac{\ln x}{\ln(1+t)}\cdot t$$

$$=\ln x\cdot\lim_{t \to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}}=\ln x\cdot 1=\ln x$$

$$\therefore\ f(e)+f\left(\frac{1}{e}\right)=\ln e+\ln\frac{1}{e}=1-1=0$$

3) **정답** ⑤



오른쪽 그림과 같이 호의 길이가 $2a$, $5a$ 인 부채꼴의 중심각의 크기를 각각 2θ, 5θ 라 하면 $2a=r\cdot 2\theta$, $5a=r\cdot 5\theta$ 이므로 $\quad a=r\theta$

또 $\frac{b}{2}=r\sin\theta$, $\frac{c}{2}=r\sin\frac{5}{2}\theta$ 이므로

$$b=2r\sin\theta,\ c=2r\sin\frac{5}{2}\theta$$

$a \to 0+$ 일 때 $\theta \to 0+$ 이므로

$$\lim_{a \to 0+}\frac{b+c}{a}=\lim_{\theta \to 0+}\frac{2r\sin\theta+2r\sin\frac{5}{2}\theta}{r\theta}$$

$$=\lim_{\theta \to 0+}\left(2\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}+5\cdot\frac{\sin\frac{5}{2}\theta}{\frac{5}{2}\theta}\right)$$

$$=2\cdot 1+5\cdot 1=7$$

4) **정답** $\frac{\pi}{3}$

[풀이] $\triangle\mathrm{OAP}$ 에서 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OP}}=1$ 이고, $\angle\mathrm{AOP}=2t$ 이므로

$$\triangle\mathrm{OAP}=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin 2t=\sin t\cos t$$

$\angle\mathrm{AOQ}=t$ 이므로 점 Q 의 좌표는 $(\cos t,\ \sin t)$ 이고, $\triangle\mathrm{RAQ}$ 에서 $\overline{\mathrm{RA}}=1-\cos t$, $\overline{\mathrm{QR}}=\sin t$ 이므로

$$\triangle\mathrm{RAQ}=\frac{1}{2}(1-\cos t)\sin t$$

$\triangle\mathrm{OAP}=2\triangle\mathrm{RAQ}$ 에서

$$\sin t\cos t=2\cdot\frac{1}{2}(1-\cos t)\sin t$$
$$\sin t\cos t=\sin t-\sin t\cos t$$
$$2\sin t\cos t-\sin t=0$$
$$\sin t(2\cos t-1)=0$$

$0<t<\frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin t>0$ 이므로 $2\cos t-1=0$

$$\cos t=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ t=\frac{\pi}{3}$$

5) **정답** $-\frac{1}{4}$

$$y=\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta$$
$$=\frac{1+\cos 2\theta}{2}+\frac{1}{2}\sin 2\theta$$
$$=\frac{1}{2}(\sin 2\theta+\cos 2\theta)+\frac{1}{2}$$

이때 $-1\le\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$ 이므로

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\le\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\le\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}$$

따라서 $M=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}$, $m=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}$ 이므로

$$Mm=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$$

6) 정답 $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

$f'(x)=a-2a\sin 2x=a(1-2\sin 2x)$

$f'(x)=0$ 에서 $\quad \sin 2x=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ x=\frac{\pi}{12}\ \left(\because\ 0\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{12}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	a	↗	$\frac{a}{12}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}a$	↘	$\frac{a}{4}\pi$

이때 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a}{4}\pi$ 이므로

$$\frac{a}{4}\pi=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore\ a=2$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2}{12}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$$

7) 정답 $\frac{3}{e^2}$

[풀이]

$$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$$
$$f''(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$$

$f''(x)=0$ 에서 $x=2$

$x<2$ 일 때 $f''(x)<0$, $x>2$ 일 때 $f''(x)>0$

$x=2$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

$\left(2,\ \frac{2}{e^2}\right)$ $\qquad$ · 50 %

이때 $f'(2)=-\frac{1}{e^2}$ 이므로 변곡점 $\left(2,\ \frac{2}{e^2}\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-\frac{2}{e^2}=-\frac{1}{e^2}(x-2) \qquad \therefore\ y=-\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{e^2}$$

· 30 %

따라서 $g(x)=-\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{e^2}$ 이므로

$$g(1)=-\frac{1}{e^2}+\frac{4}{e^2}=\frac{3}{e^2}$$ · 20 %

8) 정답 ③

[풀이]

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)-1$$

$$f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2+e^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2}{x^3}=e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1+2x}{x^4}$$

$f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값은 존재하지 않는다.

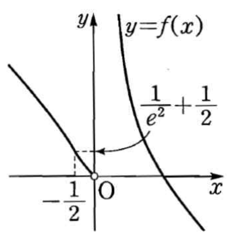
$f''(x)=0$ 에서 $1+2x=0$ $\therefore$ $x=-\frac{1}{2}$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	(0)	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$		$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	↘	$\frac{1}{e^2}+\frac{1}{2}$	↘		↘

이때 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$,

$\lim_{x\to0+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to0-}f(x)=0$ 이므로

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $f(x)$ 의 극값은 존재하지 않는다.

ㄴ. [반례] $x_1=1$, $x_2=2$ 이면 $f(1)=e-1$,

$f(2)=\sqrt{e}-2$ 이므로 $f(x_1)>f(x_2)$ 이다.

ㄷ. 변곡점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{e^2}+\frac{1}{2}\right)$ 이므로

$$a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{e^2}+\frac{1}{2}\qquad\therefore\ a+b=\frac{1}{e^2}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

9) 답 72

[해설]

타원 $16x^2+9y^2=144$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$16x_1x+9y_1y=144\qquad\therefore\ y=-\frac{16x_1}{9y_1}x+\frac{16}{y_1}$$

직선 AB의 기울기가 1이므로

$$-\frac{16x_1}{9y_1}=1\qquad\therefore\ x_1=-\frac{9}{16}y_1$$

이때 $16x_1^2+9y_1^2=144$이므로 $\frac{255}{16}y_1^2=144$

$$y_1^2=\frac{256}{25}\qquad\therefore\ y_1=\pm\frac{16}{5}$$

따라서 직선 AB의 방정식은 $y=x+5$

한편, 직선 BC의 방정식은 $y=-4$이므로

B$(-9,\ -4)$

또 C$(3,\ -4)$ 이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=12$

△ABC는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=12$

따라서 △ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot12\cdot12=72$$

10) 답 $\sqrt{6}$

[해설]

쌍곡선 $x^2-5y^2=15$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x-5y_1y=15\qquad\therefore\ y=\frac{x_1}{5y_1}x-\frac{3}{y_1}$$

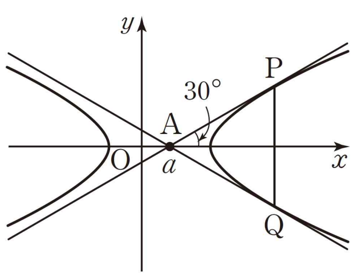
이 직선이 점 A$(a,\ 0)$을 지나므로

$$0=\frac{ax_1}{5y_1}-\frac{3}{y_1}\quad\therefore\ x_1=\frac{15}{a}$$

오른쪽 그림에서 △APQ가 정삼각형이므로

$$\frac{x_1}{5y_1}=\pm\tan\left(\frac{1}{2}\angle\mathrm{PAQ}\right)$$

$$=\pm\tan30^\circ=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$\therefore\ y_1=\pm\frac{\sqrt{3}}{5}x_1=\pm\frac{3\sqrt{3}}{a}$$

이때 $x_1^2-5y_1^2=15$이므로

$$\frac{225}{a^2}-5\cdot\frac{27}{a^2}=15,\qquad\frac{90}{a^2}=15$$

$$a^2=6\qquad\therefore\ a=\sqrt{6}\ (\because\ a>0)$$

11) 답 4

[해설] 점 P의 시각 t에서의 위치를 x라 하면

$$x=\int_0^t(\sin2t-2\sin t)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cos2t+2\cos t\right]_0^t$$

$$=-\frac{1}{2}\cos2t+2\cos t-\frac{3}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}(2\cos^2t-1)+2\cos t-\frac{3}{2}$$

$$=-\cos^2t+2\cos t-1$$

$$=-(\cos t-1)^2$$

$0\le t\le\pi$에서 $-1\le\cos t\le1$이므로

$-2\le\cos t-1\le0$, $0\le(\cos t-1)^2\le4$

$\therefore -4\le-(\cos t-1)^2\le0$

즉 $-4\le x\le0$에서 $|x|\le4$이므로 원점과 점 P사이의 거리의 최댓값은 4이다.

12) 답 ②

[해설] $\frac{dx}{dt}=\cos t-\sin t$, $\frac{dy}{dt}=-\sin t-\cos t$

이므로 $t=0$에서 $t=\pi$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^\pi\sqrt{(\cos t-\sin t)^2+(-\sin t-\cos t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^\pi\sqrt{2(\sin^2t+\cos^2t)}\,dt$$

$$=\int_0^\pi\sqrt{2}\,dt=\left[\sqrt{2}t\right]_0^\pi$$

$$=\sqrt{2}\pi$$

13) 답 ②

[해설]

$\overline{DH}\perp$(평면 $EFGH$), $\overline{DI}\perp\overline{EG}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{HI}\perp\overline{EG}$

직각삼각형 EHG에서 $\overline{EH}\cdot\overline{HG}=\overline{EG}\cdot\overline{HI}$이므로

$$1\cdot2=\sqrt{1^2+2^2}\cdot\overline{HI}\qquad\therefore\ \overline{HI}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

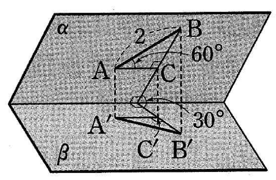
직각삼각형 DHI에서

$$\overline{DI}=\sqrt{1^2+\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

14) 답 $\frac{\sqrt{13}}{2}$

[해설]

오른쪽 그림과 같이 점 B에서 점 A를 지나고 α, β의 교선과 평행한 직선에 내린 수선의 발을 C, 점 C의 평면 β 위로의 정사영을 C'이라 하면 직각삼각형 ABC의 평면 β 위로의 정사영은 직각삼각형 $A'B'C'$이다.



$\overline{AC}$와 평면 β가 이루는 각의 크기는 0°이므로

$$\overline{A'C'}=\overline{AC}\cos0^\circ=\overline{AB}\cos60^\circ=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

$\overline{BC}$와 평면 β가 이루는 각의 크기는 30°이므로

$$\overline{B'C'}=\overline{BC}\cos30^\circ=2\sin60^\circ\cdot\cos30^\circ$$

$$=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$$

따라서 직각삼각형 $A'B'C'$에서

$$\overline{A'B'}=\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

15) 정답 432

[풀이]
A, B 두 나라의 대표를 각각 한 사람으로 생각하여 5명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(5-1)!=4!=24$

같은 나라 대표끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는

$3!\cdot 3!=36$

이므로 A, B 두 나라의 대표들이 자국의 대표끼리 이웃하게 앉는 방법의 수는

$24\cdot 36=864$

A, B, C 세 나라의 대표를 각각 한 사람으로 생각하여 3명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(3-1)!=2!=2$

같은 나라 대표들끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는

$3!\cdot 3!\cdot 3!=216$

이므로 A, B, C 세 나라의 대표들이 자국의 대표끼리 이웃하게 앉는 방법의 수는

$2\cdot 216=432$

따라서 A, B 두 나라의 대표들만 자국의 대표끼리 이웃하게 앉는 방법의 수는

$864-432=432$

16) **정답** ④
A, B, C, D, E의 순서로 칠할 때, A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

(ⅰ) B와 D가 같은 색인 경우
D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, E에 칠할 수 있는 색은 A와 B(D)에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 경우의 수는
$5\cdot 4\cdot 3\cdot 1\cdot 3=180$

(ⅱ) B와 D가 다른 색인 경우
D에 칠할 수 있는 색은 A, B, C에 칠한 색을 제외한 2가지, E에 칠할 수 있는 색은 A, B, D에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 경우의 수는 $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 2=240$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는
$180+240=420$

17) **정답** $\frac{1}{6}$

[풀이]
3가지 색을 적어도 한 번씩은 이용하여 칠하므로 6개의 영역을 3가지 색을 모두 이용하여 칠하는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 3가지 색을 1번, 1번, 4번 칠하는 경우
3가지 색 중에서 4번 칠하는 색을 정하는 방법의 수는 ${}_3C_1=3$이므로 6개의 영역을 칠하는 방법의 수는

$${}_3C_1\cdot\frac{6!}{4!}=90$$

(ⅱ) 3가지 색을 1번, 2번, 3번 칠하는 경우
3가지 색 중에서 1번, 2번, 3번 칠하는 색을 정하는 방법의 수는 $3!=6$이므로 6개의 영역을 칠하는 방법의 수는

$$3!\cdot\frac{6!}{2!\cdot 3!}=360$$

(ⅲ) 3가지 색을 2번, 2번, 2번 칠하는 경우
6개의 영역을 칠하는 방법의 수는 $\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}=90$

이상에서 3가지 색을 모두 이용하여 칠하는 방법의 수는

$90+360+90=540$

한편 이웃하는 영역을 서로 다른 색으로 칠하는 방법의 수는

$3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=96$

이 중에서 이웃하는 영역을 2가지 색으로만 칠하는 방법의 수는

${}_3C_2\cdot 2=6$

이므로 구하는 확률은 $\frac{96-6}{540}=\frac{90}{540}=\frac{1}{6}$

18) **정답** ⑤
집합 A에서 집합 B로의 함수 f의 개수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

$f(1)+f(2)+f(3)=14$를 만족시키는 함수 f의 개수는 4, 5, 5를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로 $\frac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{8}$

19) **정답** ①
[풀이]
집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$에서 두 원소 $m,\ n$을 택하는 모든 경우의 수는 $10\cdot 10=100$

3^m+4^n이 5로 나누어떨어지려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.
이때 3^m의 일의 자리 숫자는 3, 9, 7, 1이 이 순서대로 반복되고, 4^n의 일의 자리 숫자는 4, 6이 이 순서대로 반복되므로 3^m+4^n이 5로 나누어떨어지는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 4^n의 일의 자리 숫자가 6인 경우
3^m의 일의 자리 숫자는 9이어야 하므로 n의 값은 2, 4, 6, 8, 10의 5개, m의 값은 2, 6, 10의 3개이다.
$\therefore\ 5\cdot 3=15$

(ⅱ) 4^n의 일의 자리 숫자가 4인 경우
3^m의 일의 자리 숫자는 1이어야 하므로 n의 값은 1, 3, 5, 7, 9의 5개, m의 값은 4, 8의 2개이다.
$\therefore\ 5\cdot 2=10$

(ⅰ), (ⅱ)에서 3^m+4^n이 5로 나누어떨어지는 경우의 수는
$15+10=25$

따라서 구하는 확률은 $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$

20) **정답** $\frac{4}{9}$
[풀이]
$(a-b)(b-c)(c-a)=0$에서

$a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$

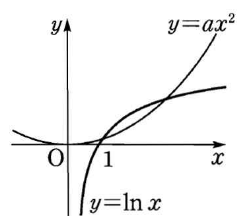
$a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$인 사건을 A라 하면 A^c는 $a\neq b,\ b\neq c,\ c\neq a$, 즉 세 개의 주사위의 눈의 수가 모두 다른 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^c)=\frac{{}_6P_3}{6^3}=\frac{5}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^c)=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$$

21) **정답** $0<a<\frac{1}{2e}$



방정식 $\ln x=ax^2$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=\ln x,\ y=ax^2$이 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 $a>0$

$f(x)=\ln x,\ g(x)=ax^2$으로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{x},\ g'(x)=2ax$$

두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$가 접할 때, 접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\ln t=at^2$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\frac{1}{t}=2at$ $\quad\therefore\ a=\frac{1}{2t^2}$

$\therefore\ a=\frac{1}{2t^2}$을 ㉠에 대입하면 $\ln t=\frac{1}{2}$ $\therefore\ t=\sqrt{e}$

$\therefore\ a=\frac{1}{2e}$

따라서 방정식 $\ln x = ax^2$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$$0 < a < \frac{1}{2e}$$

22) 정답 ①

[풀이]

방정식 $x^2 - \ln(1+2x^2) = k$가 서로 다른 네 실근을 가지려면 곡선 $y = x^2 - \ln(1+2x^2)$과 직선 $y = k$가 서로 다른 네 점에서 만나야 한다.

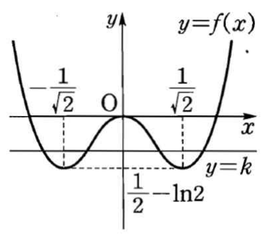
$f(x) = x^2 - \ln(1+2x^2)$으로 놓으면

$$f'(x) = 2x - \frac{4x}{1+2x^2} = \frac{2x(2x^2-1)}{1+2x^2}$$

$f'(x) = 0$에서 $x = 0$ 또는 $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ 또는 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$\frac{1}{2}-\ln 2$	↗	0	↘	$\frac{1}{2}-\ln 2$	↗

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$이므로 $y = f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = k$가 서로 다른 네 점에서 만나려면

$$\frac{1}{2} - \ln 2 < k < 0$$

23) 정답 ⑤

$\ln x = t$로 놓으면 $\quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$

또한 $x = 1$일 때 $t = 0$, $x = k$일 때 $t = \ln k$이므로

$$f(k) = \int_1^k \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx = \int_0^{\ln k} \sqrt{t}\,dt$$

$$= \int_0^{\ln k} t^{\frac{1}{2}}\,dt = \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\ln k}$$

$$= \frac{2}{3}\ln k\sqrt{\ln k}$$

$$\therefore\ f(k^{36}) = \frac{2}{3}\ln k^{36}\sqrt{\ln k^{36}} = \frac{2}{3}\cdot 36\ln k\cdot 6\sqrt{\ln k}$$

$$= 216\cdot\frac{2}{3}\ln k\sqrt{\ln k} = 216f(k)$$

24) 정답 2

$f(x) = |\cos x|$로 놓으면 $f(x) = f(x+\pi)$에서 $f(x)$는 주기함수이므로

$$\int_a^{a+\pi} |\cos x|\,dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$$

$$= 2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\cdot 1 = 2$$

25) 정답 ③

$f(-x) = f(x)$이므로 $f(x)$는 기함수이다.

ㄱ. $\sin f(-x) = \sin\{-f(x)\} = -\sin f(x)$이므로 $\sin f(x)$는 기함수이다.

$$\therefore\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin f(x)\,dx = 0$$

ㄴ. $\cos f(-x) = \cos\{-f(x)\} = \cos f(x)$이므로 $\cos f(x)$는 우함수이다.

$$\therefore\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos f(x)\,dx \neq 0$$

ㄷ. $f(x)$는 기함수, $\sin x$는 기함수이므로 $f(x)\sin x$는 우함수이다.

$$\therefore\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx \neq 0$$

ㄹ. $f(x)$는 기함수, $\cos x$는 우함수이므로 $f(x)\cos x$는 기함수이다.

$$\therefore\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx = 0$$

이상에서 정적분의 값이 0인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

26) 정답 $\frac{2e^2+1}{2}$

$\int_1^x (x+t)f(t)\,dt = e^{2x} + x - e^2 - 1$에서

$$x\int_1^x f(t)\,dt + \int_1^x tf(t)\,dt = e^{2x} + x - e^2 - 1$$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t)\,dt + xf(x) + xf(x) = 2e^{2x} + 1$$

$$\therefore\ \int_1^x f(t)\,dt + 2xf(x) = 2e^{2x} + 1$$

위의 등식의 양변에 $x = 1$을 대입하면

$$2f(1) = 2e^2 + 1 \quad \therefore\ f(1) = \frac{2e^2+1}{2}$$

27) 정답 -2

$f(t) = 1 + \cos^4 t$, $F'(t) = f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1}{\pi - x}\int_\pi^x (1+\cos^4 t)\,dt = \lim_{x\to\pi}\frac{-1}{x-\pi}\int_\pi^x f(t)\,dt$$

$$= -\lim_{x\to\pi}\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}$$

$$= -F'(\pi) = -f(\pi)$$

$$= -2$$

28) 정답 $\frac{3}{2} + 2\ln 2$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x) = x + 1 + \frac{2}{x+1} - \left(x + \frac{2}{x}\right)$$

$$= 1 + \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x} = \frac{x^2+x-2}{x(x+1)}$$

$$= \frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)}$$

$f'(x) = 0$에서 $x = 1$ ($\because\ x > 0$)

따라서 $f(x)$는 $x = 1$에서 극솟이면서 최소이므로 최솟값은

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

$$f(1) = \int_1^2 \left(t + \frac{2}{t}\right)dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2 + 2\ln|t|\right]_1^2$$

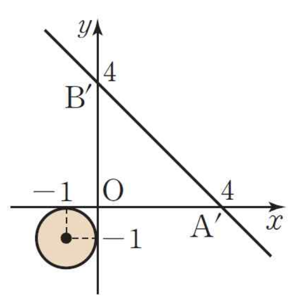
$$= 2 + 2\ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + 2\ln 2$$

29) [정답]

두 점 A$(4,\ 0,\ 5)$, B$(0,\ 4,\ 3)$의 xy평면 위로의 정사영은 각각

A$'(4,\ 0,\ 0)$, B$'(0,\ 4,\ 0)$

이므로 두 점 A$'$, B$'$을 지나는 xy평면 위의 직선의 방정식은



$$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$$

$\therefore\ x + y - 4 = 0 \quad$ ㉠

또 구 $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 1$의 xy평면 위로의 정사영은 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$

따라서 원 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$의 내부 또는 둘레 위의 점 P$'$과 직선 ㉠ 사이의 거리가 최소일 때, 삼각형 A$'$B$'$P$'$의 넓이가 최소이다.

