정답 & 해설

[난문현답 기출 정답]

1. ③

2. ③

3. 10

4. ⑤

5. 180

6. 21

7. 17

8. 45

9. 14

10. ⑤

[추가 과제 해설]

1) 정답 ⑤

ㄱ. $f(2x)g(2x)=2^{2x}\cdot 3^{2x}=(2^x)^2\cdot(3^x)^2$

$=(2^x\cdot 3^x)^2=\{f(x)g(x)\}^2$

ㄴ. $f(-3x)g(2x)=2^{-3x}\cdot 3^{2x}=\left(\dfrac{1}{8}\right)^x\cdot 9^x=\left(\dfrac{9}{8}\right)^x$

따라서 함수 $f(-3x)g(2x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $a<b$이면

$f(-3a)g(2a)<f(-3b)g(2b)$

ㄷ. $f(4x)g(-3x)=2^{4x}\cdot 3^{-3x}=16^x\cdot\left(\dfrac{1}{27}\right)^x=\left(\dfrac{16}{27}\right)^x$

따라서 함수 $f(4x)g(-3x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $a<b$이면

$f(4a)g(-3a)>f(4b)g(-3b)$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

2) 정답 6

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$m=3$

즉 두 함수 $f(x)=a^{x-3}$, $g(x)=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{x-3}$에서

$f(2)=a^{2-3}=\dfrac{1}{a}$, $g(2)=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{2-3}=a$

따라서 $\mathrm{P}\left(2,\ \dfrac{1}{a}\right)$, $\mathrm{Q}(2,\ a)$이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{3}{2}$이므로

$a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{3}{2}$, $\qquad 2a^2-3a-2=0$

$(2a+1)(a-2)=0 \qquad \therefore\ a=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=2$

그런데 $a>1$이므로 $\qquad a=2$

$\therefore\ am=6$

3) 정답 4

$$\lim_{x\to 0+}\frac{a^x+\log_b x}{b^x+\log_a x}=\lim_{x\to 0+}\frac{a^x+\dfrac{\ln x}{\ln b}}{b^x+\dfrac{\ln x}{\ln a}} \qquad \bullet\ 30\ \%$$

이때 $\lim\limits_{x\to 0+}a^x=1$, $\lim\limits_{x\to 0+}b^x=1$이고, $\lim\limits_{x\to 0+}\ln x=-\infty$이므로 위의 식의 분모, 분자를 각각 $\ln x$로 나누면

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\dfrac{a^x}{\ln x}+\dfrac{1}{\ln b}}{\dfrac{b^x}{\ln x}+\dfrac{1}{\ln a}}=\frac{\ln a}{\ln b}=\log_b a=\frac{1}{4} \qquad \bullet\ 50\ \%$$

$$\therefore\ \log_a b=\frac{1}{\log_b a}=4 \qquad \bullet\ 20\ \%$$

4) 정답 ②

$\sin^{-1}\dfrac{x}{2}=h$로 놓으면 $\dfrac{x}{2}=\sin h \qquad \therefore\ x=2\sin h$

또 $x\to 0$일 때 $h\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}\dfrac{x}{2}}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{2\sin h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{\sin h}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

5) 정답 $\ln 10$

$$\int_{-1}^{0}\left(-\frac{2x}{x^1+1}\right)dx+\int_0^2\frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$=\left[-\ln(x^2+1)\right]_{-1}^{0}+\left[\ln(x^2+1)\right]_0^2$$

$$=\ln 2+\ln 5=\ln 10$$

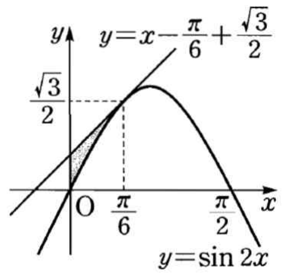
6) 정답 ①

$y=\sin 2x$에서 $y=2\cos 2x$이므로 곡선 위의 점 $\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$2\cos\dfrac{\pi}{3}=1$이고 접선의 방정식은

$y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=x-\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore\ y=x-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(x-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin 2x\right)dx$$

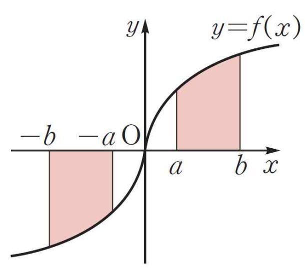
$$=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{\pi}{6}x+\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=-\frac{\pi^2}{72}+\frac{\sqrt{3}}{12}\pi-\frac{1}{4}$$

7) 정답 ⑤

$\displaystyle\int_{-b}^{-a}f(x)dx+\int_a^b f(x)dx=0$에서

$\displaystyle\int_{-b}^{-a}f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$이므로 오른쪽 그림에서 $f(x)$는 기함수이다.



ㄱ. $f(-x)=(-x)^6-1=x^6-1$

$=f(x)$

따라서 $f(x)$는 우함수이다.

ㄴ. $f(-x)=(-x)^{2017}+(-x)^{2015}$

$=-x^{2017}-x^{2015}$

$=-(x^{2017}+x^{2015})$

$=-f(x)$

따라서 $f(x)$는 기함수이다.

ㄷ. $f(-x)=\dfrac{2^{-x}-2^x}{2}=-\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}=-f(x)$

따라서 $f(x)$는 기함수이다.

이상에서 주어진 등식이 성립하는 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

8) 정답 ④

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $-x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=-1$

또한 $x=-1$일 때 $t=1$, $x=0$일 때 $t=0$이므로

$$\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_1^0 f(-t)\cdot(-1)dt$$

$$=\int_0^1 f(-t)dt=\int_0^1 f(-x)dx \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_0^1 f(-x)dx+\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\int_0^1\{f(-x)+f(x)\}dx$$

$$=\int_0^1 x^2\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)dx=\int_0^1 x^2(e^x+e^{-x})dx$$

이때 $g(x)=x^2$, $h'(x)=e^x+e^{-x}$으로 놓으면

$g'(x)=2x$, $h(x)=e^x-e^{-x}$

$\therefore \int_0^1 x^2(e^x+e^{-x})dx$

$=\left[x^2(e^x-e^{-x})\right]_0^1-2\int_0^1 x(e^x-e^{-x})dx$

$=e-\dfrac{1}{e}-2\int_0^1 x(e^x-e^{-x})dx$ …… ㉢

$\int_0^1 x(e^x-e^{-x})dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=e^x-e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x+e^{-x}$

$\therefore \int_0^1 x(e^x-e^{-x})dx=\left[x(e^x+e^{-x})\right]_0^1-\int_0^1(e^x+e^{-x})dx$

$=e+\dfrac{1}{e}-\left[e^x-e^{-x}\right]_0^1$

$=e+\dfrac{1}{e}-e+\dfrac{1}{e}=\dfrac{2}{e}$ …… ㉣

㉣을 ㉢에 대입하면

$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2(e^x+e^{-x})dx$

$=e-\dfrac{1}{e}-\dfrac{4}{e}=e-\dfrac{5}{e}$

9) 답 338

[해설] 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{11}=1$에서 $\sqrt{25+11}=6$이므로 초점의 좌표는 $(6, 0)$, $(-6, 0)$ $\therefore \overline{\mathrm{FF'}}=12$

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2\cdot 5=10$

$\therefore \overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PF'}}-10$

$\overline{\mathrm{PF}}$, $\overline{\mathrm{FF'}}$, $\overline{\mathrm{PF'}}$의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2\overline{\mathrm{FF'}}$에서 $(\overline{\mathrm{PF'}}-10)+\overline{\mathrm{PF'}}=2\cdot 12$

$\therefore \overline{\mathrm{PF'}}=17$

따라서 $\overline{\mathrm{PF}}=17-10=7$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF'}}^2=49+289=338$

10) 답 $8+16\sqrt{3}$

[해설] $\overline{\mathrm{PA}}$가 $\angle\mathrm{F'PF}$의 이등분선이므로

$\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{F'A}}:\overline{\mathrm{FA}}=5:3$

즉 $\overline{\mathrm{PF'}}=5k$, $\overline{\mathrm{PF}}=3k$ $(k>0)$로 놓으면 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2k=2\cdot 2\sqrt{3}$