원의 중심 $(-1,\ -1,\ 0)$에서 직선 ㉠까지의 거리는

$$\frac{|-1-1-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3\sqrt{2}$$

이므로 점 P$'$에서 직선 ㉠까지의 거리의 최솟값은

$3\sqrt{2} - 1$

$\overline{\text{A}'\text{B}'} = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$이므로 삼각형 A$'B'P'$의 넓이의 최솟값은

$\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot(3\sqrt{2}-1)=12-2\sqrt{2}$

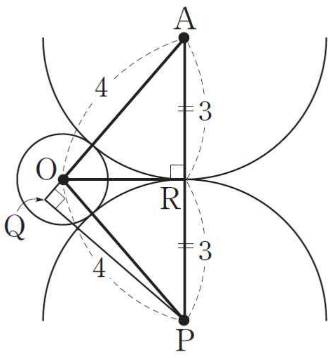
30) [정답] $3\sqrt{7}\pi$

두 구 $x^2+y^2+z^2=1$, $(x-3)^2+(y-1)^2+(z-\sqrt{6})^2=9$의 중심을 각각 $O(0,\ 0,\ 0)$, $A(3,\ 1,\ \sqrt{6})$이라 하면

$\overline{OA}=\sqrt{3^2+1^2+\sqrt{6}^2}=4$

이때 두 구의 반지름의 길이가 각각 1과 3이므로 $\overline{OA}=1+3$에서 두 구는 외접한다.

구 $(x-3)^2+(y-1)^2+(z-\sqrt{6})^2=9$와 구 C의 교점을 R라 하면 $\triangle OPA$는 이등변삼각형이고,



$\overline{AR}=\overline{PR}$ 이므로

$\overline{OR}\perp\overline{AP}$

직각삼각형 ORA에서

$\overline{OR}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

점 P에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 Q라 하면

$\overline{OA}\cdot\overline{PQ}=\overline{AP}\cdot\overline{OR}$, $4\overline{PQ}=6\sqrt{7}$

$\therefore\ \overline{PQ}=\frac{3\sqrt{7}}{2}$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 Q이고 반지름의 길이가 $\frac{3\sqrt{7}}{2}$인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$2\pi\cdot\frac{3\sqrt{7}}{2}=3\sqrt{7}\pi$

31) 답 4

[해설] 점 P의 좌표를 (a,b)라 하면

$a^2+b^2=16$

$H(a,0)$이므로 선분 PH의 중점 Q의 좌표는 $Q\left(a,\frac{b}{2}\right)$

$a=x$, $\frac{b}{2}=y$로 놓으면 $a=x$, $b=2y$

이를 $a^2+b^2=16$에 대입하면 $x^2+(2y)^2=16$

$\therefore\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

따라서 $p=\frac{1}{16}$, $q=\frac{1}{4}$이므로 $\frac{q}{p}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{16}}=4$

32) 답 ③

[전략] 원과 타원의 정의를 이용한다.

[해설] $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$에서 $\sqrt{16-12}=2$이므로

$F'(-2,0)$, $F(2,0)$

타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF'}=2\cdot 4=8$

이때 $\overline{QF'}$은 원 $(x+2)^2+y^2=4$의 반지름이므로

$\overline{QF'}=2$, $\overline{RF}=2$

$\therefore\ \overline{PQ}+\overline{PR}\leq(\overline{PF'}+\overline{QF'})+(\overline{PF}+\overline{RF})$

$=(\overline{PF'}+\overline{PF})+\overline{QF'}+\overline{RF}$

$=8+2+2=12$

따라서 $\overline{PQ}+\overline{PR}$의 최댓값은 12이다.

33) 답 ③

[해설] 점 A가 원점, 모서리AC,AD가 각각 y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 주어진 도형을 좌표공간에 놓으면

$B(2\sqrt{3},2,0), E(2\sqrt{3},2,12)$

이므로 점 P의 좌표는

$P(2\sqrt{3},2,4)$

또 $C(0,4,0)$, $F(0,4,12)$이므로 점 Q의 좌표는

$Q=(0,4,8)$

따라서 $\overrightarrow{AP}=(2\sqrt{3},2,4)$, $\overrightarrow{PQ}=(-2\sqrt{3},2,4)$이므로

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PQ}=-12+4+16=8$

34) 답 $2\sqrt{17}$

[해설] 오른쪽 그림에서

$\overline{AB}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$

$\overline{OC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

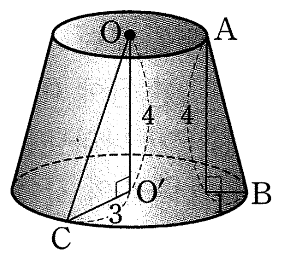
이므로 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OC}|^2$

$=|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OC}|^2$

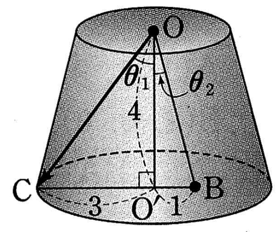
$=17+2\times\sqrt{17}\times 5\times\cos\theta+25$

$=42+10\sqrt{17}\cos\theta$



따라서 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OC}|$가 최소일 때에는 cost heta의 값이 최소일 때고 $0<\theta<\pi$ 이 므 로 θ가 가장 클때 $\cos\theta$의 값이 가장 작다. 점A를 점 O로 평행이동시키면 점 B는 중심이 O'이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이므로 오른쪽그림과 같이 세 점 C, O',B가 한 직선위에 있을 때 θ가 가장 크다.

$\angle COO'=\theta_1$, $\angle BOO'=\theta_2$ 라 하면



$\cos\theta=\cos(\theta_1+\theta_2)$

$=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2$

$=\frac{4}{5}\times\frac{4}{\sqrt{17}}-\frac{3}{5}\times\frac{1}{\sqrt{17}}$

$=\frac{13}{5\sqrt{17}}$

이를 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OC}|^2$

$=|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OC}|^2$

$=17+2\times\sqrt{17}\times 5\times\cos\theta+25$

$=42+10\sqrt{17}\cos\theta$

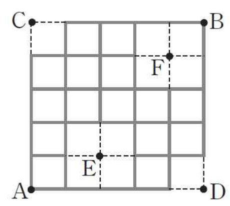
에 대입하면

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OC}|^2\geq 42+10\sqrt{17}\times\frac{13}{5\sqrt{17}}=68$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{68}=2\sqrt{17}$

35) 정답 ④

[풀이]



오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하고 네 지점 C, D, E, F를 잡으면 구하는 방법의 수는 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수에서 C 또는 D 또는 E 또는 F를 거쳐 최단 거리로 가는 방법의 수를 뺀 것과 같다.

A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\frac{10!}{5!\cdot 5!}=252$

(ⅰ) A → C → B의 경우의 수는

$1\cdot 1=1$

(ⅱ) A → D → B의 경우의 수는

$1\cdot 1=1$

(ⅲ) A → E → B의 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}\cdot\frac{7!}{3!\cdot 4!}=3\cdot 35=105$

(ⅳ) A → F → B의 경우의 수는

$\frac{8!}{4!\cdot 4!}\cdot 2!=70\cdot 2=140$

(ⅴ) A → E → F → B의 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot 2!=3\cdot 10\cdot 2=60$

이상에서 구하는 방법의 수는

$252-(1+1+105+140-60)=65$

36) 정답 48

꼭짓점 A에서 꼭짓점 B로 가려면 가로, 세로, 높이의 방향으로 각각 3번, 1번, 2번 이동해야 하므로 최단거리로 가는 방법의 수는

$\frac{6!}{3!\cdot 2!}=60$

또 꼭짓점 A에서 모서리 CD를 거쳐 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는 $\frac{4!}{2!}\cdot 1\cdot 1=12$

따라서 구하는 방법의 수는 $60-12=48$

37) 정답 0.54

내일 비가 내리는 사건을 A, 내일 경기에서 이기는 사건을 E라 하면 내일 비가 내리지 않는 사건은 A^c이므로

$P(A)=0.2$, $P(A^c)=0.8$,

$$\mathrm{P}(E|A)=0.7,\ \mathrm{P}(E|A^c)=0.5$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^c\cap E)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(E|A^c)\\&=0.2\times0.7+0.8\times0.5\\&=0.54\end{aligned}$$

38) **정답** $\frac{5}{16}$

스위치 P, Q, S를 통하여 전류가 흐르는 사건을 A, 스위치 R, S를 통하여 전류가 흐르는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{5}{16}\end{aligned}$$

39) **[정답]** ③

학생들의 지능 지수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-100}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

상위 $10\,\%$ 이내에 속하는 학생의 최저 지능 지수를 a라 하면

$$\mathrm{P}(X\geq a)=0.1,\ \mathrm{P}\left(Z\geq\frac{a-100}{5}\right)=0.1$$

$$\mathrm{P}(Z\geq0)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-100}{5}\right)=0.1$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-100}{5}\right)=0.1$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-100}{5}\right)=0.4$$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq1.3)=0.4$이므로

$$\frac{a-100}{5}=1.3,\ a-100=6.5$$

$$\therefore\ a=106.5$$

따라서 상위 $10\,\%$ 이내에 속하는 학생의 최저 지능 지수는 106.5이다.

40) **[정답]** ⑤

맞히는 문제의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=100\cdot\frac{1}{5}=20,\ \mathrm{V}(X)=100\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=16$$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따른다.

이때 $Z=\frac{X-20}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\geq a)=0.01$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{a-20}{4}\right)=0.01$$

$$\mathrm{P}(Z\geq0)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-20}{4}\right)=0.01$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-20}{4}\right)=0.01$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-20}{4}\right)=0.49$$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq2.5)=0.49$이므로

$$\frac{a-20}{4}=2.5,\quad a-20=10$$

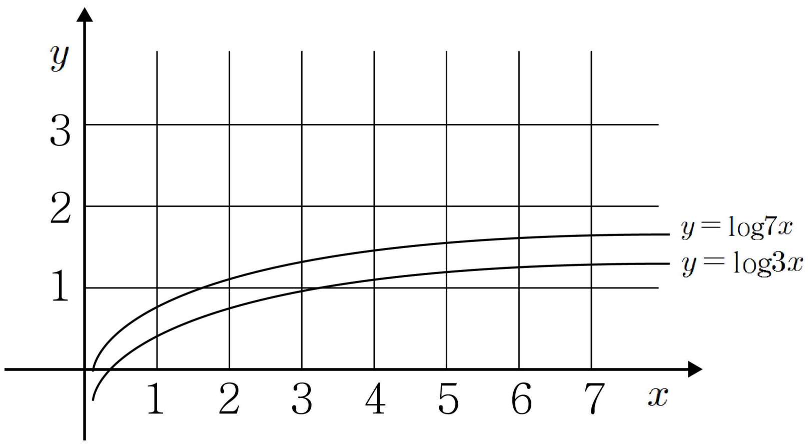
$$\therefore\ a=30$$

제 7 회

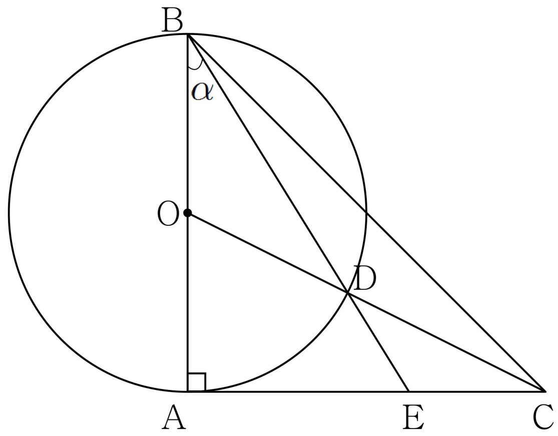
1. 2012년 9월 평가원
2. 2010년 4월 교육청
3. 2010년 수능
4. 2016년 9월 평가원
5. 2010년 사관학교
6. 2011년 수능
7. 2005년 9월 평가원
8. 2007년 경찰대
9. 2010년 4월 교육청
10. 2007년 6월 평가원

1. 좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 정사각형 중 두 함수 $y=\log 3x$, $y=\log 7x$의 그래프와 모두 만나는 것의 개수를 구하시오.

(가) 꼭짓점의 x좌표, y좌표가 모두 자연수이고 한 변의 길이가 1이다. (나) 꼭짓점의 x좌표는 모두 100이하이다.



2. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}$를 빗변으로 하는 직각이등변삼각형 ABC가 있다. AB의 중점을 O, AB를 지름으로 하는 원 O와 OC와의 교점을 D, BD의 연장선과 AC의 교점을 E라 하자. $\angle\mathrm{ABE}=\alpha$라 할 때, $\tan\alpha$의 값은?



① $\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$

② $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$

③ $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

④ $\dfrac{-1+\sqrt{6}}{2}$

⑤ $\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$

3. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 정적분 $\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx$의 값을 k라 하자. 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $\int_0^1 \{f(x)g'(1-x)-g(x)f'(1-x)\}dx=-k$
ㄴ. $f(0)=f(1)$이고 $g(0)=g(1)$이면 $k=0$이다.
ㄷ. $f(x)=\ln(1+x^4)$이고 $g(x)=\sin\pi x$이면 $k=0$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

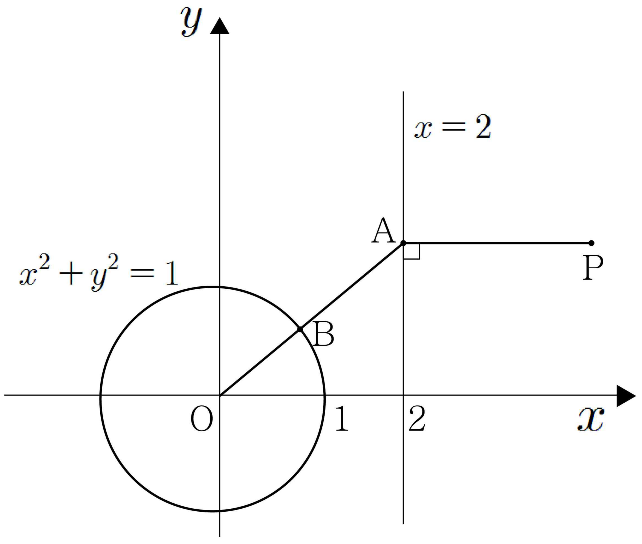
4. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |\sin x|-\sin x & \left(-\frac{7}{2}\pi \le x \le 0\right) \\ \sin x-|\sin x| & \left(0<x \le \frac{7}{2}\pi\right) \end{cases}$$

라 하자. 닫힌 구간 $\left[-\frac{7}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi\right]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)dt \ge 0$이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 α, 최댓값을 β라 할 때, $\beta-\alpha$의 값은?
(단, $-\frac{7}{2}\pi \le \alpha \le \frac{7}{2}\pi$)

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ $\frac{5}{2}\pi$
④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ $\frac{9}{2}\pi$

5. 좌표평면에서 그림과 같이 직선 $x=2$위를 움직이는 점 A에 대하여 선분 OA 가 원 $x^2+y^2=1$과 만나는 점을 B라 하자. 평면 위의 점 P가 다음 조건을 모두 만족시키면 점 P가 나타내는 도형은 어떤 쌍곡선의 일부가 된다.

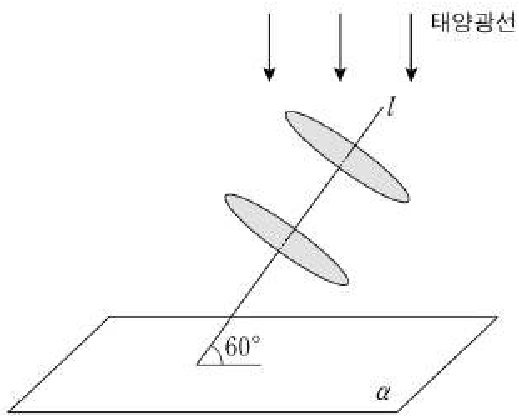


(가) $\overline{\mathrm{AP}}=2\overline{\mathrm{AB}}$
(나) 직선 AP는 직선 $x=2$와 수직이다.
(다) 점 P의 x좌표는 2보다 크다.

이때, 이 쌍곡선의 점근선 중 기울기가 양수인 점근선의 방정식은? (단, O는 원점이다.)

① $y=\frac{1}{3}x$　② $y=\frac{\sqrt{2}}{3}x$　③ $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$
④ $y=\frac{1}{2}x$　⑤ $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$

6. 그림과 같이 중심 사이의 거리가 $\sqrt{3}$이고 반지름의 길이가 1인 두 원판과 평면 α가 있다. 각 원판의 중심을 지나는 직선 l은 두 원판의 면과 각각 수직이고, 평면 α와 이루는 각의 크기가 60°이다. 태양광선이 그림과 같이 평면 α에 수직인 방향으로 비출 때, 두 원판에 의해 평면 α에 생기는 그림자의 넓이는? (단, 원판의 두께는 무시한다.)



① $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{8}$
② $\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}$
③ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{1}{8}$
④ $\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{16}$
⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{3}{4}$

7. 좌표공간에 반구 $(x-5)^2+(y-4)^2+z^2=9$, $z \geq 0$가 있다. y축을 포함하는 평면 α가 반구와 접할 때, α와 xy평면이 이루는 각을 θ라 하자. 이때 $30\cos\theta$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

8. 무승부가 없고, 두 사람의 승패를 겨루는 게임이 있다. 게임에서 지는 사람은 그 다음 게임에 참가하지 않기로 하고, A, B, C 세 사람이 이 게임을 15회 실시한 후, 결과를 다음과 같은 게임성적표에 작성하려고 한다.

선수 \ 회	1	2	⋯	15	
A			⋯		승 : O
B			⋯		패 : X
C			⋯		불참 : △

아래의 세 조건을 만족하는 서로 다른 게임성적표의 개수는?

(가) 첫 게임은 B와 C가 실시하여 B가 이겼다.
(나) 마지막 게임에서는 A가 졌다.
(다) A는 11승, B는 1승을 하였다.

① 4 ② 5 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

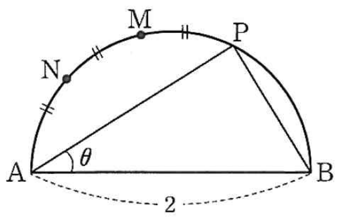
9. $\sum_{k=0}^{5} {}_5\mathrm{C}_k \left(\frac{3}{8}\right)^k \left(\frac{13}{8}\right)^{5-k}$의 값을 구하시오.

10. 표본공간 S는 $S=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이고 모든 근원사건의 확률은 같다. 표본공간 S의 두 사건 A,B가 서로 배반사건이고 $0<P(B)<P(A)$가 되도록 두 사건 A, B를 선택하는 경우의 수는?

① 45 ② 50 ③ 55
④ 60 ⑤ 65

추가 과제

1. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위의 한 점 P에 대하여 호 AP의 삼등분점 중 점 P에 가까운 점을 M, 점 A에 가까운 점을 N이라 하자.



$\angle \mathrm{PAB} = \theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$일 때, 선분 BN의 길이는 $a\cos\dfrac{\theta}{3} + b\sin\dfrac{\theta}{3}$이다. 두 상수 a, b에 대하여 $a^2 + b^2$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

2. 좌표평면에서 세 점 $A(-3,\ 0)$, $B(0,\ t)$, $C(0,\ 2t)$에 대하여 $\tan(\angle \mathrm{BAC})$의 값은 $t = a$일 때 최댓값 M을 갖는다. 두 상수 a, M에 대하여 aM의 값은?
(단, $t > 0$이고, $0 < \angle \mathrm{BAC} < \dfrac{\pi}{2}$이다.)

① $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ② $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ ③ $\dfrac{3}{4}$
④ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

3. 구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 연속인 함수 $f(x)$가 $(1-\cos x)f(x) = x\left(e^{2x}-1\right)$을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은?