$\therefore k=2\sqrt{3}$

$\therefore \overline{\mathrm{PF'}}=10\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{PF}}=6\sqrt{3}$

한편 $\sqrt{12+4}=4$에서 $\overline{\mathrm{FF'}}=8$이므로 $\triangle\mathrm{PFF'}$의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{FF'}}=8+16\sqrt{3}$

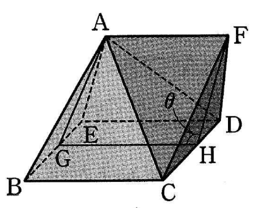
11) 답 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

[해설]

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BE}$와 $\overline{CD}$의 중점을 각각 G, H라 하면

$\overline{AG}=\overline{FH}$, $\overline{AF}=\overline{GH}$

이므로 $\square AGHF$는 평행사변형이다.



•20%

이때 두 면 $BCDE$와 CDF가 이루는 각의 크기는 $\overline{GH}$와 $\overline{FH}$가 이루는 각의 크기와 같으므로

$\cos\theta=\cos(\angle GHF)=\cos(180^\circ-\angle AFH)$

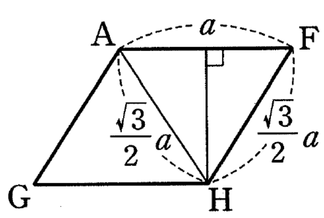
$=-\cos(\angle AFH)$ •40%

각 모서리의 길이를 a라 하면

$\overline{AH}=\overline{FH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

오른쪽 그림에서

$\cos(\angle AFH)=\dfrac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



$\therefore \cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

•40%

12) 답 $\dfrac{\sqrt{11}}{11}$

[해설]

$\square PQER$는 마름모이고

$\overline{QR}=\overline{BG}=3\sqrt{2}$,

$\overline{PE}=\sqrt{\overline{DE}^2+\overline{DP}^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{22}$

이므로 $\square PQER$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times\sqrt{22}=3\sqrt{11}$

한편 두 점 P, Q에서 밑면 $EFGH$에 내린 수선의 발을 각각 P', Q'이라 하면 $\square P'REQ'$은 평행사변형이므로 그 넓이는

$1\times 3=3$

이때 $\square PQER$의 평면 $EFGH$위로의 정사영이 $\square P'REQ'$이므로

$\square PQER\cos\theta=\square P'REQ'$, $3\sqrt{11}\cos\theta=3$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\sqrt{11}}{11}$

13) 답 ②

[해설] 점 $\mathrm{P}(a, b, c)$는 주어진 두 구 위에 있으므로

$a^2+b^2+c^2=9$ …… ㉠

$a^2+b^2+c^2-4a+6b-12c+33=0$ …… ㉡

㉠-㉡을 하면 $4a-6b+12c+42=0$

$\therefore 2a-3b+6c-21=0$ …… ㉢

$x^2+y^2+z^2-4x+6y-12z+33=0$에서

$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-6)^2=16$

이므로 구의 중심의 좌표는 $(2, -3, 6)$

따라서 주어진 두 구의 중심 $(0, 0, 0)$, $(2, -3, 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{6}$

점 $\mathrm{P}(a, b, c)$가 이 직선 위에 있으므로

$\dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{-3}=\dfrac{c}{6}=t$ (t는 실수)

로 놓으면 $a=2t$, $b=-3t$, $c=6t$

이를 ㉢에 대입하면

$4t+9t+36t-21=0$ $\therefore t=\dfrac{3}{7}$

따라서 $a=\dfrac{6}{7}$, $b=-\dfrac{9}{7}$, $c=\dfrac{18}{7}$이므로

$a+b-c=-3$

14) 답 $x+y+2z-5=0$, $x+y+2z+7=0$

[해설] 직선 $x-1=y=\dfrac{z+1}{2}$에 수직인 평면의 법선벡터는 $(1, 1, 2)$이므로 구하는 평면의 방정식을

$x+y+2z+k=0$ (k는 상수)

으로 놓을 수 있다.