① -2 ② 0 ③ 2
④ 4 ⑤ 6

4. 모든 양의 실수 x에 대하여 $x > \sin x$임을 이용하여 $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x - \sin x}$의 값을 구하면?

① $\dfrac{\pi}{2}$ ② $\dfrac{\pi}{3}$ ③ 1
④ $\dfrac{\pi}{4}$ ⑤ $\dfrac{\pi}{6}$

5. 함수 $f(x)=2^x+2^{2x}$에 대하여 $f'(x)=36\ln2$를 만족시키는 실수 x의 값은?

① $\ln2$ ② 1 ③ $2\ln2$
④ 2 ⑤ $4\ln2$

6. 함수 $f(x)=\sum_{n=1}^{20}x^{n-1}$에 대하여 함수 $g(x)=(x-1)^2f'(x)$라 할 때, $g'(-1)$의 값은?

① -760 ② -740 ③ -720
④ -700 ⑤ -680

7. 곡선 $y=\dfrac{3-x}{x-1}$ 와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=4$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $3\ln2-\ln3$ ② $3\ln2$ ③ $4\ln2-2\ln3$
④ $4\ln2-\ln3$ ⑤ $4\ln2$

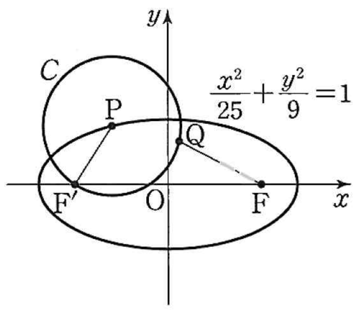
8. $\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx$의 값은?

① $-e^{\pi}-1$ ② $-\dfrac{1}{2}(e^{\pi}+1)$ ③ $\dfrac{1}{2}(e^{\pi}-1)$
④ $\dfrac{1}{2}(e^{\pi}+1)$ ⑤ $e^{\pi}+1$

9. 좌표평면에서 점 F(1, 0)과 직선 $x=4$로부터의 거리의 비가 1 : 2인 점 P$(x,\ y)$가 나타내는 도형의 방정식은?

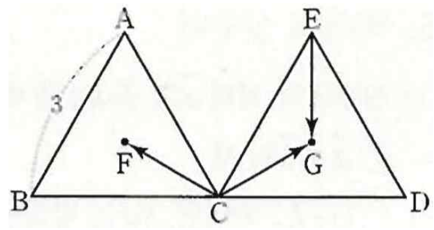
① $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$ ② $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ ③ $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$
④ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ ⑤ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$

10. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하고, 이 타원 위의 점 P를 중심으로 하고 선분 PF′을 반지름으로 하는 원을 C라고 하자. 원 C위의 점 Q에 대하여 선분 FQ의 길이의 최솟값이 4일 때, 원 C의 넓이는? (단, $\overline{\mathrm{PF'}}<\overline{\mathrm{PF}}$이다.)



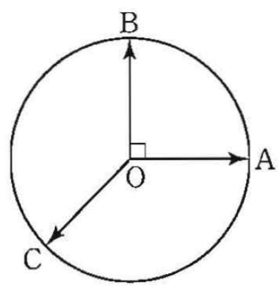
① 6π ② 7π ③ 8π
④ 9π ⑤ 10π

11. 그림과 같이 한 평면 위에서 한 변의 길이가 3인 두 정삼각형 ABC, ECD의 무게중심을 각각 F, G라고 하자. 이때 $|\overrightarrow{\mathrm{CF}}-\overrightarrow{\mathrm{CG}}+\overrightarrow{\mathrm{EG}}|$의 값은?
(단, 세 점 B, C, D는 한 직선 위에 있고, 두 직선 BD, FG는 서로 평행하다.)



① $\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{14}$
④ 4 ⑤ $3\sqrt{2}$

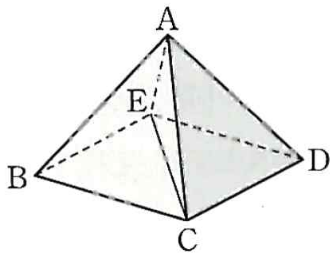
12. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 두 점 A, B에 대하여 $\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{OB}}$이다. 중심각의 크기가 270°인 부채꼴 OAB의 호 AB를 이등분하는 점을 C라고 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=m\overrightarrow{\mathrm{OA}}+n\overrightarrow{\mathrm{OB}}$를 만족시키는 두 실수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?



① -2 ② $-\sqrt{2}$ ③ -1
④ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 0

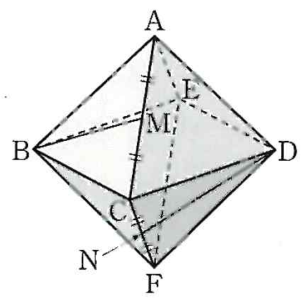
추가 과제

13. 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 같은 정사각뿔 $A-BCDE$에서 직선 AB와 직선 DE가 이루는 각의 크기를 α, 직선 AB와 직선 CE가 이루는 각의 크기를 β라고 하자. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta$의 값은? $\left(단, 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}\right)$



① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

14. 그림과 같이 정팔면체 ABCDEF에서 선분 AC의 중점을 M, 선분 CF의 중점을 N이라고 하자. 직선 BM과 직선 DN이 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값은?



① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

15. A, B, C를 포함한 7명을 원형의 탁자에 앉힐 때, A의 양 옆에 B와 C가 앉는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 경우는 같은 것으로 본다.)

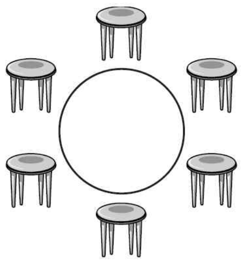
① 40 ② 42 ③ 44
④ 46 ⑤ 48

16. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는?

(가) $f(1) \ne f(2)$이고 $f(2) \ne f(3)$이다. (나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

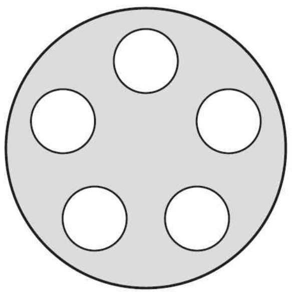
① 800 ② 810 ③ 820
④ 830 ⑤ 840

17. 1번부터 6번까지의 학생 6명이 모두 그림과 같은 원형의 탁자에 일정한 간격으로 앉으려고 할 때, 서로 마주 보는 두 학생의 번호의 합의 최댓값이 10이상이 되도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 경우는 같은 것으로 본다.)



① 40　② 42　③ 44
④ 46　⑤ 48

18. 서로 다른 접시 5개와 같은 종류의 박하맛 사탕 3개, 같은 종류의 딸기맛 사탕 2개가 있다. 각 접시에 사탕을 한 개씩 담아 그림과 같은 원형의 식탁의 5곳에 배치하는 경우의 수는? (단, 회전시켜 일치하는 경우는 같은 것으로 본다.)



① 210　② 220　③ 230
④ 240　⑤ 250

19. 서로 다른 영화 5편 가운데 A는 영화를 3편, B는 영화를 2편 선택하려고 한다. A와 B가 같은 영화를 1편만 선택하는 경우의 수는?

① 50　② 55　③ 60
④ 65　⑤ 70

20. 빨강, 파랑, 주황, 녹색의 볼펜이 각각 같은 종류로 5개씩 있다. 이 볼펜 중 5개를 선택할 때, 2가지 색으로만 선택하는 경우의 수는?

① 21　② 22　③ 23
④ 24　⑤ 25

추가 과제

21. 한 변의 길이가 4인 정사각형 모양의 종이 두 장을 완전히 포개어 놓았다가 그림과 같이 꼭짓점 A를 중심으로 한 장의 정사각형 모양의 종이를 시계방향으로 θ만큼 회전시켰다. 두 종이의 겹쳐진 부분의 넓이가 1일 때, $\tan\dfrac{\theta}{2}$의 값은? (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$)

① $\dfrac{12}{17}$ ② $\dfrac{13}{17}$ ③ $\dfrac{14}{17}$ ④ $\dfrac{15}{17}$ ⑤ $\dfrac{16}{17}$

22. 좌표평면에서 두 직선 $y=x+1$, $y=2x-1$이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$의 값은?

① $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\dfrac{3}{4}$ ③ $-\dfrac{1}{2}$ ④ $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $-\dfrac{1}{4}$

23. $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 x에 대한 방정식 $\tan x-2x=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위가 $\alpha<k<\beta$일 때, $\beta-\alpha$의 최댓값은?

① $\dfrac{\pi}{2}-1$ ② $\pi-2$ ③ $\pi-1$ ④ $\dfrac{\pi}{2}+1$ ⑤ $\pi+2$

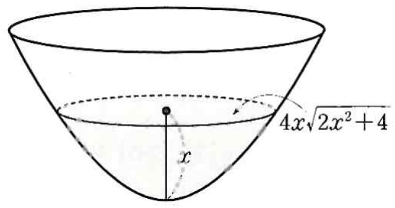
24. $0<x<2\pi$에서 두 곡선 $y=4\cos^2 x-3$, $y=a\cos x-a$의 교점이 존재하고 그 교점에서의 두 곡선의 접선이 일치하도록 하는 양수 a의 값은?

① 4 ② $\dfrac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\dfrac{11}{2}$ ⑤ 6

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x - \sin x| dx$의 값은?

① $\sqrt{2}-1$ ② $2(\sqrt{2}-1)$ ③ $2\sqrt{2}-1$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}+1$

7. 그림과 같은 모양의 빈 그릇에 물을 채우려고 한다. 바닥으로부터 물의 높이가 x일때, 수면의 넓이는 $4x\sqrt{2x^2+4}$라 한다. 물의 높이가 4가 될 때까지 물을 채울 때, 채운 물의 부피는?

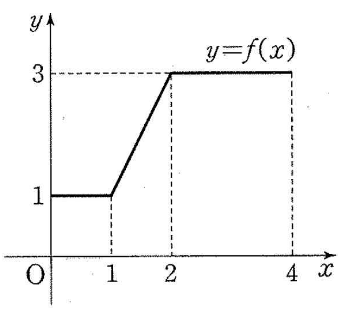


① $\frac{416}{3}$ ② $\frac{418}{3}$ ③ 140
④ $\frac{422}{3}$ ⑤ $\frac{424}{3}$

26. 닫힌 구간 $[0,4]$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (0 \le x < 1) \\ 2x-1 & (1 \le x < 2) \\ 3 & (2 \le x \le 4) \end{cases}$$

일 때, $\int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{3x}\, f(3x+1)dx$의 값은?



① $\frac{7}{15}$ ② $\frac{22}{45}$ ③ $\frac{23}{45}$
④ $\frac{8}{15}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

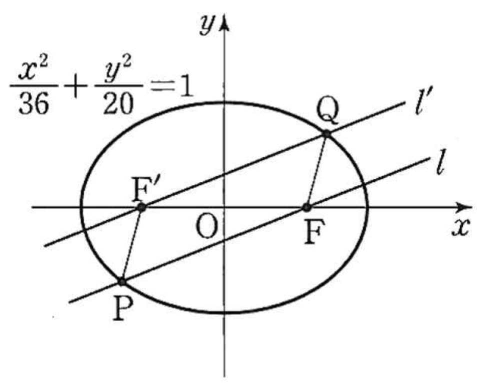
28. 곡선 $y = \sqrt{x\sin 2x}\left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$와 x축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$
④ π ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{2}\pi$

29. 중심이 원점이고 장축과 단축의 길이가 각각 $2\sqrt{3}$, 2인 타원이 점 A$(0,\ -1)$을 지난다. 이 타원 위의 점 P$(a,\ b)$에 대하여 선분 AP의 길이의 최댓값은?
(단, 점 P는 제 1사분면 위에 있다.)

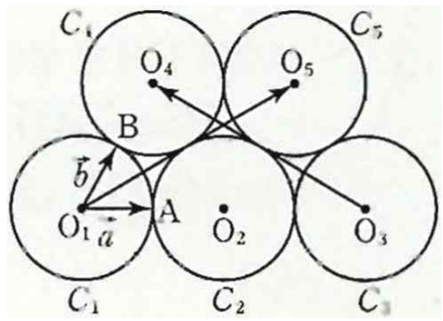
① 2 ② $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ③ $\sqrt{5}$
④ $\dfrac{\sqrt{22}}{2}$ ⑤ $\sqrt{6}$

30. 그림과 같이 타원 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$의 두 초점이 F, F$'$이고 점 F를 지나는 직선 l은 타원과 제 3사분면 위의 점 P에서 만나고, 점 F$'$을 지나는 직선 l'은 타원과 제 1사분면 위의 점 Q에서 만난다. 두 직선 l과 l'이 서로 평행하고 두 직선 사이의 거리가 $\sqrt{15}$일 때, $\overline{\text{PF}'}+\overline{\text{QF}}$의 값은? (단, 점 F의 x좌표는 양수이다.)



① 8 ② $6\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{5}$
④ $2\sqrt{22}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

31. 그림과 같이 반지름의 길이가 같고 중심이 $\text{O}_i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$인 원을 C_i라고 하자.
원 C_2는 네 원 C_1, C_3, C_4, C_5와 모두 외접하고 원 C_4는 두 원 C_1, C_5와도 외접하며 원 C_5는 원 C_3과도 외접하고 있다. 두 원 C_1, C_2 의 교점을 A, 두 원 C_1, C_4의 교점을 B라 하고 $\overrightarrow{\text{O}_1\text{A}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\text{O}_1\text{B}}=\vec{b}$라고 할 때, $\overrightarrow{\text{O}_1\text{O}_5}+\overrightarrow{\text{O}_3\text{O}_4}=l\,\vec{a}+m\,\vec{b}$를 만족시키는 두 실수 l, m에 대하여 $l+m$의 값은?

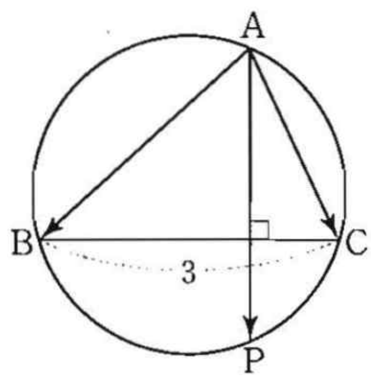


① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

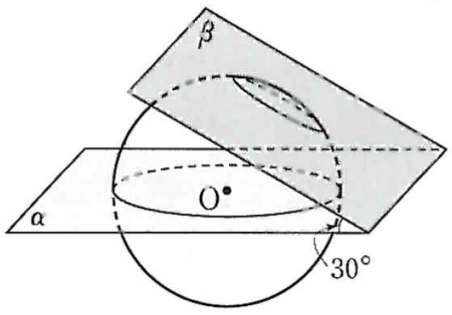
32. 그림과 같이 원에 내접하는 예각 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 지나고 선분 BC와 수직인 직선이 원과 만나는 점을 P라고 할 때, 점 P는

$$\overrightarrow{\text{AP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{AB}}+\overrightarrow{\text{AC}}$$

를 만족시킨다. $\overline{\text{BC}}=3$일 때 $|\overrightarrow{\text{AB}}|^2+|\overrightarrow{\text{AC}}|^2$의 값을 구하시오.

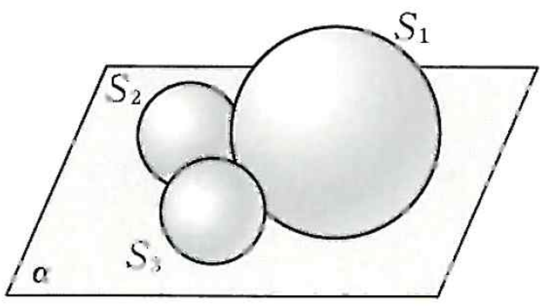


33. 그림과 같이 반지름의 길이가 5인 구의 중심 O를 지나는 평면 α와 이루는 각의 크기가 30°인 평면 β가 있다. 평면 β와 구가 만나서 생기는 단면의 평면 α위로의 정사영의 넓이가 $2\sqrt{3}\pi$일 때, 구의 중심 O와 평면 β 사이의 거리는?



① $2\sqrt{5}$ ② $\sqrt{21}$ ③ $\sqrt{22}$
④ $\sqrt{23}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

34. 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 구 S_1과 반지름의 길이가 1인 두 구 S_2, S_3이 서로 외접하면서 모두 평면 α에 접하고 있다. 세 구 S_1, S_2, S_3의 중심을 각각 A, B, C라 하고 선분 BC의 중점을 M이라고 하자. 직선 AM과 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos^2\theta = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



35. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수는?

(가) $f(1) < f(2) < f(3)$
(나) $f(4) \le f(5)$

① 110 ② 120 ③ 130
④ 140 ⑤ 150

36. 서로 다른 5개의 사탕을 A, B, C 세 사람에게 각 사람이 적어도 한 개씩 받도록 남김없이 나누어 줄 때, A가 받은 사탕의 개수가 B, C가 각각 받은 사탕의 개수보다 많거나 같은 경우의 수는?

① 50 ② 60 ③ 70
④ 80 ⑤ 90

37. 서로 다른 5가지 음식을 파는 식당이 있다. 갑이 이 식당에서 아침, 점심, 저녁에 각각 하나씩의 음식을 서로 다르게 주문하고 같은 날 을도 이 식당에서 아침, 점심, 저녁에 각각 하나씩의 음식을 서로 다르게 주문하려고 한다. 아침, 점심, 저녁 중 한 번만 두 사람이 주문한 음식이 같고 갑과 을이 주문한 음식의 종류가 총 4가지가 되도록 주문하는 경우의 수는?

① 700 ② 710 ③ 720
④ 730 ⑤ 740

38. 집합 $X=\{1, 2, 3\}$에서 X로의 함수 중 임의로 선택한 한 함수를 $f(x)$라 할 때, $f(1)f(2)f(3)$의 값이 6의 배수일 확률은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{10}{27}$ ③ $\frac{11}{27}$
④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{13}{27}$

39. 1층에서 5층까지 운행하는 엘리베이터에 1층에서 탑승한 6명의 탑승객이 2층, 3층, 4층, 5층 중 3개의 층에서 모두 내리는 경우의 수는? (단, 새로 타는 탑승객은 없다.)

① 2080 ② 2120 ③ 2160
④ 2200 ⑤ 2240

40. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에서 집합 $Y=\{-2, -1, 0, 1\}$로의 함수 중에서 임의로 선택한 한 함수를 $f(x)$라 할 때, $f(1)f(2)f(3)=0$ 또는 $f(4)\geq 0$이 성립할 확률은?

① $\frac{95}{128}$ ② $\frac{97}{128}$ ③ $\frac{99}{128}$
④ $\frac{101}{128}$ ⑤ $\frac{103}{128}$

정답 & 해설

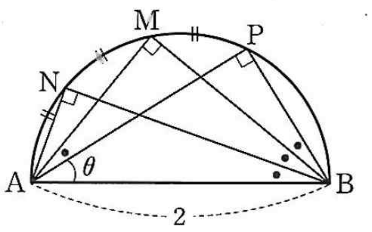
[난문현답 기출 정답]

1. 79
2. ③
3. ⑤
4. ①
5. 4
6. ⑤
7. 24
8. 3
9. 32
10. ⑤

[추가 과제 정답]

1) 답 ④

[해설]



그림과 같이 같은 길이의 호에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$\angle$ ABN$=x$라 하면

$\angle$ ABP $=3x$

따라서 직각삼각형 APB에서

$3x+\theta=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$x=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

$\quad=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\theta}{3}$

$\overline{\mathrm{BN}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos x$

$\quad=2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\theta}{3}\right)$

$\quad=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\theta}{3}+\sin\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{\theta}{3}\right)$

$\quad=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\dfrac{\theta}{3}+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\theta}{3}\right)$

$\quad=\sqrt{3}\cos\dfrac{\theta}{3}+\sin\dfrac{\theta}{3}$

$\overline{\mathrm{BN}}=a\cos\dfrac{\theta}{3}+b\sin\dfrac{\theta}{3}$에서

$a=\sqrt{3}$, $b=1$

따라서

$a^2+b^2=(\sqrt{3})^2+1^2=4$

2) 답 ③

[해설] (1) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

(2) $a>0$, $b>0$일 때, $\dfrac{a+b}{2}\ \geq\ \sqrt{ab}$

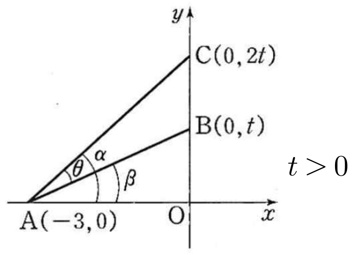
(단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

원점 O에 대하여 $\angle$ BAC$=\theta$, $\angle$ OAC$=\alpha$, $\angle$ OAB$=\beta$로 놓으면

$\tan\alpha=\dfrac{2t}{3}$, $\tan\beta=\dfrac{t}{3}$

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{\dfrac{2t}{3}-\dfrac{t}{3}}{1+\dfrac{2t}{3}\times\dfrac{t}{3}}=\dfrac{\dfrac{t}{3}}{1+\dfrac{2t^2}{9}}=\dfrac{3}{2t+\dfrac{9}{t}}$



이고 $2t+\dfrac{9}{t}\ \geq\ 2\sqrt{2t\times\dfrac{9}{t}}=6\sqrt{2}$이므로

$\tan\theta=\dfrac{3}{2t+\dfrac{9}{t}}\ \leq\ \dfrac{3}{6\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

그러므로 $\tan\theta$의 최댓값은 $M=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$이고, 이때 등호는 $2t=\dfrac{9}{t}$일 때 성립하므로 $t=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$이다.

따라서 $a=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$이므로 $aM=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\dfrac{3}{4}$

3) 답 ④

[해설] 함수의 연속의 정의와 지수함수, 삼각함수의 극한을 이용한다.

(1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

함수 $f(x)$가 구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다. 즉, $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$이다.

따라서

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x(e^{2x}-1)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(e^{2x}-1)(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(e^{2x}-1)(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(e^{2x}-1)(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot 2(1+\cos x)\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\right)^2\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot 2(1+\cos x)\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}2(1+\cos x)$$

$$=\left(\frac{1}{1}\right)^2\times 1\times 2(1+1)=4$$

4) 답 ③

[해설] $x\to 0+$일 때, $x>\sin x$이므로 함수 $f(x)$를 $f(x)=\sin x$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[\sin x,\ x]$에서 연속이고, 열린 구간 $(\sin x,\ x)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$\dfrac{f(x)-f(\sin x)}{x-\sin x}=f'(c)$ $(\sin x<c<x)$인 c가 존재한다.

$f'(x)=\cos x$이고 $x\to 0+$일 때

$\sin x\to 0+$이므로 $c\to 0+$ $(\sin x<c<x)$

따라서

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}=\lim_{c\to 0+}\cos c$$
$$=1$$

5) 답 ④

[해설] $f(x)=2^x+2^{2x}$에서

$f'(x)=2^x\ln 2+2\times 2^{2x}\ln 2=(2^x+2^{2x+1})\ln 2$

$f'(x)=36\ln 2$에서 $(2^x+2^{2x+1})\ln 2=36\ln 2$

$2^x+2^{2x+1}=36$

$2\cdot 2^{2x}+2^x-36=0$ $\quad\cdots$㉠

$2^x=t$로 놓으면 $t>0$이고 $2t^2+t-36=0$

$(t-4)(2t+9)=0$

따라서 $t=4$ ($t>0$이므로)

$2^x=4$에서 구하는 x의 값은 $x=2$

6) 답 ①

[해설] $x\neq 1$일 때

$f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{20}x^{n-1}=1+x+x^2+\cdots+x^{19}=\dfrac{x^{20}-1}{x-1}$이므로

$$f'(x)=\frac{(x^{20}-1)'(x-1)-(x^{20}-1)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{20x^{19}(x-1)-(x^{20}-1)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{19x^{20}-20x^{19}+1}{(x-1)^2}\ (\text{단, } x\neq 1)$$

$g(x)=(x-1)^2f'(x)$에서 $g(1)=0$이고

$x\neq 1$일 때 $g(x)=19x^{20}-20x^{19}+1$

따라서 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=19x^{20}-20x^{19}+1$

$g'(x)=380x^{19}-380x^{18}$이므로

$g'(-1)=-380-380=-760$

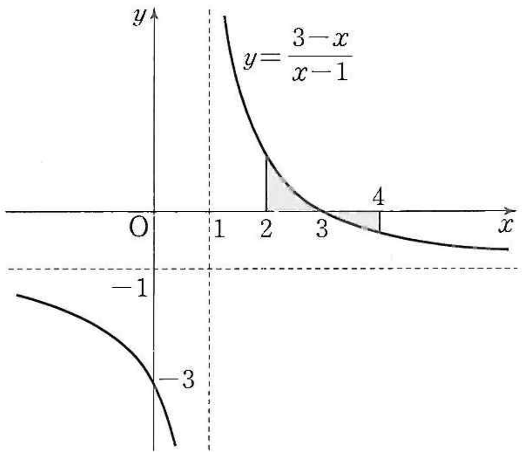
7) 답 ③

[해설]

$$y=\frac{3-x}{x-1}=\frac{-(x-1)+2}{x-1}=-1+\frac{2}{x-1}$$

$y=0$에서 $x=3$

즉, 곡선 $y=\frac{3-x}{x-1}$은 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 부분의 넓이는

$$\int_2^4\left|\frac{3-x}{x-1}\right|dx$$

$$=\int_2^3\left(-1+\frac{2}{x-1}\right)dx+\int_3^4\left(1-\frac{2}{x-1}\right)dx$$

$$=[-x+2\ln|x-1|]_0^3+[x-2\ln|x-1|]_3^4$$

$$=(-3+2\ln 2)-(-2+0)+(4-2\ln 3)-(3-2\ln 2)$$

$$=4\ln 2-2\ln 3$$

8) 답 ②

[해설] $\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx$에서

$f(x)=\cos x,\ \ g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=-\sin x,\ g(x)=e^x$이므로

$$\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx=\Big[e^x\cos x\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx \cdots\cdots ㉠$$

또, $\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx$에서

$u(x)=\sin x,\ v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=\cos x,\ v(x)=e^x$이므로

$$\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx=\Big[e^x\sin x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx$$

$$=-\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx=\Big[e^x\cos x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx$$

이므로 식을 정리하면

$$2\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx=\Big[e^x\cos x\Big]_0^{\pi}$$에서

$$\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\Big[e^x\cos x\Big]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2}(-e^{\pi}-1)=-\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$$

9) 답 ④

[해설]

$\overline{PF}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

점 $P(x,\ y)$에서 직선 $x=4$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{PH}=|4-x|$

$\overline{PF}:\overline{PH}=1:2$이므로

$\overline{PH}=2\overline{PF}$

$|4-x|=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$16-8x+x^2=4(x^2-2x+1)+4y^2$

$3x^2+4y^2=12$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

10) 답 ④

[해설]

타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점 P와 두 초점 F, F′에서 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF'}=10$ $\cdots\cdots$㉠

원 C 위의 점 Q에 대하여 $\overline{FQ}\geq\overline{PF}-\overline{PQ}=\overline{PF}-\overline{PF'}$이고 선분 FQ의 길이의 최솟값이 4이므로

$\overline{PF}-\overline{PF'}=4$ $\cdots\cdots$㉡

㉠−㉡을 하면

$2\overline{PF'}=6$

$\overline{PF'}=3$

따라서 구하는 원 C의 넓이는 9π이다.

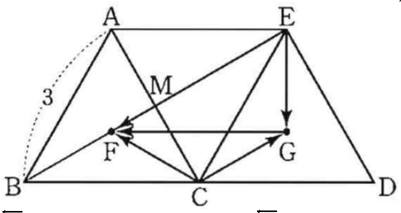
11) 답 ②

[해설]

$\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{GF}$이므로

$\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{EF}$

두 삼각형 ABC, ACE는 정삼각형이고, 선분 AC의 중점을 M이라고 할 때, 네 점 B, F, M, E는 한 직선 위에 있다.



정삼각형 ABC에서

$\overline{BM}=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$이므로

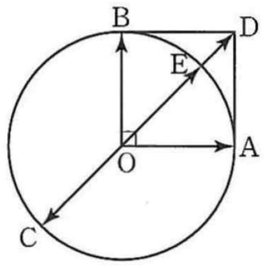
$\overline{FM}=\frac{1}{3}\times\overline{BM}=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{EM}=\overline{BM}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

따라서 $|\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{EG}|=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

12) 답 ②

[해설]

그림과 같이 사각형 OADB가 정사각형이 되도록 점 D를 잡고, 중심이 O인 원과 선분 OD의 교점을 E라고 하자.



$\overline{OE}=1,\ \overline{OD}=\sqrt{2}$이므로

$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{OD}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OE}$이고, $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$이므로

$\overrightarrow{OC}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OD}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OA}+-\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OB}$

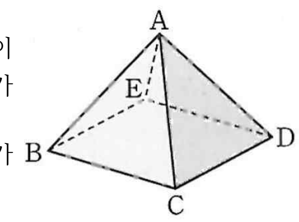
따라서 $m=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ n=-\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $m+n=-\sqrt{2}$

13) 답 ⑤

[해설]

그림과 같은 정사각뿔 $A-BCDE$에서

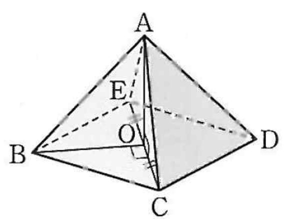
$\overline{BC}\,/\!/\,\overline{DE}$이므로 직선 AB와 직선 DE가 이루는 각의 크기 α는 직선 AB와 직선 BC가 이루는 예각의 크기와 같다.



즉, $\angle ABC=\alpha$이고, 이때 삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\alpha=\frac{\pi}{3}$

$$\sin^2\alpha=\sin^2\frac{\pi}{3}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

또 다음 그림과 같이 선분 CE의 중점을 O라고 하자.



삼각형 AEC가 이등변삼각형이므로

$\overline{AO}\perp\overline{CE}$ $\cdots\cdots$㉠

삼각형 BCE가 이등변삼각형이므로

$\overline{BO} \perp \overline{CE}$ ……㉡

㉠, ㉡에 의하여 직선 CE가 평면 ABO와 수직이므로 $\overline{BO} \perp \overline{AB}$이다.

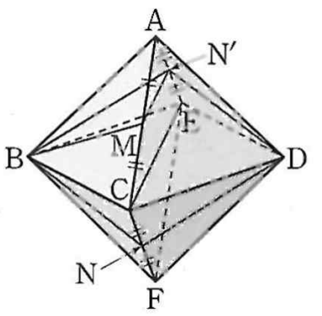
즉, $\beta = \dfrac{\pi}{2}$이므로

$\sin^2\beta = \sin^2\dfrac{\pi}{2} = 1^2 = 1$

따라서 $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \dfrac{3}{4} + 1 = \dfrac{7}{4}$

14) 답 ④

[해설] 그림과 같이 선분 AE의 중점을 N'이라고 하자.



이때 $\overline{BN} = \overline{ND} = \overline{DN'} = \overline{N'B}$이므로 사각형 $BNDN'$은 마름모이다.

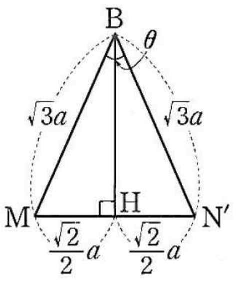
따라서 $\overline{BN'} // \overline{DN}$

또 삼각형 ACE에서 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의하여 $\overline{MN'} = \dfrac{1}{2}\overline{CE}$

정팔면체의 한 모서리의 길이를 $2a$라고 하면 다음 그림과 같이 삼각형 BMN'은 $\overline{BM} = \overline{BN'} = \sqrt{3}a$,

$\overline{MN'} = \dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{2}a = \sqrt{2}a$

인 이등변삼각형이고 점 B에서 선분 MN'에 내린 수선의 발을 H라고 하



면 $\overline{MH} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$

이때 직선 BM과 직선 DN이 이루는 예각의 크기는 직선 BM과 직선 BN'이 이루는 예각의 크기와 같으므로 $\theta = \angle MBN'$이다.

따라서 $\angle MBH = \dfrac{\theta}{2}$이고

$\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{3}a} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$이므로

$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\dfrac{\theta}{2} = 1 - 2 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$

15) 답 ⑤

[해설]

A, B, C를 하나로 보고 원형으로 나열하는 경우의 수는

$(5-1)! = 4! = 24$

이 각각에 대하여 A의 양 옆에 B와 C가 있어야 하므로 경우의 수는

2

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$24 \times 2 = 48$

16) 답 ⑤

[해설]

조건 (가)에서 $f(1) \neq f(2)$이고 $f(2) \neq f(3)$이므로 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

(i) $f(1) \neq f(3)$인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$을 정하는 경우의 수는

${}_5P_3 = 60$

이 각각에 대하여 조건 (나)에서 치역의 원소의 개수가 3이므로 나머지 $f(4)$, $f(5)$의 값은 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값이므로 경우의 수는

${}_3\Pi_2 = 3^2 = 9$

그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$60 \times 9 = 540$

(ii) $f(1) = f(3)$인 경우

$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_5P_2 = 20$

이 각각에 대하여 $f(4)$가 $f(1)$, $f(2)$의 값 중 하나를 가지는 경우 $f(5)$는 $f(1)$, $f(2)$의 두 값을 제외하고 가져야 한다.

$f(5)$가 $f(1)$, $f(2)$의 값 중 하나를 가지는 경우도 마찬가지이다.

또, $f(4) = f(5)$인 경우는 $f(4)$와 $f(5)$가 $f(1)$, $f(2)$의 두 값을 제외한 한 값을 가져야 한다.

이때 경우의 수는

$2 \times 3 + 2 \times 3 + 3 = 15$

그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$20 \times 15 = 300$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$540 + 300 = 840$

17) 답 ⑤

[해설]

서로 마주 보는 두 학생의 번호의 합의 최댓값이 10이상이 되기 위해서는 6번과 5번, 6번과 4번이 서로 마주 보고 앉아야 한다.

(i) 6번과 5번이 서로 마주 보고 앉는 경우

6번 앞에는 5번이 항상 앉아야 한다. 즉, 1번, 2번, 3번, 4번, 6번을 원형으로 배열하면 되므로 구하는 경우의 수는

$(5-1)! = 4! = 24$

(ii) 6번과 4번이 서로 마주 보고 앉는 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 구하는 경우의 수는

24

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$24 + 24 = 48$

18) 답 ④

[해설]

접시를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(5-1)! = 4! = 24$

이 각각에 대하여 박하맛 사탕 3개, 딸기맛 사탕 2개를 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!2!} = 10$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$24 \times 10 = 240$

19) 답 ③

A와 B가 같은 영화를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 1개를 택하는 조합의 수이므로 ${}_5C_1 = 5$

이 각각에 대하여 A가 B와 같이 선택한 영화 1편을 제외한 4편 중에서 2편을 선택하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 조합의 수이므로

${}_4C_2 = \dfrac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$

이 각각에 대하여 B가 앞에서 선택된 3편의 영화를 제외한 2편의 영화 중에서 1편을 선택하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 1개를 택하는 조합의 수이므로 ${}_2C_1 = 2$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해 $5 \times 6 \times 2 = 60$

20) 답 ④

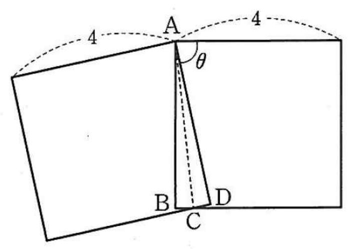
4가지 색 중 2가지 색을 선택하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 선택하는 조합의 수이므로 ${}_4C_2 = \dfrac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$

이 각각에 대하여 2가지 색의 볼펜은 적어도 하나씩 있어야 하므로 우선 하나씩 선택한 후 나머지 3개만을 선택하면 된다. 그러므로 경우의 수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복조합의 수이므로 ${}_2H_3 = {}_{2+3-1}C_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해 $6 \times 4 = 24$

21) 답 ④

[해설] 그림과 같이 겹쳐진 도형의 꼭짓점을 B, C, D라 하자.



삼각형 ABC와 삼각형 ADC는 합동(RHS 합동)이므로 두 삼각형 ABC, ADC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}$로 서로 같다.

또한,

$\triangle ADC = \dfrac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{CD}$

$= \dfrac{1}{2} \times 4 \times \overline{CD}$

$= \dfrac{1}{2}$

이므로 $\overline{CD}=\frac{1}{4}$

$\angle CAD=\alpha$라 하면

$$\tan\alpha=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\frac{\frac{1}{4}}{4}=\frac{1}{16}$$

한편, $2\alpha+\theta=\frac{\pi}{2}$에서

$\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$이므로

$$\tan\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{1-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{16}$$

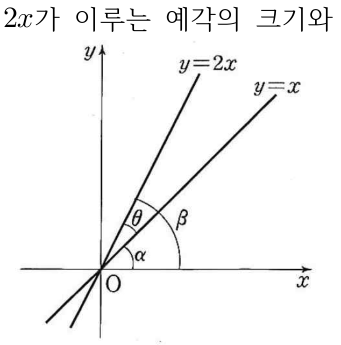
$16\left(1-\tan\frac{\theta}{2}\right)=1+\tan\frac{\theta}{2}$

$17\tan\frac{\theta}{2}=15$

따라서 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{15}{17}$

22) 답 ③

[해설] 두 직선 $y=x+1$, $y=2x-1$이 이루는 예각의 크기는 평행이동한 두 직선 $y=x$, $y=2x$가 이루는 예각의 크기와 같다.



위의 그림과 같이 두 직선 $y=x$, $y=2x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\theta=\beta-\alpha$

$\tan\alpha=1$, $\tan\beta=2$이므로

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{2-1}{1+2\times1}=\frac{1}{3}$$

따라서

$$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{3}-1}{1+\frac{1}{3}}=-\frac{1}{2}$$

23) 답 ②

[해설]

$f(x)=\tan x-2x$라 하면

$f'(x)=\sec^2x-2$

$f'(x)=0$에서

$\sec^2x=2$, $\cos^2x=\frac{1}{2}$이고 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $x=-\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{\pi}{4}$

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

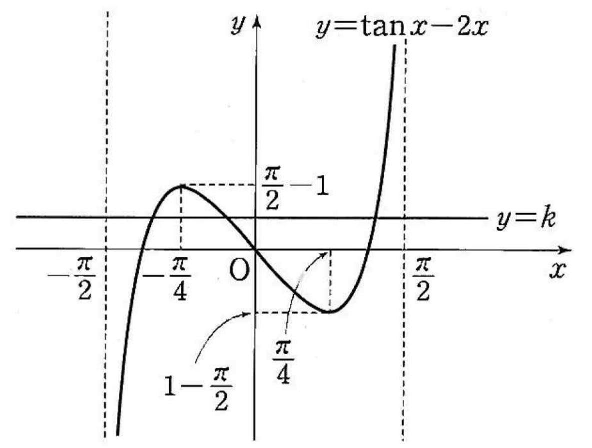
x	$\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

함수 $f(x)$는 $x=-\frac{\pi}{4}$에서 극댓값 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-1$,

$x=\frac{\pi}{4}$에서 극솟값 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\pi}{2}$를 갖는다.

$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}f(x)=\infty$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



방정식 $f(x)=k$의 실근의 개수는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같으므로 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖기 위한 실수 k의 값의 범위는

$1-\frac{\pi}{2}<k<\frac{\pi}{2}-1$

따라서 $\alpha=1-\frac{\pi}{2}$, $\beta=\frac{\pi}{2}-1$일 때 $\beta-\alpha$의 값은 최대이고

$\beta-\alpha=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\left(1-\frac{\pi}{2}\right)=\pi-2$

24) 답 ①

[해설]

$f(x)=4\cos^2x-3$, $g(x)=a\cos x-a$라 하자.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$이므로

$4\cos^2t-3=a\cos t-a$

$4\cos^2t-a\cos t+a-3=0$ …… ㉠

$f'(x)=8\cos x(-\sin x)=-8\sin x\cos x$

$g'(x)=-a\sin x$

이고 교점에서 두 곡선의 접선이 일치하므로

$f'(t)=g'(t)$에서

$-8\sin t\cos t=-a\sin t$

$\sin t(8\cos t-a)=0$ …… ㉡

(ⅰ) $\sin t=0$일 때

$t=\pi$이고 $\cos t=-1$이므로 ㉠에 대입하면

$4+a+a-3=0$에서

$a=-\frac{1}{2}$이므로 양수 a는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $\cos t=\frac{a}{8}$일 때

㉠에서

$4\left(\frac{a}{8}\right)^2-a\left(\frac{a}{8}\right)+a-3=0$

$a^2-16a+48=0$

$(a-12)(a-4)=0$

따라서 $a=12$ 또는 $a=4$

$a=12$이면 $\cos t=\frac{3}{2}$을 만족시키는 실수 t가 존재하지 않으므로 성립하지 않는다.

$a=4$이면 $\cos t=\frac{1}{2}$이므로 $t=\frac{\pi}{3}$, $t=\frac{5}{3}\pi$일 때 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 양수 a의 값은 4이다.

25) 답 ②

[해설] $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$일 때 $\cos x \ge \sin x$이고,

$\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$일 때 $\cos x \le \sin x$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x - \sin x| dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx$

$= \left[\sin x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-\cos x - \sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= (\sqrt{2} - 1) + \{(-1) - (-\sqrt{2})\}$

$= 2(\sqrt{2} - 1)$

26) 답 ②

[해설] $\int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{3x} f(3x+1) dx$에서

$3x+1 = t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 3$이고

$x = 0$일 때 $t = 1$, $x = \frac{1}{3}$일 때 $t = 2$이다.