이 평면이 주어진 구와 접하므로 구의 중심 $(2, -3, 0)$과 평면 $x+y+2z+k=0$ 사이의 거리는 구의 반지름의 길이와 같다. 즉

$\dfrac{|2-3+k|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\sqrt{6}$, $|k-1|=6$

$\therefore k=-5$ 또는 $k=7$

따라서 구하는 평면의 방정식은

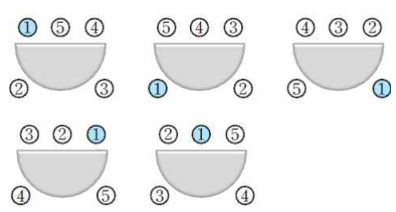
$x+y+2z-5=0$, $x+y+2z+7=0$

15) 정답 120

5명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$(5-1)!=4!=24$

이때 주어진 모양의 탁자에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 5가지씩 존재한다.



따라서 구하는 방법의 수는 $24\cdot 5=120$

16) 정답 18

가운데 정사각형을 칠하는 방법의 수는 9이고, 나머지 8개의 정사각형을 칠하는 방법의 수는

$(8-1)!=7!$

이때 8개의 정사각형을 칠하는 한 가지 방법에 대하여 주어진 도형에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.

②	③	④
⑨	①	⑤
⑧	⑦	⑥

⑨	②	③
⑧	①	④
⑦	⑥	⑤

따라서 구하는 방법의 수는 $9 \cdot 7! \cdot 2 = 18 \cdot 7!$

$\therefore\ k = 18$

17) **정답** 7

경품을 받을 확률이 $\dfrac{1}{10}$ 이므로 음료수를 3병 구입한 사람이 경품으로 1병의 음료수를 받을 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{1}{10}\right)^1\left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot \frac{9}{10} = \frac{3 \cdot 9^3}{10^4} = \frac{3^7}{10^4}$$

따라서 $\dfrac{3^7}{10^4} = \dfrac{3^k}{10^4}$ 이므로 $k = 7$

18) [정답] 0.0466

실제로 호텔에 투숙하는 사람 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B(22,\ 0.8)$을 따르므로

$$P(X=x) = {}_{22}C_x\, 0.8^x \times 0.2^{22-x}\ (x = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 22)$$

방이 부족하려면 $X > 20$이어야 하므로 구하는 확률은

$$P(X>20) = P(X=21) + P(X=22)$$
$$= {}_{22}C_{21}\, 0.8^{21} \times 0.2 + {}_{22}C_{22}\, 0.8^{22} \times 0.2^0$$
$$= 22 \times 0.009 \times 0.2 + 1 \times 0.007 \times 1$$
$$= 0.0466$$

19) [정답] ⑤

$$P(X=x) = {}_{45}C_x \cdot \frac{2^x}{3^{45}}$$
$$= {}_{45}C_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{45-x}\ (x = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 45)$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(45,\ \dfrac{2}{3}\right)$를 따르므로

$$E(X) = 45 \cdot \frac{2}{3} = 30,\ \ V(X) = 45 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 10$$

20) [정답] ④

확률변수 X가 이항분포 $B\left(10,\ \dfrac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$P(X=x) = {}_{10}C_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{10-x}\ (x = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$$

따라서 구하는 확률은

$$P(X \le 9) = 1 - P(X=10)$$
$$= 1 - {}_{10}C_{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\left(\frac{4}{5}\right)^0$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{10}$$

21) 정답 ④

함수 $y = a^{-x^2+4x-2}$에서 $0 < a < 1$이므로 $-x^2+4x-2$가 최대일 때에는 y는 최솟값을 갖는다.

$-x^2+4x-2 = -(x-2)^2+2$에서 $-x^2+4x-2$의 최댓값은 2이므로

$a^2 = \dfrac{1}{4}$ $\qquad \therefore\ a = \dfrac{1}{2}\ \ (\because\ a > 0)$

22) 정답 40

(ⅰ) $x-5=0$, 즉 $x=5$일 때, 주어진 방정식은 $3^0 = 6^0 = 1$이므로 성립한다. ● 40 %

(ⅱ) $x-5 \ne 0$일 때, $x-2=6$이므로 $x=8$ ● 40 %

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 근의 곱은 $5 \cdot 8 = 40$ ● 20 %

23) **정답** ②

[풀이] 원의 둘레의 길이는 $2\pi \cdot 1 = 2\pi$이고, 부채꼴의 둘레의 길이는 $6+6+6\theta = 12+6\theta$이다.

부채꼴의 둘레의 길이는 원의 둘레의 길이의 3배와 같으므로

$12+6\theta = 2\pi \cdot 3,\ 6\theta = 6\pi - 12$

$\therefore\ \theta = \pi - 2$

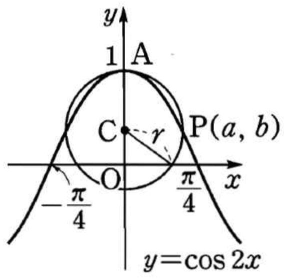
24) **정답** 3

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1+\frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{3} \qquad \cdot\ 50\ \%$$

$\therefore\ 1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x + \cdots$

$$= \frac{1}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3 \qquad \cdot\ 50\ \%$$

25) **정답** $\dfrac{1}{4}$



원의 중심을 C라 하면

$C(0,\ 1-r)$이고 $r = \overline{CP}$ 이므로

$$r^2 = a^2 + \{b-(1-r)\}^2$$
$$2(1-b)r = a^2 + (1-b)^2$$
$$\therefore\ r = \frac{a^2}{2(1-b)} + \frac{1-b}{2}\ \cdots ㉠$$

또 점 $P(a,\ b)$가 곡선 $y = \cos 2x$ 위의 점이므로

$b = \cos 2a$

이것을 ㉠에 대입하면

$$r = \frac{a^2}{2(1-\cos 2a)} + \frac{1-\cos 2a}{2}$$
$$= \frac{a^2}{4\sin^2 a} + \sin^2 a$$

점 P가 점 A에 한없이 가까워질 때 $a \to 0+$ 이므로

$$\lim_{a\to 0+} r = \lim_{a\to 0+}\left(\frac{a^2}{4\sin^2 a} + \sin^2 a\right)$$
$$= \lim_{a\to 0+}\left\{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a}{\sin a}\right) + \sin^2 a\right\}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot 1^2 + 0 = \frac{1}{4}$$

26) 정답 ④

$f(x) = x^3+2x-2$에서 $f(1) = 1$이므로 $\qquad g(1) = 1$

$$\therefore\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)-1}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{g(x)\{f(x)-1\}+g(x)-1}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1} \cdot g(x) + \lim_{x\to 1}\frac{g(x)-1}{x-1}$$
$$= f'(x)g(1) + g'(1)$$

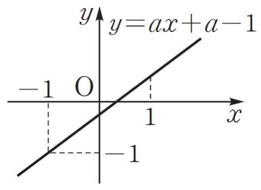
이때 $f'(x) = 3x^2+2$이므로

$$f'(1) = 5,\ \ g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5}$$

따라서 구하는 값은 $\qquad 5 \cdot 1 + \dfrac{1}{5} = \dfrac{26}{5}$

27) **정답** 1

$$f'(x) = \frac{ax^{ax}(x+1) - e^{ax}}{(x+1)^2} = \frac{(ax+a-1)e^{ax}}{(x+1)^2}$$



함수 $f(x)$가 구간 $(1,\ \infty)$에서 증가하려면 $x > 1$일 때 $f'(x) \ge 0$이어야 한다.

즉 $ax+a-1 \ge 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$a > 0,\ 2a-1 \ge 0$

$\therefore\ a \ge \dfrac{1}{2}$

따라서 정수 a의 최솟값은 1이다.