또, $1 \le t \le 2$일 때 $f(t) = 2t - 1$이므로

$\int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{3x} f(3x+1) dx$

$= \int_1^2 \sqrt{t-1} f(t) \cdot \frac{1}{3} dt$

$= \frac{1}{3} \int_1^2 \sqrt{t-1} (2t-1) dt$ …… ㉠

㉠에서 $t - 1 = s$로 놓으면

$t = 1$일 때 $s = 0$, $t = 2$일 때 $s = 1$이므로

$\frac{1}{3} \int_1^2 \sqrt{t-1} (2t-1) dt$

$= \frac{1}{3} \int_0^1 \sqrt{s} (2s+1) ds$

$= \frac{1}{3} \int_0^1 (2s^{\frac{3}{2}} + s^{\frac{1}{2}}) ds$

$= \frac{1}{3} \left[\frac{4}{5} s^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} \right)$

$= \frac{1}{3} \times \frac{12+10}{15} = \frac{22}{45}$

27) 답 ①

[해설]

물의 높이가 x일 때, 수면의 넓이를 $S(x) = 4x\sqrt{2x^2+4}$

구하는 물의 부피를 V라 하면

$V = \int_0^4 4x\sqrt{2x^2+4}\, dx$

$2x^2 + 4 = t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 4x$이고

$x = 0$일 때 $t = 4$, $x = 4$일 때 $t = 36$이므로

$V = \int_0^4 4x\sqrt{2x^2+4}\, dx$

$= \int_4^{36} \sqrt{t}\, dt = \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_4^{36}$

$= \frac{2}{3}(6^3 - 2^3) = \frac{416}{3}$

28) 답 ①

[해설]

$f(x) = x\sin 2x$라하면

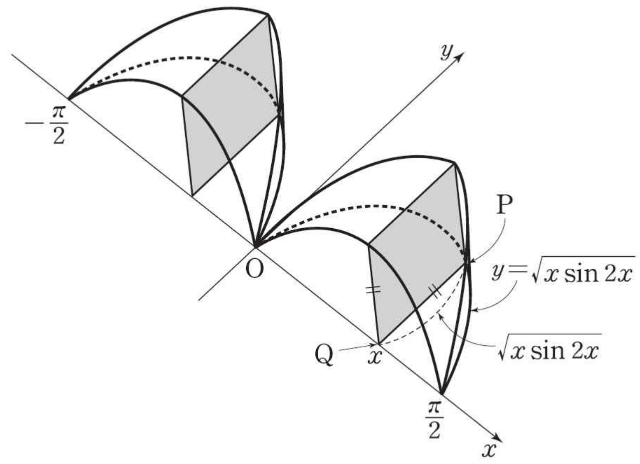
$f(-x) = -x \times \sin(-2x) = x\sin 2x = f(x)$

이므로 함수 $f(x)$는 y축에 대하여 대칭인 함수이다.

곡선 $y = \sqrt{x\sin 2x}$ 위의 점 P에서 x축 위에 내린 수선의 발을 Q라 하면 다음 그림에서 $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{x\sin 2x}$이므로 선분 PQ를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이 $S(x)$는

$S(x) = \overline{\mathrm{PQ}}^2 = x\sin 2x$

여기서



따라서 구하는 입체도형의 부피 V는

$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} S(x)\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\, dx$

$= \left[x\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) dx$

$= \frac{\pi}{4} + \left[\frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

이므로 $V = \frac{\pi}{2}$

29) 답 ②

[해설]

장축의 길이가 $2\sqrt{3}$, 단축의 길이가 2, 중심이 원점이고 점 A$(0, -1)$을 지나는 타원의 방정식은

$\frac{x^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$

즉, $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$

점 P(a, b)가 타원 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 위의 점이므로

$\frac{a^2}{3} + b^2 = 1$

$a^2 = 3(1 - b^2)$

점 P가 제 1사분면 위의 점이므로

$0 < b < 1$

$\overline{\mathrm{AP}}^2 = a^2 + (b+1)^2$

$= 3(1 - b^2) + (b+1)^2$

$= -2b^2 + 2b + 4$

$= -2\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$

따라서 $b = \frac{1}{2}$일 때, 선분 AP의 길이의 최댓값은

$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$이다.

30) 답 ①

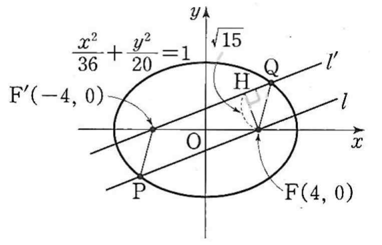
[해설]

타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$의 두 초점은

F$'(-\sqrt{36-20}, 0)$, F$(\sqrt{36-20}, 0)$

즉, F$'(-4, 0)$, F$(4, 0)$

점 F에서 직선 l'에 내린 수선의 발을 H라고 하면 평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리가 $\sqrt{15}$이므로 $\overline{\mathrm{FH}} = \sqrt{15}$



직각삼각형 F$'$FH에서

$\overline{\mathrm{FF'}} = 8$, $\overline{\mathrm{FH}} = \sqrt{15}$

이므로

$\overline{\mathrm{F'H}} = \sqrt{64 - 15} = \sqrt{49} = 7$

이때 타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$의 장축의 길이는 $2 \times 6 = 12$이므로

$\overline{\mathrm{HQ}}=p$, $\overline{\mathrm{QF}}=q$라고 하면 타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{F'Q}}+\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{F'H}}+\overline{\mathrm{HQ}}+\overline{\mathrm{QF}}=7+p+q=12$

$p+q=5$ ……㉠

또한 직각삼각형 FHQ에서

$q^2-p^2=15$

즉, $(q+p)(q-p)=15$

$5(q-p)=15$

$q-p=3$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=1$, $q=4$

$\overline{\mathrm{QF}}=q=4$

점 P와 점 Q는 서로 원점에 대하여 대칭이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}=4$

따라서 $\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{QF}}=8$

31) 답 ②

[해설]

사각형 $\mathrm{O_1O_2O_3O_4}$는 평행사변형이므로

$\overrightarrow{\mathrm{O_1O_5}}=\overrightarrow{\mathrm{O_1O_2}}+\overrightarrow{\mathrm{O_1O_4}}=2\vec{a}+2\vec{b}$

삼각형 $\mathrm{O_1O_3O_4}$에서

$\overrightarrow{\mathrm{O_3O_4}}=\overrightarrow{\mathrm{O_1O_4}}-\overrightarrow{\mathrm{O_1O_3}}=2\vec{b}-4\vec{a}$

이때

$\overrightarrow{\mathrm{O_1O_5}}+\overrightarrow{\mathrm{O_3O_4}}=(2\vec{a}+2\vec{b})+(2\vec{b}-4\vec{a})$

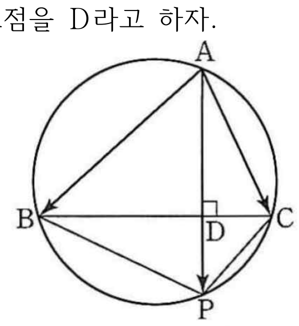
$=(2\vec{a}-4\vec{a})+(2\vec{b}+2\vec{b})=-2\vec{a}+4\vec{b}$

따라서 $l=-2$, $m=4$이므로 $l+m=2$

32) 답 13

[해설]

두 선분 AP, BC의 교점을 D라고 하자.



$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$에서

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

이므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$는 서로 평행하다.

또 사각형 ABPC가 원에 내접하고 두 변 AB, CP가 평행하므로 사각형 ABPC는 등변사다리꼴이고, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BP}}$

이때 등변사다리꼴 ABPC에서

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BD}}$, $\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{PD}}$

이다.

두 직각이등변삼각형 ABD, PCD는 서로 닮음이고,

$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$이므로

$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{PD}}=2:1$

이때 $\overline{\mathrm{BC}}=3$이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{AD}}=2$, $\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{PD}}=1$

직각삼각형 ABD에서 $\overline{\mathrm{AB}}^2=2^2+2^2=8$

직각삼각형 ADC에서 $\overline{\mathrm{AC}}^2=2^2+1^2=5$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=8+5=13$

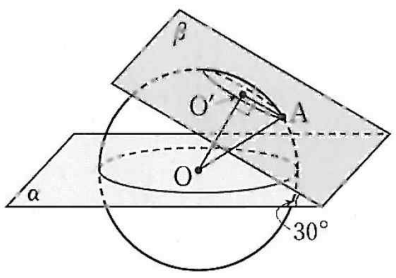
33) 답 ②

[해설] 평면 β와 구의 교선은 원이므로 이 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 넓이는 πr^2이다.

이 원의 평면 α위로의 정사영의 넓이가 $2\sqrt{3}\pi$이고 두 평면이 이루는 예각의 크기가 30°이므로

$2\sqrt{3}\pi=\pi r^2\times\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi r^2$에서 $r=2$

그림과 같이 평면 β와 구의 교선인 원의 중심을 O'이라 하고, 원 위의 임의의 점을 A라고 하자.



직선 OO'이 평면 β에 수직이므로 $\overline{OO'}\perp\overline{O'A}$

따라서 삼각형 OAO'은 각 $OO'A$가 직각인 직각삼각형이고,

$\overline{OA}=5$, $\overline{O'A}=r=2$이므로

$\overline{OO'}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$

즉, 구의 중심 O와 평면 β 사이의 거리는 $\sqrt{21}$이다.

34) 답 15

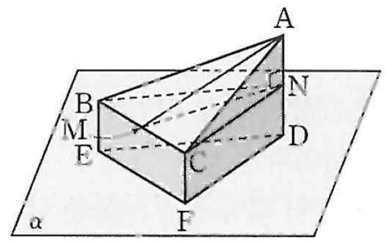
[해설] 그림과 같이 세 점 A, B, C에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하고, 점 M에서 직선 AD에 내린 수선의 발을 N이라고 하면

$\overline{AD}=2$, $\overline{BE}=\overline{CF}=1$

$\overline{AB}=\overline{AC}=2+1=3$, $\overline{BC}=1+1=2$, $\overline{AN}=\overline{ND}=1$이고

평면 BCN은 평면 α와 평행하다.

삼각형 ABC는 이등변삼각형이고 점 M은 선분 BC의 중점이므로



$\overline{AM}\perp\overline{BC}$

직각삼각형 ABM에서 $\overline{AB}=3$, $\overline{BM}=1$이므로

$\overline{AM}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

또 직각삼각형 AMN에서 $\overline{AM}=2\sqrt{2}$, $\overline{AN}=1$이므로

$\overline{MN}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-1^2}=\sqrt{7}$

이때 평면 BCN이 평면 α와 평행하므로 직선 AM이 평면 α와 이루는 예각의 크기는 직선 AM이 평면 BCN과 이루는 예각의 크기와 같고, 선분 AM의 평면 BCN위로의 정사영이 선분 NM이므로

$\cos\theta=\dfrac{\overline{NM}}{\overline{AM}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

따라서 $\cos^2\theta=\frac{7}{8}$이므로 $p+q=8+7=15$

35) 답 ⑤

조건 (가)를 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$을 결정하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 조합의 수이므로

${}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

이 각각에 대하여 조건 (나)를 만족시키도록 $f(4)$, $f(5)$를 결정하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 중복조합의 수이므로

${}_5\mathrm{H}_2={}_{5+2-1}\mathrm{C}_2={}_6\mathrm{C}_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

따라서 구하는 함수 f의 개수는 곱의 법칙에 의해 $10\times15=150$

36) 답 ④

사탕의 개수의 총합이 5이고 모든 사람은 적어도 하나의 사탕을 받으며 A가 받은 사탕의 개수가 B, C가 각각 받은 사탕의 개수보다 많거나 같아야 하므로 각 경우로 나누면 다음과 같다.

(ⅰ) 2개, 2개, 1개로 나누어 주는 경우

A가 2개를 받아야 하므로 2명 중 사탕 2개를 받는 한 사람을 선택하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 1개를 택하는 조합의 수이므로 ${}_2\mathrm{C}_1=2$

이 각각에 대하여 A에게 2개의 사탕을 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 조합의 수이므로 ${}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

이 각각에 대하여 사탕 2개를 받는 사람에게 나머지 사탕 3개 중 2개를 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$

이 각각에 대하여 나머지 사탕 1개는 나머지 한 사람에게 나누어 주면 되므로 경우의 수는 1

그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해 $2\times10\times3\times1=60$

(ⅱ) 3개, 1개, 1개로 나누어 주는 경우

A가 서로 다른 사탕 5개 중 3개의 사탕을 받아야 하므로 경우의 수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 조합의 수이므로

${}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

이 각각에 대하여 나머지 사탕 2개를 두 사람에게 하나씩 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 순열의 수이므로 ${}_2\mathrm{P}_2=2!=2$

그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해 $10\times2=20$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$60+20=80$

37) 답 ③

[해설]

갑이 아침, 점심, 저녁에 서로 다르게 음식을 주문하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 순열의 수이므로

${}_5\mathrm{P}_3=5\times4\times3=60$

서로 다른 5가지 음식을 a, b, c, d, e라 하자.

	아침	점심	저녁
갑	a	b	c
을			

이 각각에 대하여 아침, 점심, 저녁 중 주문한 음식이 한 번만 같으므로 경우의 수는

3

	아침	점심	저녁
갑	a	b	c
을	a		

이 각각에 대하여 갑과 을이 주문한 음식의 종류가 4가지이므로 갑이 주문한 음식 중 갑과 을이 같이 주문한 음식을 제외한 두 가지 음식 중 하나를 을이 주문해야 하므로 경우의 수는

2

	아침	점심	저녁
갑	a	b	c
을	a		b

이 각각에 대하여 갑과 을이 주문한 3가지 음식을 제외한 나머지 2가지 중 을이 하나를 주문하면 되므로 경우의 수는

2

	아침	점심	저녁
갑	a	b	c
을	a	d	b

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$60\times3\times2\times2=720$

38) 답 ④

[해설] 집합 X에서 X로의 함수의 개수는

${}_3\Pi_3=3^3$

$f(1)f(2)f(3)$의 값이 6의 배수인 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) $f(1)f(2)f(3)=6$인 경우

$6=1\times2\times3$이므로 이 경우를 만족시키는 함수 $f(x)$의 개수는 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$3\neq6$

(ⅱ) $f(1)f(2)f(3)=12$인 경우

$12=2\times2\times3$이므로 이 경우를 만족시키는 함수 $f(x)$의 개수는 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{3!}{2!}=3$

(ⅲ) $f(1)f(2)f(3)=18$인 경우

$18=2\times3\times3$이므로 이 경우를 만족시키는 함수 $f(x)$의 개수는 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{3!}{2!}=3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $f(1)f(2)f(3)$의 값이 6의 배수인 경우의 수는

$6+3+3=12$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{3^3}=\frac{4}{9}$

39) 답 ③

[해설]

4개의 층 중 3개의 층을 택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_1=4$

6명을 3개의 조로 1명 이상씩 분할하는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) (4명, 1명, 1명) 으로 분할하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_4\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1\times\frac{1}{2!}=15$

(ⅱ) (3명, 2명, 1명) 으로 분할하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_2\times{}_1\mathrm{C}_1=60$

(ⅲ) (2명, 2명, 2명)으로 분할하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2\times\frac{1}{3!}=15$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 분할하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$15+60+15=90$

3개의 조를 3개의 층에 분배하는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$4\times90\times6=2160$

40) 답 ④

[해설] 집합 X에서 집합 Y로의 함수의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4$

함수 f가 $f(1)f(2)f(3)=0$ 또는 $f(4)\geq0$을 만족시키는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은

$f(1)f(2)f(3)\neq0$이고 $f(4)<0$

(ⅰ) $f(1)f(2)f(3)\neq0$인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값은 0이 될 수 없으므로 집합 $\{-2,\ -1,\ 1\}$의 원소 중에서 결정되어야 한다.

따라서 $f(1)f(2)f(3)\neq0$을 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\Pi_3=3^3$

(ⅱ) $f(4)<0$인 경우

$f(4)$의 값은 집합 $\{-2,\ -1\}$의 원소 중에서 결정되어야 하므로 $f(4)<0$을 만족시키도록 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 2

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$P(A^C)=\frac{3^3\times2}{4^4}=\frac{27}{128}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{27}{128}=\frac{101}{128}$

제 8 회

1. 2009년 9월 평가원
2. 2013년 3월 교육청
3. 2016년 사관학교
4. 2013년 수능
5. 2014년 7월 교육청
6. 2013년 사관학교
7. 2009년 수능
8. 2005년 6월 평가원
9. 2012년 10월 교육청
10. 2004년 12월 평가원

1. $a>0,\ b>0,\ a\neq 1,\ b\neq 1$ 일 때, 함수

$$f(x)=\frac{b^x+\log_a x}{a^x+\log_b x}$$

에 대하여 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $1<a<b$ 이면 $x>1$인 모든 x에 대하여 $f(x)>1$이다.

ㄴ. $b<a<1$이면 $\lim_{x\to ing}f(x)=0$ 이다.

ㄷ. $\lim_{x\to 0+}f(x)=\log_a b$

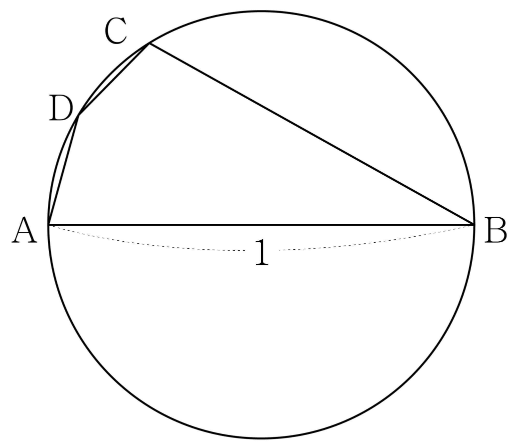
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 지름의 길이가 1인 원에 내접하는 사각형 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

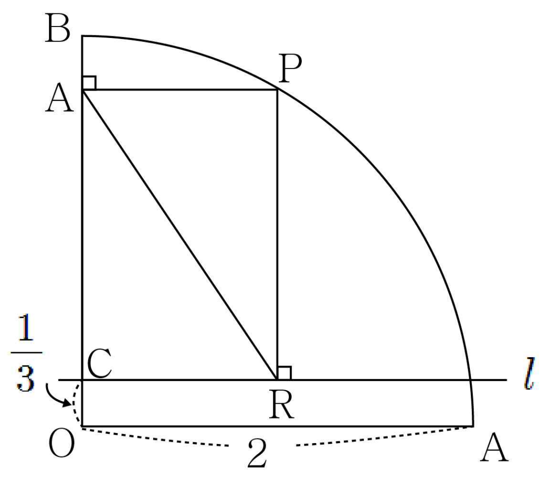
(가) 선분 AB는 원의 지름이다.

(나) $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{CD}}<\frac{\sqrt{2}}{2}$

사각형 ABCD의 둘레의 길이가 $\frac{19}{8}$일 때, 선분 AD의 길이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



3. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OB위에 $\overline{\mathrm{OC}}=\frac{1}{3}$인 점 C를 잡고, 점 C를 지나고 선분 OA와 평행한 직선을 l이라 하자. 호 AB 위를 움직이는 점 P에서 선분 OB와 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이의 최댓값은?

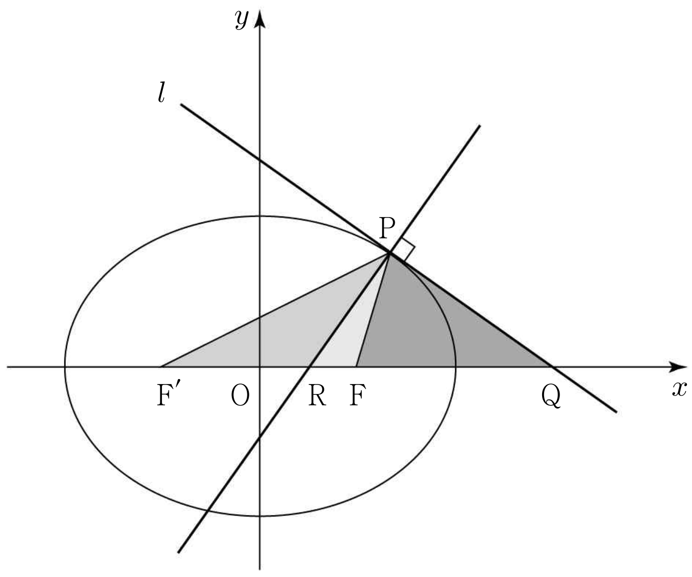


① $\frac{\sqrt{7}}{8}$　② $\frac{\sqrt{7}}{6}$　③ $\frac{5\sqrt{7}}{24}$
④ $\frac{\sqrt{7}}{4}$　⑤ $\frac{7\sqrt{7}}{24}$

4. 함수 $f(x)=kx^2e^{-x}(k>0)$과 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최댓값은?

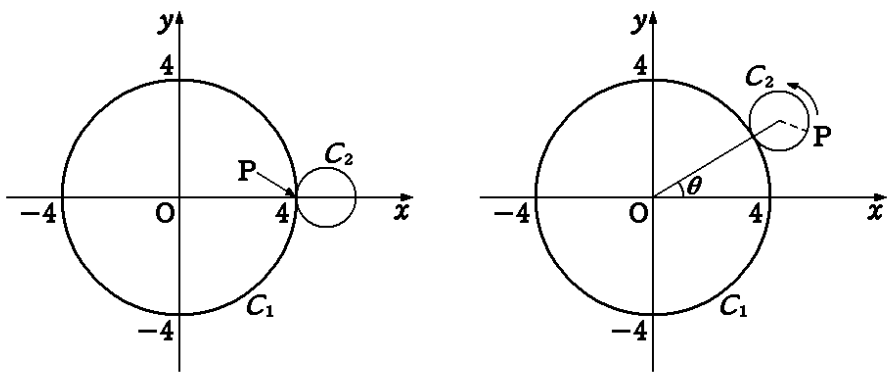
① $\frac{1}{e}$　② $\frac{1}{\sqrt{e}}$　③ $\frac{e}{2}$
④ $\sqrt{e}$　⑤ e

5. 그림과 같이 두 초점이 F, F'인 타원 $3x^2+4y^2=12$ 위를 움직이는 제 1 사분면 위의 점 P에서의 접선 l이 x축과 만나는 점을 Q, 점 P에서 접선 l과 수직인 직선을 그어 x축과 만나는 점을 R라 하자. 세 삼각형 PRF, PF′R, PFQ의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 점 P의 x좌표는?



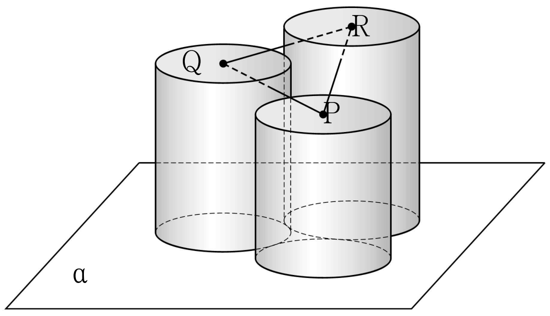
① $\frac{13}{12}$ ② $\frac{7}{6}$ ③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{17}{12}$

6. [그림1]과 같이 좌표평면 위에 중심이 원점이고 반지름의 길이가 4인 큰 원 C_1과 반지름의 길이가 1인 작은 원 C_2가 점 $(4,0)$에서 외접하고 있다. 이때 작은 원 위의 한 점을 P라 하자.
[그림2]와 같이 원 C_2가 원 C_1에 접한 상태로 굴러갈 때, 두 원의 중심을 연결한 선분이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하자.
θ의 값이 0에서 $\frac{\pi}{2}$까지 변할 때, 점 $(4,0)$에서 출발한 점 P가 움직인 거리는?

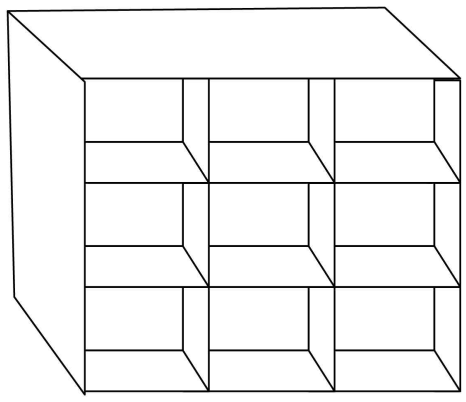


① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

7. 그림과 같이 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{3}$이고 높이가 서로 다른 세 원기둥이 서로 외접하며 한 평면 α 위에 놓여 있다. 평면 α와 만나지 않는 세 원기둥의 밑면의 중심을 각각 $\mathrm{P, Q, R}$이라 할 때, 삼각형 QPR은 이등변삼각형이고, 평면 QPR과 평면 α가 이루는 각의 크기는 $60°$이다. 세 원기둥의 높이를 각각 $8, a, b$라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, $8<a<b$)



8. 세 종류의 상품이 3개씩 있다. 이 상품을 그림과 같은 진열장에 한 칸에 하나씩 모두 진열하고자 한다. 가로줄에는 서로 다른 세 종류의 상품을 진열하고 세로줄에는 같은 종류의 상품을 진열하고 세로줄에는 같은 종류의 상품이 이웃하지 않게 진열하는 방법의 수는?

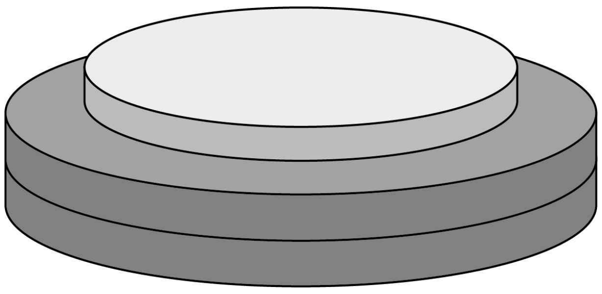


① 24 ② 30 ③ 36
④ 42 ⑤ 48

9. 반지름의 길이가 서로 다른 여섯 종류의 원판이 각각 3개씩 18개가 있다. 원판을 다음과 같은 규칙으로 쌓으려고 한다.

(가) 원판 3개를 택하여 원판의 중심이 일치하도록 쌓는다. (나) 반지름의 길이가 작은 원판은 반지름의 길이가 큰 원판 위에 쌓는다. (다) 반지름의 길이가 같은 원판은 구별하지 않으면서 쌓는다.

그림은 반지름의 길이가 같은 두 개의 원판과 반지름의 길이가 작은 한 개의 원판을 규칙에 따라 쌓은 예이다.

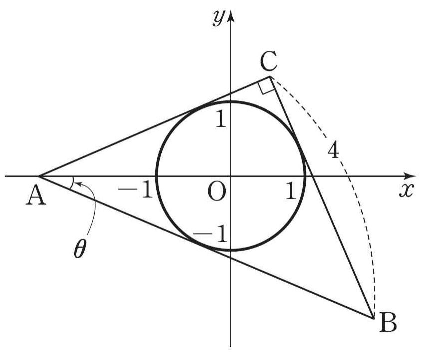


이와 같은 쌓는 방법의 수를 구하시오.

10. 상훈이를 포함한 5명의 학생이 쪽지시험을 본 후, 5장의 답안지를 섞은 다음에 임의로 하나씩 뽑는다. 상훈이만 자신의 답안지를 뽑고 나머지 4명은 다른 학생의 답안지를 뽑을 확률을 기약분수 $\frac{q}{p}$로 나타낼 때, $p+q$의 값을 구하시오.

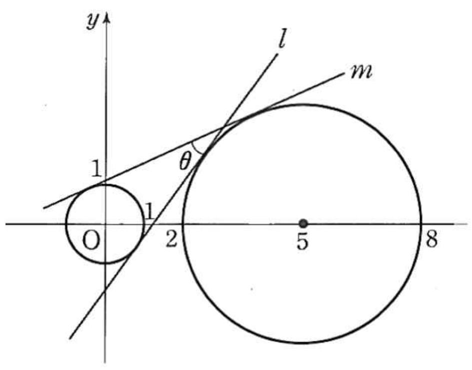
추가 과제

1. 그림과 같이 꼭짓점 A가 x축 위에 있고 $\angle \mathrm{ACB}=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC의 내접원의 방정식이 $x^2+y^2=1$이다. $\overline{\mathrm{BC}}=4$이고 $\angle \mathrm{OAB}=\theta$라 할 때, $\cot\theta$의 값은? (단, O은 원점이다.)



① 2 ② $\frac{17}{8}$ ③ $\frac{9}{4}$
④ $\frac{19}{8}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

2. 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=1$과 $(x-5)^2+y^2=9$에 동시에 접하고 기울기가 양인 두 직선 중에서 기울기가 큰 것을 l, 작은 것을 m이라 하자. 두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\sin\theta$의 값은 $\frac{q+4\sqrt{21}}{p}$이다. 두 정수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오.



3. 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=4,\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3+2x}=3$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

4. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases}2\ln x+3 & (x>1)\\ e^{x-1}+1 & (x\le 1)\end{cases},\ g(x)=2x^2+ax$$

에 대하여 합성함수 $(g\circ f)(x)$가 $x=1$에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① -10 ② -11 ③ -12
④ -13 ⑤ -14

5. 함수 $f(x)=(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$에 대하여 함수 $g(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$라 할 때, $g'(0)$의 값은? (단, $x\neq-1$)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

6. $x\geq0$에서 정의된 함수

$$f(x)=e^{-x}x^2(x^2+ax+5)$$

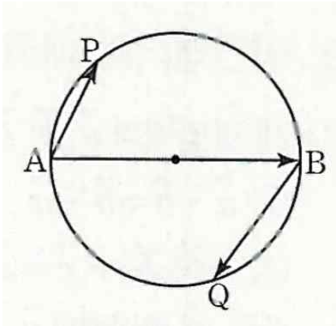
에 대하여 $f'(1)=0$일 때, $f(x)$는 $x=b$에서 최댓값을 갖는다. $b-a$의 값을 구하시오.(단, a, b는 상수이다.)

7. 점 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ 3\right)$이 $y=a\sin2x+b\sin x$의 변곡점일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.(단, a, b는 상수이다.)

8. 실수 k에 대하여 직선 $y=-x+k$와 곡선 $y=x\ln x$의 교점의 개수를 $g(k)$라 하자. $g(k)\geq1$을 만족시키는 k의 최솟값은?

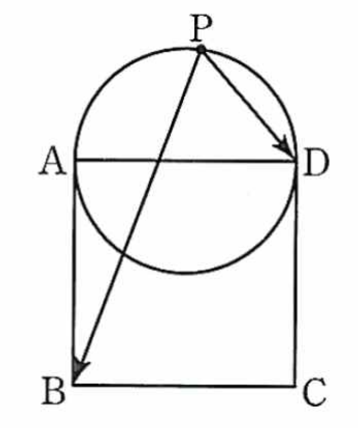
① e^2 ② e ③ 1
④ $-\dfrac{1}{e}$ ⑤ $-\dfrac{1}{e^2}$

9. 그림과 같이 지름이 선분 AB인 원 위의 두 점 P, Q에 대하여 $\overline{AP}=4$, $\overline{BQ}=6$일 때, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BQ}$의 값은? (단, $\overline{AB}>6$이다.)



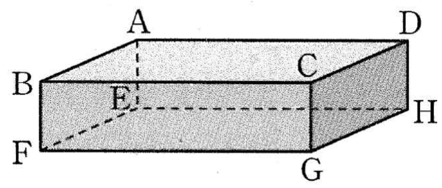
① -32 ② -26 ③ -20
④ -14 ⑤ -8

10. 그림과 같이 한 평면 위에 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD와 선분 AD가 지름인 원이 있다. 이 원 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$의 최댓값은?



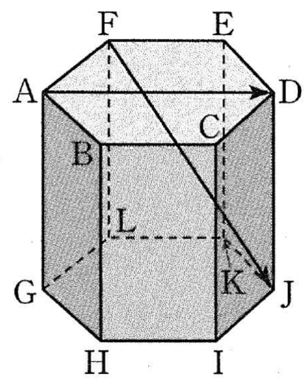
① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

11. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=4$, $\overline{AE}=1$인 직육면체 ABCD$-$EFGH에서 점 P가 $\overrightarrow{FP}=3\overrightarrow{PH}$를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{HP}-2\overrightarrow{CG}|$의 값은?



① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

12. 그림은 한 변의 길이가 6인 정육각형을 밑면으로 하고 높이가 10인 육각기둥 ABCDEF$-$GHIJKL이다. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{FJ}$의 값을 구하시오.



13. 좌표공간에서 구 $x^2+(y+1)^2+(z-6)^2=6$ 위의 점 $A(1,-2,4)$에서 구에 접하는 평면의 방정식은 $x+ay+bz+c=0$ 이다. 세 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

14. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 1,\ 3)$, $\mathrm{B}(4,\ 3,\ -1)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형을 T 라 하고, 원점 O를 지나는 직선이 도형 T 와 한 점에서만 만날 때 그 점을 Q라고 하자. 선분 OQ의 길이를 l이라고 할 때, l^2의 값을 구하시오.

15. 부등식

$$127<{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}<1023$$

을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합은?

① 26 ② 27 ③ 28
④ 29 ⑤ 30

16. $\log_2({}_{11}\mathrm{C}_0+{}_{11}\mathrm{C}_1+{}_{11}\mathrm{C}_2+{}_{11}\mathrm{C}_3+{}_{11}\mathrm{C}_4+{}_{11}\mathrm{C}_5)$의 값은?

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

17. ${}_6\mathrm{C}_0+7\times{}_6\mathrm{C}_1+7^2\times{}_6\mathrm{C}_2+\cdots+7^6\times{}_6\mathrm{C}_6$의 값은?

① 2^{12} ② 2^{14} ③ 2^{16}
④ 2^{18} ⑤ 2^{20}

18. $(1+x)+2(1+x)^2+3(1+x)^3+\cdots+8(1+x)^8$의 전개식에서 x^2의 계수는?

① 546 ② 556 ③ 566
④ 576 ⑤ 586

19. 확률변수 X의 확률질량함수가 다음과 같다.

$$P(X=x)={}_{25}C_x p^x(1-p)^{25-x}\ \ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 25)$$

확률변수 X의 평균이 5일 때, $E(X^2)$의 값은?
(단, $0<p<1$이다.)

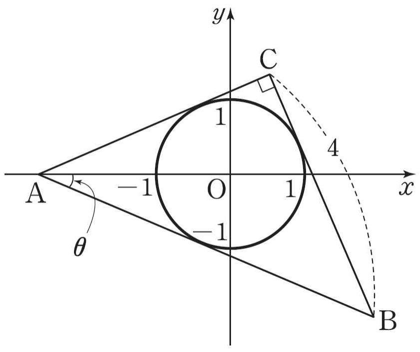
① 27 ② 29 ③ 31
④ 33 ⑤ 35

20. 첫째항이 2이고, 공차가 3인 등차수열의 첫째항부터 제21항까지의 값을 가지는 확률변수 X에 대하여 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	2	5	8	$\cdots$	62	계
$\mathrm{P}(X=x)$	${}_{20}\mathrm{C}_0\left(\frac{3}{4}\right)^{20}$	${}_{20}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{19}$	${}_{20}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{18}$	$\cdots$	${}_{20}\mathrm{C}_{20}\left(\frac{1}{4}\right)^{20}$	1

$\mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(2X)$의 값을 구하시오.

21. 그림과 같이 꼭짓점 A가 x축 위에 있고 $\angle \mathrm{ACB}=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC의 내접원의 방정식이 $x^2+y^2=1$이다. $\overline{\mathrm{BC}}=4$이고 $\angle \mathrm{OAB}=\theta$라 할 때, $\cot\theta$의 값은? (단, O은 원점이다.)



① 2　② $\frac{17}{8}$　③ $\frac{9}{4}$　④ $\frac{19}{8}$　⑤ $\frac{5}{2}$ 21)

22. 두 직선 $y=mx$, $y=(2m+1)x$가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\tan\theta=\frac{1}{2}$일 때, 양수 m의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

23. 함수 $f(x)=\ln|x^2-3|$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+f(-x)}{x-2}$의 값은?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

24. 함수 $f(x)=x+e^x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1-h)}{h}$의 값은?

① 1　② $\frac{1}{2}e$　③ 2　④ e　⑤ $e+1$

25. 연속함수 $f(x)$가

$$\int_0^x tf(x-t)dt=-3\sin 2x+kx$$

를 만족시킬 때, 상수 k의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

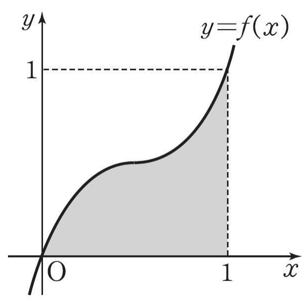
26. 함수 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$에 대하여 등식

$\displaystyle\int_{-1}^{1}(3-x)f'(x)dx=kf(1)$을 만족시키는 상수 k의 값을 구하시오.

27. n이 자연수일 때, $a_n=\displaystyle\int_0^n(n^2-x^2)dx$로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+\dfrac{a_2}{2}+\dfrac{a_3}{3}+\cdots+\dfrac{a_9}{9}$의 값을 구하시오.

28. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. $f(0)=0$, $f(1)=1$이고 색칠한 부분의 넓이를 k라 할 때, 정적분

$\displaystyle\int_0^1 f'(\sqrt{x})dx$의 값을 k로 나타낸 것은? (단, k는 상수이다.)



① $1-k$ ② $1-\dfrac{k}{2}$ ③ $2-2k$
④ $2-k$ ⑤ $2-\dfrac{k}{2}$

29. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=\frac{3t}{2+t^2},\ y=\frac{2-t^2}{2+t^2}$$

에 대하여 $t=2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2
④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

30. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가

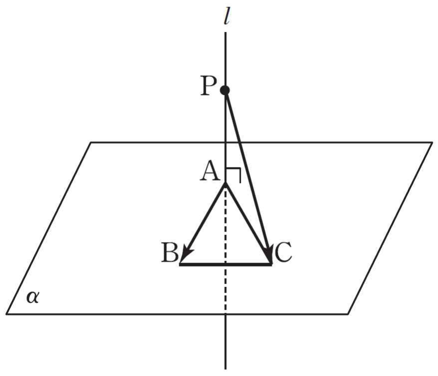
$$x=2t^2+\cos 2t,\ y=3-\frac{1}{2}\sin 2t$$

이다. $t=\frac{\pi}{4}$에서 점 P의 가속도의 크기는?

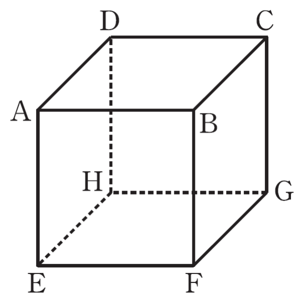
① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{14}$ ③ 4
④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

31. 평면 α 위에 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있고, 점 A를 지나고 평면 α와 수직인 직선 l이 있다. 직선 l 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}=1$일 때, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PC}$의 값은?

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ 1



32. 한 모서리의 길이가 1인 정육면체 ABCD−EFGH가 있다.



두 점 P, Q가 이 정육면체의 면 또는 모서리 위를 움직일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}\geq 0$
ㄴ. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}\leq 3$
ㄷ. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{GQ}\leq 0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

33. 좌표공간에서 직선 $\frac{x}{2}=\frac{y}{a}=z+1$ 이 직선 $1-2x=2y=bz$와 평행하고 직선 $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{c}=\frac{3-z}{2}$와 수직일 때, 세 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$ 의 값은? (단, $abc \neq 0$)

① -4　② -3　③ -2
④ -1　⑤ 0

34. 좌표공간에서 두 구

$S_1 : x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+1=0$,

$S_2 : x^2+y^2+z^2-4x-8y-6z+25=0$

이 만나서 생기는 원의 xy평면 위로의 정사영의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

35. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \rightarrow X$의 개수는?

$f(1)\times f(2)\times f(3)\times f(4)\times f(5)=4$

① 11　② 12　③ 13
④ 14　⑤ 15

36. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \rightarrow X$의 개수는?

(가) $f(4)$는 홀수이다.
(나) $x<4$이면 $f(x) \leq f(4)$이다.
(다) $x>4$이면 $f(x)>f(4)$이다.

① 388　② 393　③ 398
④ 403　⑤ 408

37. $f(x-1)=1+x+x^2+\cdots+x^{10}$에 대하여 $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_{10}t^{10}$ (a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_{10}은 상수)일 때, a_7의 값은?

① 159 ② 161 ③ 163
④ 165 ⑤ 167

38. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+\left(x-\frac{1}{x}\right)^4+\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는?

① -10 ② -8 ③ -6
④ -4 ⑤ -2

39. 자연수 n에 대하여 이항분포 $B\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르는 확률변수 X가 $P(X=1)=12P(X=n)$을 만족시킬 때, $E(X)+V(X)$의 값은?

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

40. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수 중 작지 않은 수를 확률변수 X라 하자. $E(36X)$의 값을 구하시오.