28) **정답** ②

$f(x) = \dfrac{a}{x} + \ln x^3 - x$에서 $x > 0$이고

$f'(x)=-\frac{a}{x^2}+\frac{3}{x}-1=\frac{-x^2+3x-a}{x^2}$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $-x^2+3x-a=0$이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(ⅰ) $-x^2+3x-a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9-4a>0 \qquad \therefore\ a<\frac{9}{4}$

(ⅱ) (두 근의 합)$=3>0$

(ⅲ) (두 근의 곱)$=a>0$

이상에서 $\quad 0<a<\frac{9}{4}$

따라서 정수 a는 1, 2이므로 구하는 합은

$1+2=3$

29) 답 $\frac{2}{3}\pi$

[해설] 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$

두 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$, $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, $\theta_2(0\le\theta_1<\pi, 0\le\theta_2<\pi)$라 하면

$\tan\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan\theta_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ \theta_1=\frac{\pi}{6}$, $\theta_2=\frac{5}{6}\pi$

따라서 구하는 둔각의 크기는

$\theta_2-\theta_1=\frac{2}{3}\pi$

30) 답 ③

[해설]

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{x_1x}{4}-y_1y=1 \qquad \therefore\ y=\frac{x_1}{4y_1}x-\frac{1}{y_1}$

접선의 기울기가 -1이므로

$\frac{x_1}{4y_1}=-1 \qquad \therefore\ x_1=-4y_1$

이때 $\frac{x_1^2}{4}-y_1^2=1$이므로

$3y_1^2=1 \qquad \therefore\ y_1=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 접선의 방정식은

$y=-x\pm\sqrt{3}$

구하는 두 직선 사이의 거리는 직선 $y=-x-\sqrt{3}$ 위의 점 $(0,\ -\sqrt{3})$과 직선 $y=-x+\sqrt{3}$, 즉 $x+y-\sqrt{3}=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-\sqrt{3}-\sqrt{3}|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{6}$$

31) 답 ⑤

[해설]

$\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$, $\frac{dy}{dt}=a\sin t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}$$

$$=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\cot\frac{t}{2}$$

32) 답 ①

[해설]

$\frac{dx}{d\theta}=1+\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\ (\cos\theta\ne-1)$$

$\theta=\frac{\pi}{2}$일 때 $x=\frac{\pi}{2}+1$, $y=1$, $\frac{dy}{dx}=1$

이므로 접선의 방정식은 $y-1=x-\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$

$\therefore\ y=x-\frac{\pi}{2}$

따라서 접선의 x절편과 y절편이 각각 $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{8}$

33) 답 ①

[해설]

$\overline{DH}\perp$(평면 $EFGH$), $\overline{DI}\perp\overline{GM}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{HI}\perp\overline{GM}$

$\triangle HMG=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=2$이므로

$\overline{HI}\cdot\overline{GM}=4$

$\overline{GM}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이므로

$\overline{HI}=4\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

34) 답 ⑤

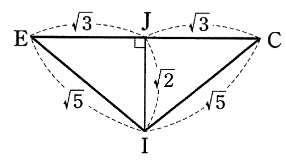
[해설]

$\triangle CEI$의 평면 $EFGH$ 위로의 정사영은 $\triangle GEF$이므로

$\triangle GEF=\triangle CEI\cos\theta \qquad \therefore\ \cos\theta=\frac{\triangle GEF}{\triangle CEI}$

$\overline{CE}=2\sqrt{3}$, $\overline{EI}=\overline{CI}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

이므로 오른쪽 그림과 같이 $\triangle CEI$의 꼭짓점 I에서 밑변 CE에 내린 수선의 발을 J라 하면



$\overline{IJ}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{2}$

$\therefore\ \triangle CEI=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}$

이때 $\triangle GEF=\frac{1}{2}\times2\times2=2$이므로

$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

35) 정답 20

어느 두 직선도 평행하지 않고 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않으므로 6개의 직선 중에서 3개의 직선을 택하면 삼각형이 결정된다.