[난문현답 기출 정답]

1. ③
2. 5
3. ⑤
4. ⑤
5. ④
6. ③
7. 25
8. ①
9. 56
10. 43

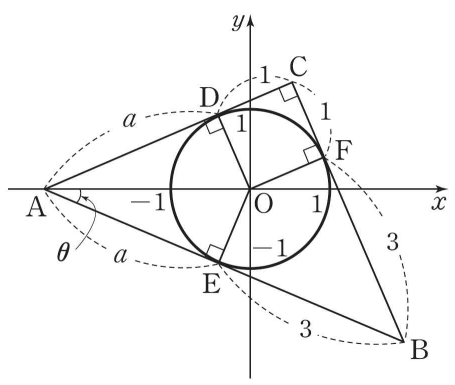
[추가 과제 정답]

1) [정답] ①

내접원이 삼각형 ABC의 세 변과 접하는 점을 각각 D, E, F라 하자.

$\overline{CF}=\overline{CD}=1$이므로

$\overline{BF}=\overline{BE}=3$



$\overline{AD}=\overline{AE}=a$라 하면 피타고라스의 정리에 의하여

$(a+3)^2=(a+1)^2+4^2$

$a^2+6a+9=a^2+2a+1+16$

$4a=8$

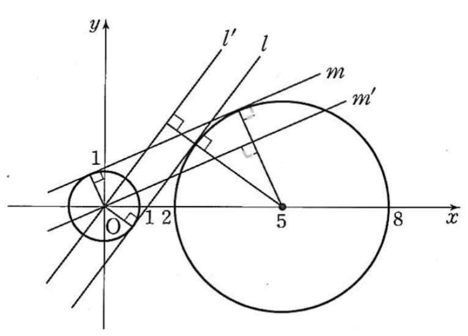
$\therefore\ a=2$

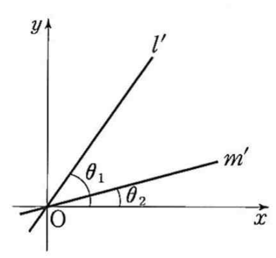
따라서 $\tan\theta=\dfrac{\overline{OE}}{\overline{AE}}=\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{2}$이므로

$\cot\theta=2$

2) 답 19

[해설] 두 직선 l, m을 각각 원점을 지나도록 평행이동한 직선을 l', m'이라 하면 다음 그림에서 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기는 두 직선 l', m'이 이루는 예각의 크기와 같다.





직선 l'이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ_1이라 하면

$\sin\theta_1=\dfrac{3+1}{5}=\dfrac{4}{5}$

$\cos\theta_1=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}$

$\qquad=\dfrac{3}{5}$

직선 m'이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ_2라 하면

$\sin\theta_2=\dfrac{3-1}{5}=\dfrac{2}{5}$

$\cos\theta_2=\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^2}$

$\quad=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$

$\sin\theta=\sin(\theta_1-\theta_2)$

$\qquad=\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2$

$\qquad=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{\sqrt{21}}{5}-\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}$

$\qquad=\dfrac{-6+4\sqrt{21}}{25}$

따라서 $p=25$, $q=-6$이므로

$p+q=25+(-6)=19$

3) [정답] ③

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2}{\sin^2 x}\times\frac{f(x)}{x^2}\times(1+\cos x)\right\}$$

$$=4$$

에서 $x\to 0$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $f(x)=x^2(ax+b)\ (a\neq 0)$로 놓을 수 있다.

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2}{\sin^2 x}\times\frac{f(x)}{x^2}\times(1+\cos x)\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\times\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\times\lim_{x\to 0}(1+\cos x)$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)^2\times\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\times\lim_{x\to 0}(1+\cos x)$$

$$=1^2\times\lim_{x\to 0}\frac{x^2(ax+b)}{x^2}\times 2$$

$$=2\lim_{x\to 0}(ax+b)$$

$$=2b=4$$

$\therefore\ b=2$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3+2x}=3$에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(ax+b)}{x^3+2x}=3$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a+\dfrac{b}{x}}{1+\dfrac{2}{x^2}}=3$$

$\therefore\ a=3$

따라서 $f(x)=x^2(3x+2)$이므로

$f(1)=5$

4) [정답] ①

함수 $(g\circ f)(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 1-0}g(f(x))=\lim_{x\to 1+0}g(f(x))$$

$$=g(f(1))$$

이어야 한다.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}g(f(x))$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$x\to 1-0$일 때, $t\to 2-0$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{x\to 1-0}g(f(x))=\lim_{t\to 2-0}g(t)$

$$=2\times2^2+2a$$
$$=8+2a$$

(ii) $\lim\limits_{x\to1+0} g(f(x))$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$x\to1+0$일 때, $t\to3+0$

$$\therefore \lim_{x\to1+0} g(f(x))=\lim_{t\to3+0} g(t)$$
$$=2\times3^2+3a$$
$$=18+3a$$

(iii) $g(f(1))=g(2)$
$$=2\times2^2+2a$$
$$=8+2a$$

따라서 (i), (ii), (iii)에서

$18+3a=8+2a$

$\therefore\ a=-10$

5) 답 ④

[해설] $g(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$에서

$$g'(x)=\frac{f''(x)f(x)-f'(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$$

$$g'(0)=\frac{f''(0)f(0)-\{f'(0)\}^2}{\{f(0)\}^2}$$

$f(x)=(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$에서 $f(0)=1$

$f'(x)$

$=1\cdot(x^2+1)(x^4+1)+(x+1)\cdot2x\cdot(x^4+1)+(x+1)(x^2+1)\cdot4x^3$

$=(x^2+1)(x^4+1)+2x(x+1)(x^4+1)+4x^3(x+1)(x^2+1)$

따라서 $f'(0)=1$

$f''(0)$은 $f''(x)$의 상수항이고, 이는 $f'(x)$의 일차항의 계수와 같으므로 $f''(0)=2$

따라서 $g'(0)=\dfrac{2\times1-1^2}{1^2}=1$

6) 답 9

[해설]

$f(x)=e^{-x}(x^4+ax^3+5x^2)$에서

$f'(x)=-e^{-x}(x^4+ax^3+5x^2)+e^{-x}(4x^3+3ax^2+10x)$

$\quad=e^{-x}\{-x^4+(4-a)x^3+(3a-5)x^2+10x\}$

$f'(1)=0$에서 $f'(1)=e^{-1}(8+2a)=0$이므로 $a=-4$

이때

$f(x)=e^{-x}x^2(x^2-4x+5)$

$f'(x)=e^{-x}(-x^4+8x^3-17x^2+10x)$

$\quad=-e^{-x}x(x^3-8x^2+17x-10)$

$\quad=-e^{-x}x(x-1)(x-2)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=5$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{2}{e}$	↘	$\dfrac{4}{e^2}$	↗	$\dfrac{250}{e^5}$	↘

$f(x)$는 $x=1$, $x=5$에서 극대이고

$$f(5)-f(1)=\frac{250}{e^5}-\frac{2}{e}=\frac{2(125-e^4)}{e^5}>0$$

이므로 $x\ge0$일 때, $f(x)$는 $x=5$에서 최댓값을 갖는다.

따라서 $b=5$이므로

$b-a=5-(-4)=9$

7) 답 33

[해설]

$f(x)=a\sin2x+b\sin x$라 하자.

점 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ 3\right)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=a\sin\frac{\pi}{2}+b\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=a+\frac{b}{\sqrt2}=3$$

에서 $\sqrt2a+b=3\sqrt2$ …… ㉠

$f'(x)=2a\cos2x+b\cos x$

$f''(x)=-4a\sin2x-b\sin x$

$f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$이므로

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4a\sin\frac{\pi}{2}-b\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=-4a-\frac{b}{\sqrt2}=0$$

에서 $b=-4\sqrt2a$ …… ㉡

㉠, ㉡을 풀면

$a=-1$, $b=4\sqrt2$ 따라서 $a^2+b^2=1+32=33$

8) [정답] ⑤

$x\ln x=-x+k$에서 $x\ln x+x=k$라 하고

$f(x)=x\ln x+x$라 하면

$$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}+1$$
$$=\ln x+2$$

$f'(x)=\ln x+2=0$에서

$x=e^{-2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e^{-2}	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-e^{-2}$	↗

$f(x)$는 $x=e^{-2}$에서 극소이면서 최소이고, 최솟값 $-e^{-2}$을 갖는다.

따라서 $k<-e^{-2}$일 때 직선 $y=-x+k$와 곡선 $y=x\ln x$는 교점을 갖지 않는다.

따라서 직선 $y=-x+k$와 곡선 $y=x\ln x$의 교점의 개수 $g(k)$에 대하여 $g(k)\ge1$을 만족시키는 실수 k의 최솟값은 $-\dfrac{1}{e^2}$이다.

9) 답 ③

[해설] 직각삼각형 ABP에서 $|\overrightarrow{AB}|\cos(\angle PAB)=|\overrightarrow{AP}|$임을 이용한다.

선분 AB가 원의 지름이므로 $\angle APB=\angle AQB=\dfrac{\pi}{2}$이다.

직각삼각형 ABP에서

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AP}|\cos(\angle PAB)$

$=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|\cos(\angle PAB)$

$=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AP}|$

$=4\times4=16$

직각삼각형 AQB에서

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BQ}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BQ}$

$=-|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BQ}|\cos(\angle ABQ)$

$=-|\overrightarrow{BQ}||\overrightarrow{BA}|\cos(\angle ABQ)$

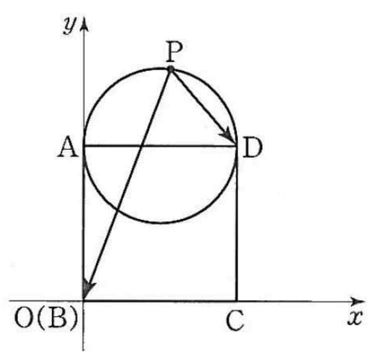
$=-|\overrightarrow{BQ}||\overrightarrow{BQ}|$

$=-6\times6=-36$

따라서 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BQ}=16+(-36)=-20$

10) 답 ④

[해설] 주어진 도형을 점 B가 원점 O와 일치하고 반직선 BC, BA를 각각 x축, y축의 양의 방향으로 하는 좌표평면 위에 놓으면 그림과 같다.



정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 2이므로

점 D의 좌표는 $(2,\ 2)$이다.

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓으면

$\overrightarrow{PB}=-\overrightarrow{BP}=(-x,\ -y)$

$\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BP}$

$=(2,\ 2)-(x,\ y)$

$=(2-x,\ 2-y)$

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=(-x,\ -y)\cdot(2-x,\ 2-y)$

$=x(x-2)+y(y-2)$

$= x^2+y^2-2x-2y$

$= (x-1)^2+(y-1)^2-2$

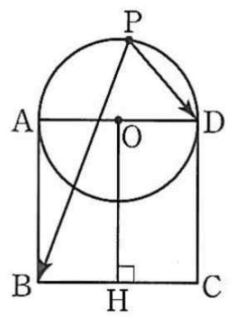
이때 $(x-1)^2+(y-1)^2$은 두 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$, $(1,\ 1)$ 사이의 거리의 제곱이고, 점 P는 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 위를 움직이므로 $(x-1)^2+(y-1)^2$은 점 P의 좌표가 $(1,\ 3)$일 때 최대이고, 최댓값은 4이다.

따라서 $(x-1)^2+(y-1)^2-2$의 최댓값은

$4-2=2$

[다른 풀이]

원의 중심을 O라 하고 점 O에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



$\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PD}} = (\overrightarrow{\mathrm{PO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{PO}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}})$

$= |\overrightarrow{\mathrm{PO}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{PO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}}$

$= 1+\overrightarrow{\mathrm{PO}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})-\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$= 1+\overrightarrow{\mathrm{PO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OH}}-|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$

$= 1+\overrightarrow{\mathrm{PO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OH}}-1$

$= \overrightarrow{\mathrm{PO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OH}}$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OH}}$는 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PO}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$가 이루는 각의 크기가 0일 때 최댓값을 가지므로 구하는 최댓값은

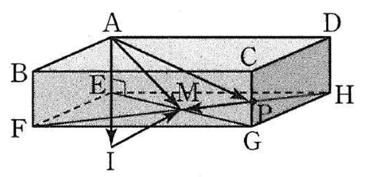
$|\overrightarrow{\mathrm{PO}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|\cos 0 = 1\times2\times1=2$

11) 답 ②

[해설] $\overrightarrow{FP}=3\overrightarrow{PH}$에서 점 P는 선분 FH를 $3:1$로 내분하는 점이므로 사각형 $EFGH$의 두 대각선의 교점을 M이라고 하면

$\overrightarrow{HP}=\overrightarrow{PM}$

또한 $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AE}$이므로 $2\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AI}$를 만족시키도록 점 I를 잡으면



$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{HP}-2\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}-2\overrightarrow{AE}$

$=\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AI}$

$=\overrightarrow{IM}$

이때 $|\overrightarrow{IM}|=|\overrightarrow{AM}|$이고 $|\overrightarrow{EM}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{EG}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{5}$

이므로 직각삼각형 AEM에서

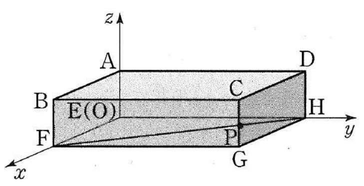
$|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{6}$

따라서 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{HP}-2\overrightarrow{CG}|=|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{6}$

[다른 풀이]

그림과 같이 점 E를 원점으로 하고, 세 반직선 EF, EH, EA를 각각 x축, y축, z축의양의 방향으로 하는 좌표공간을 설정하면 다섯 개의 점 A, F, H, C, G의 좌표는

$A(0,0,1)$, $F(2,0,0)$, $H(0,4,0)$, $C(2,4,1)$, $G(2,4,0)$이다.



$\overrightarrow{FP}=3\overrightarrow{PH}$에서 점 P는 선분 FH를 $3:1$로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$P\left(\dfrac{3\times0+1\times2}{3+1},\ \dfrac{3\times4+1\times0}{3+1},\ \dfrac{3\times0+1\times0}{3+1}\right)$

즉, $P\left(\dfrac{1}{2},3,0\right)$

따라서

$\overrightarrow{AP}=\left(\dfrac{1}{2},3,0\right)-(0,0,1)=\left(\dfrac{1}{2},3,-1\right)$

$\overrightarrow{HP}=\left(\dfrac{1}{2},3,0\right)-(0,4,0)=\left(\dfrac{1}{2},-1,0\right)$

$\overrightarrow{CG}=(2,4,0)-(2,4,1)=(0,0,-1)$

이므로

$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{HP}-2\overrightarrow{CG}$

$=\left(\dfrac{1}{2},3,-1\right)+\left(\dfrac{1}{2},-1,0\right)-(0,0,-2)$

$=(1,2,1)$

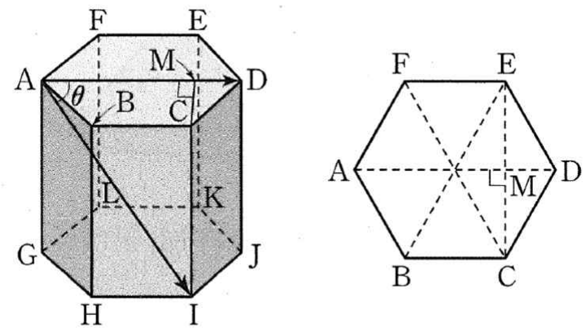
따라서

$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{HP}-2\overrightarrow{CG}|=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$

12) 답 108

[해설] $\overrightarrow{FJ}=\overrightarrow{AI}$이고 점 I에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 M이라고 하면 $\overline{IC}\perp$(평면 $ABCDEF$), $\overline{IM}\perp\overline{AD}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{CM}\perp\overline{AD}$

$|\overrightarrow{AM}|=\dfrac{3}{4}|\overrightarrow{AD}|=\dfrac{3}{4}\times12=9$

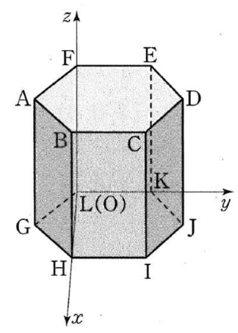


두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AI}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$\overrightarrow{AD}\circ\overrightarrow{FJ}=\overrightarrow{AD}\circ\overrightarrow{AI}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AI}|\cos\theta=|\overrightarrow{AD}|\times|\overrightarrow{AM}|$

$=12\times9=108$

[다른 풀이]



그림과 같이 점 L을 원점 O라 하고, 세 반직선 LH, LK, LF를 각각 x축, y축, z축의양의방향으로 하는 좌표공간을 설정하면 네 점 A, D, F, J의 좌표는 각각 $A(3\sqrt{3},-3,10)$, $D(3\sqrt{3},9,10)$, $F(0,0,10)$, $J(3\sqrt{3},9,0)$이므로

$\overrightarrow{AD}=(3\sqrt{3},9,10)-(3\sqrt{3},-3,10)=(0,12,0)$

$\overrightarrow{FJ}=(3\sqrt{3},9,0)-(0,0,10)=(3\sqrt{3},9,-10)$

따라서 $\overrightarrow{AD}\circ\overrightarrow{FJ}=(0,12,0)\circ(3\sqrt{3},9,-10)$

$=0\times3\sqrt{3}+12\times9+0\times(-10)=108$

13) 답 ⑤

[해설]

구 $x^2+(y+1)^2+(z-6)^2=6$ 의 중심을 C 라고 하면 $C(0,-1,6)$이고 점 O가 좌표공간의 원점일 때,

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$

$=(0,-1,6)-(1,-2,4)$

$=(-1,1,2)$

따라서 $\overrightarrow{AC}=(-1,1,2)$에 수직이고 점 $A(1,-2,4)$를 지나는 평면의 방정식은

$-(x-1)+(y+2)+2(z-4)=0$

$x-y-2z+5=0$

따라서 $a=-1, b=-2, c=5$이므로

$a+b+c=-1+(-2)+5=2$

14) 답 8

[해설]

점 P좌표를 (x,y,z)라고 하면

$\overrightarrow{AP}=(x-2,y-1,z-3)$

$\overrightarrow{BP}=(x-4,y-3,z+1)$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ 에서

$(x-2)(x-4)+(y-1)(y-3)+(z-3)(z+1)=0$

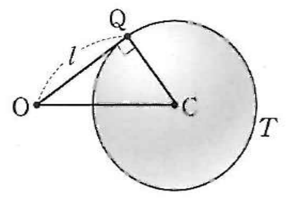
$x^2+y^2+z^2-6x-4y-2z+8=0$

$(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6$

따라서 점 P가 나타내는 도형 T는 중심의 좌표가 $C(3,2,1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$인 구이다.

$\overline{OC}=\sqrt{3^2+2^2+1^2}=\sqrt{14}$

원점 O를 지나는 직선이 도형 T와 한 점 Q에서 만나므로 $\overline{CQ}=\sqrt{6}$ 이고 삼각형 OCQ는 $\angle OQC=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.



따라서

$$l^2=\overline{OQ}^2=\overline{OC}^2-\overline{CQ}^2$$
$$=(\sqrt{14})^2-(\sqrt{6})^2=8$$

15) 답 ②

[해설]

${}_nC_0=1,\ {}_nC_n=1$이고

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}+{}_nC_n=2^n$

이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}=2^n-2$

따라서 주어진 부등식은

$127<2^n-2<1023,\ 129<2^n<1025$

$2^7=128,\ 2^8=256,\ {}^9=512,\ 2^{10}=1024,\ 2^{11}=2048$이므로

$n=8$ 또는 $n=9$ 또는 $n=9$

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$8+9+10=27$

16) 답 ②

[해설]

${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+\cdots+{}_{11}C_{11}=2^{11}$ ...... ㉠

${}_nC_r={}_nC_{n-r}$에서

${}_{11}C_0={}_{11}C_{11}$

${}_{11}C_1={}_{11}C_{10}$

${}_{11}C_2={}_{11}C_9$

${}_{11}C_3={}_{11}C_8$

${}_{11}C_4={}_{11}C_7$

${}_{11}C_5={}_{11}C_6$

이므로 ㉠

$2({}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5)=2^{11}$

${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5=2^{10}$

$\log_2({}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5)=\log_2 2^{10}=10$

17) 답 ④

[해설]

이항정리에 의하여

$(1+x)^6={}_6C_0+{}_6C_1x+{}_6C_2x^2+\cdots+{}_6C_6x^6$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=7$을 대입하면

${}_6C_0+7\times{}_6C_1+7^2\times{}_6C_2+\cdots+7^6\times{}_6C_6$

$=(1+7)^6=(2^3)^6=2^{18}$

18) 답 ①

[해설]

x^2의 계수는

$2\times{}_2C_2+3\times{}_3C_2+4\times{}_4C_2+\cdots+8\times{}_8C_2$

$$=\sum_{k=2}^{8}(k\times{}_kC_2)=\sum_{k=2}^{8}\left\{k\times\frac{k(k-1)}{2}\right\}$$

$$=\sum_{k=2}^{8}\frac{k^3-k^2}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}(k^3-k^2)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{8\times9}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\times\frac{8\times9\times17}{6}$$

$=648-102=546$

19) 답 ②

[해설] 확률변수 X의 확률질량함수가

$P(X=x)={}_{25}C_xp^x(1-p)^{25-x}$이므로 X는 이항분포 $B(25,\ p)$를 따른다.

$E(X)=5$이므로 $25\times p=5$에서 $p=\dfrac{1}{5}$

따라서

$V(X)=25\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{5}=4$

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=4+25=29$

20) 답 152

[해설] 확률변수 X가 가지는 값은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열을 이루므로 확률변수 Y를 $X=3Y+2$, 즉

$Y=\dfrac{X-2}{3}$로 놓으면 Y는 이항분포 $B\left(20,\ \dfrac{1}{4}\right)$을 따른다.

이때

$E(Y)=20\times\dfrac{1}{4}=5$

$V(Y)=20\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{15}{4}$

따라서

$E(X)=E(3Y+2)=3E(Y)+2=3\times5+2=17$

$V(2X)=4V(X)=4V(3Y+2)$

$=4\times9\times V(Y)=4\times9\times\dfrac{15}{4}=135$

이므로

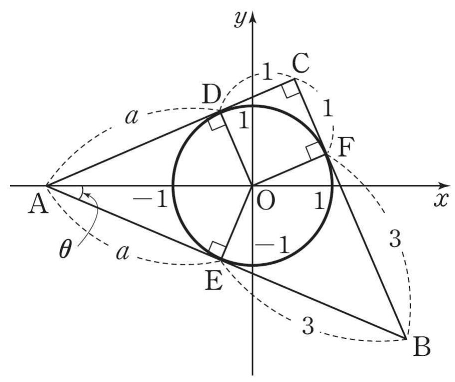
$E(X)+V(2X)=17+135=152$

21) [정답] ①

내접원이 삼각형 ABC의 세 변과 접하는 점을 각각 D, E, F라 하자.

$\overline{CF}=\overline{CD}=1$이므로

$\overline{BF}=\overline{BE}=3$



$\overline{AD}=\overline{AE}=a$라 하면 피타고라스의 정리에 의하여

$(a+3)^2=(a+1)^2+4^2$

$a^2+6a+9=a^2+2a+1+16$

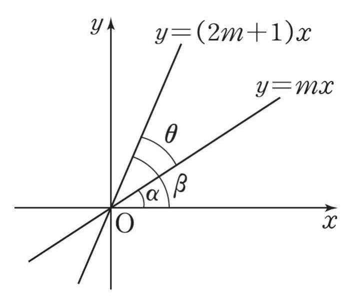
$4a=8$

$\therefore\ a=2$

따라서 $\tan\theta=\dfrac{\overline{OE}}{\overline{AE}}=\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{2}$ 이므로

$\cot\theta=2$

22) [정답] ②



두 직선 $y=mx$와 $y=(2m+1)x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha,\ \beta$라 하면

$\tan\alpha=m,\ \tan\beta=2m+1$

$\therefore\ \tan\theta=\tan(\beta-\alpha)$

$$=\left|\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}\right|$$

$$=\left|\frac{2m+1-m}{1+(2m+1)m}\right|$$

$$=\left|\frac{m+1}{2m^2+m+1}\right|$$

$$=\frac{m+1}{2m^2+m+1}\ (\because\ m>0)$$

$$=\frac{1}{2}$$

$2m^2+m+1=2m+2$

$2m^2-m-1=0$

$(2m+1)(m-1)=0$

$\therefore\ m=1(\because\ m>0)$

23) 답 ④

[해설] $f(x)=\ln|x^2-3|$에서

$f'(x)=\dfrac{(x^2-3)'}{x^2-3}=\dfrac{2x}{x^2-3}$

$f(2)=f(-2)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}\left\{\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}+\dfrac{f(-x)-f(-2)}{x-2}\right\}$ $\cdots$㉠

이때

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

$-x=t$라 하면, $x\to2$일 때, $t\to-2$이므로

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(-x)-f(-2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{t\to-2}\left\{\dfrac{f(t)-f(-2)}{t-(-2)}\cdot(-1)\right\}$

$=-f'(-2)$

이므로 ㉠에서

$\lim\limits_{x\to2}\left\{\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}+\dfrac{f(-x)-f(-2)}{x-2}\right\}$

$=f'(2)-f'(-2)$

$=\dfrac{2\times2}{2^2-3}-\dfrac{2\times(-2)}{(-2)^2-3}$

$=8$

24) 답 ①

[해설] $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(1+h)-g(1-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\left\{\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h}+\dfrac{g(1-h)-g(1)}{-h}\right\}$

$=g'(1)+g'(1)=2g'(1)$

$f(0)=1$이고 $f'(x)=1+e^x$에서

$g(1)=0,\ g'(1)=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{2}$이므로 $2g'(1)=1$

25) [정답] ③

$x-t=z$로 놓으면 $-\dfrac{dt}{dz}=1$이고

$t=0$일 때 $z=x$, $t=x$일 때 $z=0$이므로

$\int_0^x tf(x-t)dt=-\int_x^0(x-z)f(z)dz$

$=\int_0^x(x-z)f(z)dz$

$=x\int_0^x f(z)dz-\int_0^x zf(z)dz$

$\therefore\ x\int_0^x f(z)dz-\int_0^x zf(z)dz=-3\sin2x+kx$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(z)dz+xf(x)-xf(x)=-6\cos2x+k$

$\therefore\ \int_0^x f(z)dz=-6\cos2x+k$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=-6+k$

$\therefore\ k=6$

26) [정답] 6

$\int_{-1}^1(3-x)f'(x)dx$

$=\Big[\ (3-x)f(x)\ \Big]_{-1}^1-\int_{-1}^1\{-f(x)\}dx$

$=\Big[\ (3-x)f(x)\ \Big]_{-1}^1+\int_{-1}^1 f(x)dx$

한편 $f(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^x}{2}=-\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=-f(x)$이므로

$\int_{-1}^1 f(x)dx=0$

$\therefore\ \int_{-1}^1(3-x)f'(x)dx=\Big[\ (3-x)f(x)\ \Big]_{-1}^1$

$=2f(1)-4f(-1)$

$=2f(1)+4f(1)$ ($\because\ f(-1)=-f(1)$)

$=6f(1)$

27) [정답] 190

$a_n=\int_0^n(n^2-x^2)dx$

$=\left[n^2x-\dfrac{1}{3}x^3\right]_0^n$

$=n^3-\dfrac{1}{3}n^3$

$=\dfrac{2}{3}n^3$

$\therefore\ a_1+\dfrac{a_2}{2}+\dfrac{a_3}{3}+\cdots+\dfrac{a_9}{9}=\sum\limits_{k=1}^9\dfrac{a_k}{k}$

$=\sum\limits_{k=1}^9\dfrac{2}{3}k^2$

$=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{9\times10\times19}{6}$

$=190$

28) [정답] ③

$\int_0^1 f'(\sqrt{x})dx$에서 $\sqrt{x}=t$로 놓으면

$x=t^2$이고 $\dfrac{dx}{dt}=2t$이다.

$x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=1$이므로

$\int_0^1 f'(\sqrt{x})dx=\int_0^1 2tf'(t)dt$

$=\Big[\ 2tf(t)\ \Big]_0^1-\int_0^1 2f(t)dt$

$=2f(1)-2\int_0^1 f(t)dt$

그런데 $f(1)=1$이고 색칠한 부분의 넓이는

$\int_0^1 f(x)dx=k$이므로

$\int_0^1 f'(\sqrt{x})dx=2-2k$

29) [정답] ④

$x=\dfrac{3t}{2+t^2},\ y=\dfrac{2-t^2}{2+t^2}$에서

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{3(2+t^2)-3t\times2t}{(2+t^2)^2}$

$=\dfrac{6-3t^2}{(2+t^2)^2}$

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{-2t(2+t^2)-(2-t^2)\times2t}{(2+t^2)^2}$

$=\dfrac{-8t}{(2+t^2)^2}$

따라서 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-8t}{6-3t^2}$이므로 $t=2$일 때,

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{8}{3}$

30)답 ⑤

[해설] $x=2t^2+\cos2t,\ y=3-\dfrac{1}{2}\sin2t$에서

$\dfrac{dx}{dt}=4t-2\sin2t,\ \dfrac{dy}{dt}=-\cos2t$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=4-4\cos2t,\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=2\sin2t$

이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도를 $\vec{a}$라고 하면

$\vec{a}=(4-4\cos2t,\ 2\sin2t)$

따라서 시각 $t=\dfrac{\pi}{4}$에서의 가속도는 $\vec{a}=(4,\ 2)$이므로 가속도의 크기는

$|\vec{a}|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

31) [정답] ②

$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}$이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$

이때

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos60°$

$=1\times1\times\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{1}{2}$

이고 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=0$ ($\because\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AP}$)이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PC}=\dfrac{1}{2}-0=\dfrac{1}{2}$

32) [정답] ⑤

주어진 정육면체를 적당히 회전시켜 점 A를 원점으로 하고, 반직선 AB를 x축, 반직선 AE를 y축, 반직선 AD를 z축의 양의 방향으로 하는 좌표공간을 생각하자.

이때 두 점 P, Q의 좌표는 P$(a,\ b,\ c)$, Q$(p,\ q,\ r)$

($a,\ b,\ c,\ p,\ q,\ r$는 0 이상 1 이하의 실수)로 놓을 수 있다.

이때 $\overrightarrow{AP}=(a,\ b,\ c)$, $\overrightarrow{AQ}=(p,\ q,\ r)$이다.

ㄱ. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=ap+bq+cr\geq0$ (참)

ㄴ. $|\overrightarrow{AP}|\leq|\overrightarrow{AG}|=\sqrt{3}$, $|\overrightarrow{AQ}|\leq|\overrightarrow{AG}|=\sqrt{3}$이므로 두 점 P, Q가 모두 꼭짓점 G와 일치할 때, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$는 최대이다.

$\therefore\ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}\leq\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AG}$

$=|\overrightarrow{AG}|^2=3$ (참)

ㄷ. G$(1,\ 1,\ 1)$이므로 $\overrightarrow{AG}=(1,\ 1,\ 1)$

$\therefore\ \overrightarrow{GQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AG}$

$=(p,\ q,\ r)-(1,\ 1,\ 1)$

$=(p-1,\ q-1,\ r-1)$

이때 $\overrightarrow{AP}=(a,\ b,\ c)$에서 $a\geq0,\ b\geq0,\ c\geq0$이고

$p-1\leq0,\ q-1\leq0,\ r-1\leq0$이므로

$a(p-1)\leq0,\ b(q-1)\leq0,\ c(r-1)\leq0$

$\therefore\ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{GQ}=(a,\ b,\ c)\cdot(p-1,\ q-1,\ r-1)$

$=a(p-1)+b(q-1)+c(r-1)\leq0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

33) 답 ①

[해설]

직선 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{a}=z+1$ 의 방향벡터를 $\overrightarrow{u_1}$이라고 하면

$\overrightarrow{u_1}=(2,a,1)$

직선 $1-2x=2y=bz$의 방향벡터를 $\overrightarrow{u_2}$라고 하면

$\overrightarrow{u_2}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{b}\right)$

직선 $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{c}=\dfrac{3-z}{2}$ 의 방향벡터를 $\overrightarrow{u_3}$ 이라고 하면

$\overrightarrow{u_3}=(3,c,-2)$

$\overrightarrow{u_1}\,//\,\overrightarrow{u_2}$ 이므로

$\dfrac{2}{-\frac{1}{2}}=\dfrac{a}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\frac{1}{b}}$

$-4=2a=b\ \cdots$ ㉠

$\overrightarrow{u_1}\perp\overrightarrow{u_3}$ 이므로

$2\times3+a\times c+1\times(-2)=0$

$ac+4=0\ \cdots$ ㉡

㉠,㉡에서

$a=-2,\ b=-4,\ c=2$

$a+b+c=-2+(-4)+2=-4$

34) 답 67

[해설] $S_1: x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+1=0$ 에서

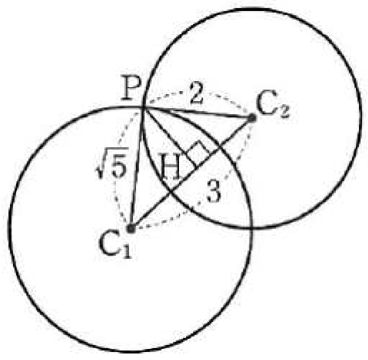
$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=5$

$S_2: x^2+y^2+z^2-4x-8y-6z+25=0$ 에서

$(x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=4$

따라서 두 구 S_1, S_2의 중심을 각각 C_1, C_2라고 하면 두 점 C_1, C_2의 좌표는 각각 $C_1(1,2,1), C_2(2,4,3)$이고, 두 구의 중심 사이의 거리는 $\overline{C_1C_2}=\sqrt{(2-1)^2+(4-2)^2+(3-1)^2}=3$

한편, 두 구 S_1, S_2의 반지름의 길이는 각각 $\sqrt{5}, 2$이므로 두 구의 중심을 지나는 한 평면으로 자른 단면은 다음 그림과 같다.



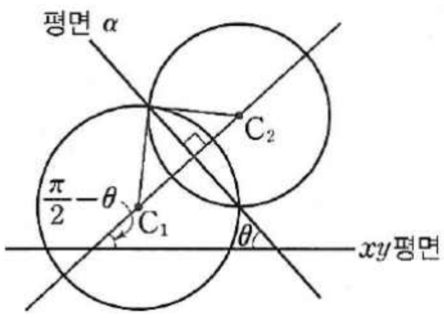
두 구의 교선 위의 한 점을 P라고 하면

$\overline{PC_1}^2+\overline{PC_2}^2=\overline{C_1C_2}^2$ 이므로 삼각형 PC_1C_2는 각 C_1PC_2가 직각인 직각삼각형고, 점 P에서 선분 C_1C_2에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{PC_1}\times\overline{PC_2}=\overline{PH}\times\overline{C_1C_2}$에서

$\overline{PH}=\dfrac{\overline{PC_1}\times\overline{PC_2}}{\overline{C_1C_2}}=\dfrac{\sqrt{5}\times2}{3}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ 이때 선분 PH의 길이는 두 구의 교선인 원의 반지름의 길이와 같으므로 두 구가 만나서 생기는 도형인 원의 넓이를 S라고 하면 $S=\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2\pi=\dfrac{20}{9}\pi$

한편, 다음 그림과 같이 두 구가 만나서 생기는 원을 포함하는 평면을 α라고 하면 α는 직선 C_1C_2와 수직이므로 평면 α와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면 직선 C_1C_2와 xy평면이 이루는 예각의 크기는 $\dfrac{\pi}{2}-\theta$이다.



두 점 C_1, C_2의 xy평면 위로의 정사영을 각각 D_1, D_2라고 하면 두 점 D_1, D_2의 좌표는 각각 $D_1(1,2,0), D_2(2,4,0)$이다. 따라서

$\overline{C_1C_2}=3, \overline{D_1D_2}=\sqrt{(2-1)^2+(4-2)^2+0^2}=\sqrt{5}$이므로

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{\overline{D_1D_2}}{\overline{C_1C_2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ 즉, $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$이므로

$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$ 따라서 두 구가 만나서 생기는 원의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는 $S\cos\theta=\dfrac{20}{9}\pi\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{40}{27}\pi$

따라서 $p+q=27+40=67$

35) 답 ⑤

[해설]

함숫값의 곱이 4이므로 함숫값에 따라 다음 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) 함숫값이 1, 1, 1, 1, 4인 경우

함수 f의 개수는

$\dfrac{5!}{4!1!}=5$

(ⅱ) 함숫값이 1, 1, 1, 2, 2인 경우

함수 f의 개수는

$\dfrac{5!}{3!2!}=10$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수의 개수는 합의 법칙에 의해

$5+10=15$

36) [정답] ②

(i) $f(4)=1$일 때

조건 (나)에 의하여 $f(1)=f(2)=f(3)=1$이고, 조건 (다)에 의하여 $f(5)$, $f(6)$의 값은 각각 2, 3, 4, 5, 6의 5가지 중 하나이므로 구하는 함수 f의 개수는 $1\times{}_5\Pi_2=5^2=25$

(ii) $f(4)=3$일 때

조건 (나)에 의하여 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값은 각각 1, 2, 3의 3가지 중 하나이고, 조건 (다)에 의하여 $f(5)$, $f(6)$의 값은 각각 4, 5, 6의 3가지 중 하나이므로 구하는 함수 f의 개수는

${}_3\Pi_3\times{}_3\Pi_2=3^3\times3^2=243$

(iii) $f(4)=5$일 때

조건 (나)에 의하여 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값은 각각 1, 2, 3, 4, 5의 5가지 중 하나이고, 조건 (다)에 의하여 $f(5)=(6)=6$이므로 구하는 함수 f의 개수는

${}_5\Pi_3\times1=5^3=125$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수의 개수는

$25+243+125=393$

37) 답 ④

[해설]

$f(x-1)=1+x+x^2+\cdots+x^{10}$에서

$x-1=t$로 놓으면

$f(t)=1+(t+1)+(t+1)^2+\cdots+(t+1)^{10}$

이때 t^7이 나오는 식은

$(1+t)^7$, $(1+t)^8$, $(1+t)^9$, $(1+t)^{10}$ …… ㉠

㉠의 각 식에서 t^7의 계수를 각각 구하면

${}_7C_7$, ${}_8C_7$, ${}_9C_7$, ${}_{10}C_7$

따라서 $f(t)$에서 t^7의 계수 a_7의 값은

$a_7={}_7C_7+{}_8C_7+{}_9C_7+{}_{10}C_7$

이때

${}_7C_7=1$, ${}_8C_7={}_8C_1=8$,

${}_9C_7={}_9C_2=\dfrac{9\times8}{2\times1}=36$

${}_{10}C_7={}_{10}C_3=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

이므로 $a_7=1+8+36+120=165$

[다른 풀이]

$f(x-1)=1+x+x^2+\cdots+x^{10}$에서

$x-1=t$로 놓으면

$f(t)=1+(t+1)+(t+1)^2+\cdots+(t+1)^{10}$ …… ㉠

㉠의 우변은 첫째항이 1, 공비가 $t+1$, 항의 개수가 11인 등비수열의 첫째항부터 제11항까지의 합이므로

$\dfrac{(t+1)^{11}-1}{(t+1)-1}=\dfrac{(t+1)^{11}-1}{t}$ …… ㉡

따라서 $f(t)$에서 t^7의 계수 a_7은 ㉡의 $(t+11)^{11}$의 전개식에서 t^8의 계수와 같으므로

$a_7={}_{11}C_8={}_{11}C_3=\dfrac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=165$

38) 답 ④

[해설]

$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^n$의 전개식에서 일반항은

${}_nC_r x^{n-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r={}_nC_r(-1)^r x^{n-2r}$

$n-2r=3$ $(n=3,\ 4,\ 5)$에서

$n=4$일 때, x^3항은 존재하지 않는다.

$n=3$, 5일 때, $n-2r=3$을 만족시키는 r의 값은 각각 0, 1이므로 x^3의 계수는

${}_3C_0\times(-1)^0+{}_5C_1\times(-1)^1=1-5=-4$

39) 답 ①

[해설] 확률변수 X가 이항분포 $B\left(n,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따르므로

$P(X=x)={}_nC_x\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-x}={}_nC_x\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

이때

$P(X=1)={}_nC_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, $P(X=n)={}_nC_n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

이므로 $P(X=1)=12P(X=n)$에서

${}_nC_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=12{}_nC_n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$n=12$

즉, 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(12,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X)=12\times\dfrac{1}{2}=6$

$V(X)=12\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=3$

따라서

$E(X)+V(X)=6+3=9$

40) 답 161

[해설] 확률변수 X가 취하는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이고 수학적 확률과 여사건의 확률을 이용하여 각각의 확률을 구하면

$P(X=1)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$

$P(X=2)=\dfrac{2}{6}\times\dfrac{2}{6}-\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{3}{36}$

$P(X=3)=\dfrac{3}{6}\times\dfrac{3}{6}-\dfrac{2}{6}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{5}{36}$

$P(X=4)=\dfrac{4}{6}\times\dfrac{4}{6}-\dfrac{3}{6}\times\dfrac{3}{6}=\dfrac{7}{36}$

$P(X=5)=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{5}{6}-\dfrac{4}{6}\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{9}{36}$

$P(X=6)=1-\dfrac{5}{6}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{11}{36}$

이때 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

따라서

$E(X)=1\times\dfrac{1}{36}+2\times\dfrac{3}{36}+3\times\dfrac{5}{36}+4\times\dfrac{7}{36}+5\times\dfrac{9}{36}+6\times\dfrac{11}{36}$

$=\dfrac{161}{36}$

이므로

$E(36X)=36E(X)=36\times\dfrac{161}{36}=161$