따라서 구하는 삼각형의 개수는

${}_6C_3=20$

36) 정답 $\frac{5}{9}$

지우가 도착한 시각을 오후 2시 x분, 혜리가 도착한 시각을 오후 2시 y분이라 하면

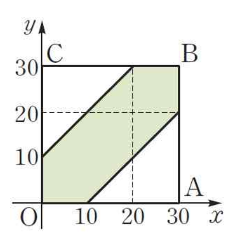
$0\le x\le30,\ 0\le y\le30 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

두 사람이 만나려면 $|x-y|\le10$이어야 하므로

$-10\le x-y\le10$

$\therefore\ x-10\le y\le x+10 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

오른쪽 그림에서 부등식 ㉠의 영역은 □OABC의 내부(경계선 포함)이고, 부등식 ㉠, ㉡의 공통인 영역은 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square\text{OABC의 넓이})}$$

$$= \frac{30 \cdot 30 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20\right)}{30 \cdot 30} = \frac{5}{9}$$

37) **정답** ㄴ, ㄷ

ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\quad \mathrm{P}(A \cap B) = 0$

이때 $\mathrm{P}(A) \neq 0$, $\mathrm{P}(B) \neq 0$이면

$$\mathrm{P}(A \cap B) \neq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

이므로 A, B는 서로 독립이 아니다.

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\quad \mathrm{P}(A \mid B^c) = \mathrm{P}(A)$

$$\therefore \mathrm{P}(A \cap B^c) = \mathrm{P}(A \mid B^c)\mathrm{P}(B^c) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^c)$$

따라서 A, B^c도 서로 독립이다.

ㄷ. A^c, B^c가 서로 독립이면 $\quad \mathrm{P}(A^c \cap B^c) = \mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B^c)$

$$\begin{aligned} \therefore \mathrm{P}(A \cap B) &= 1 - \mathrm{P}\left((A \cap B)^c\right) \\ &= 1 - \mathrm{P}(A^c \cup B^c) \\ &= 1 - \{\mathrm{P}(A^c) + \mathrm{P}(B^c) - \mathrm{P}(A^c \cap B^c)\} \\ &= 1 - \{\mathrm{P}(A^c) + \mathrm{P}(B^c) - \mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B^c)\} \\ &= \{1 - \mathrm{P}(A^c)\}\{1 - \mathrm{P}(B^c)\} \\ &= \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \end{aligned}$$

따라서 A, B도 서로 독립이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

38) **정답** ㄴ

사건 $[a,\ b,\ c,\ d]$를 A라 하면 $\quad \mathrm{P}(A) = \frac{2}{3}$

ㄱ. 사건 $[d,\ f]$를 B라 하면 $A \cap B = [d]$이므로

$$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A \cap B) \neq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

따라서 A와 B는 서로 종속이다.

ㄴ. 사건 $[c,\ d,\ e]$를 C라 하면 $A \cap C = [c,\ d]$이므로

$$\mathrm{P}(C) = \frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A \cap C) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$$

따라서 A와 C는 서로 독립이다.

ㄷ. 사건 $[c,\ d,\ e,\ f]$를 D라 하면 $A \cap D = [c,\ d]$이므로

$$\mathrm{P}(D) = \frac{2}{3},\ \mathrm{P}(A \cap D) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A \cap D) \neq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(D)$$

따라서 A와 D는 서로 종속이다.

이상에서 $[a,\ b,\ c,\ d]$와 서로 독립인 사건은 ㄴ뿐이다.

39) **[정답]** ⑤

모표준편차가 5이므로 표본의 크기를 n이라 하면 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\overline{x} - 3 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x} + 3 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{-15}{\sqrt{n}} \le m - \overline{x} \le \frac{15}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |m - \overline{x}| \le \frac{15}{\sqrt{n}}$$

모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차가 $\frac{1}{2}$ 이하이어야 하므로

$$\frac{15}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{2},\ \sqrt{n} \ge 30 \qquad \therefore n \ge 900$$

따라서 적어도 900개의 표본은 조사해야 한다.

40) **[정답]** ①

표본의 크기가 525, 표본비율이 $\hat{p} = 0.16$이므로 자전거 사용률 p를 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간은

$$0.16 - 2\sqrt{\frac{0.16 \times 0.84}{525}} \le p \le 0.16 + 2\sqrt{\frac{0.16 \times 0.84}{525}}$$

$$0.16 - 2 \times 0.016 \le p \le 0.16 + 2 \times 0.016$$

$$\therefore\ 0.128 \le p \le 0.192$$