

특이함에서 특별함으로
미친한 수학자

‘명이완정’

중심문자(대상)설정

2018년

현장강의용

컨텐츠

‘명이완정’

안녕하세요. 미천한 수학자입니다. :)

수학은 ‘직관에 의존한 논리’입니다. 눈에 보이지는 않지만 세상이 움직이는 보이지 않는 원리, 이치를 깨달은 사람들이 이 자명한 사실을 설명하고자 했고, 그것을 설명할 적당한 언어가 없었기 때문에 수학이라는 언어를 만들어서 설명한 것이죠.

요즘 수능 수학은 기억에‘만’ 의존해서는 제한시간 안에 풀기가 힘듭니다.
이것은 학생뿐만 아니라 꽤 많은 선생님들도 마찬가지죠. 그래서 우리는 교과서에 나온 고등수학의 원리를 좀 더 심도있게 이해하려고 노력해야 하고, ‘문제를 푸는 것’에만 그치는 것이 아니라 ‘변형, 창작’도 할 수 있어야 합니다.
어떤 문제의 본질을 정확하게 이해했다면 얼마든지 변형, 창작을 할 수 있거든요.

‘명이완정’은 제가 지금부터 10년간 만들어갈 수학 콘텐츠입니다.
개념을 완벽하게 이해시키고, 한 문제를 풀더라도 원리를 이해하고 발견하며 풀게 하는 것을 목표로 합니다.

또한 각 학생들에 실력에 맞는 단계별 콘텐츠를 제공함으로써 본인의 시간투자와 노력에 상응하는 수학실력을 얻게 하는 것을 목표로 합니다.

‘명’쾌하게 ‘이’해되고, ‘완’벽하게 ‘정’리 된다.

- 미천한 수학자 -

중심문자(대상)설정 에 대한 사고방식

#1. 서론

우리는 수학을 공부하면서 수많은 ‘문자’를 보게 됩니다.
보통은 알파벳으로 쓰여 있는 이런 문자들은 어떤 의미를 가지고 있고,
어떻게 해석해야 될까요?

여기서 잠깐

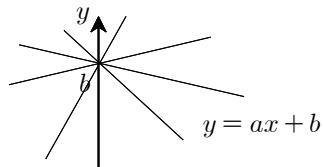
우리가 흔히 보는 ‘이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$ ’는
사실 ‘ $y=f(x)$, $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$)’을 간단히 표현한 것이죠.

이때, x , y 라는 문자를 우리는 ‘**변수**’라고 부르고,
 a , b , c 라는 문자를 우리는 ‘**미정계수**’라고 부르게 됩니다.

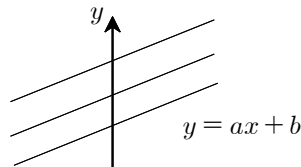
둘 다 ‘변할 수 있는 문자’이기는 하지만 이 둘은 ‘전혀 다른 세계’에 사는
문자들이므로 구분해서 부르기로 합니다.

‘함수’에서
‘변수’가 결정한 큰 틀에서의 그래프의 형태(?)이고,
‘미정계수’가 결정하는 것은 ‘그래프의 모양과 위치 - 즉, 그래프의 개형’입니다.

직선 $y=ax+b$ 가 있습니다. 이 때 a 는 이 ‘직선의 기울기’를 나타내고, b 는 ‘ y 절편’을 나타낸다는 사실을 모두 알고 있습니다.



[그림 1]



[그림 2]

우리가 **[그림 1]의 의미와 [그림 2]의 의미의 차이**를 이해 할 수 있다면 우리는 모두는
‘**중심문자설정**’에 대한 아이디어를 가지고 있는 것입니다.

[그림 1]은 ‘ a 를 중심문자로 설정’하여 b 를 통제시키고 그래프를 관찰해 본 것이고,

[그림 2]는 ‘ b 를 중심문자로 설정’하여 a 를 통제시키고 그래프를 관찰해 본 것입니다.

이처럼 ‘미정계수가 많은 상황’이 제시될수록 우리는 ‘중심문자를 설정하고 상황을 관찰’해 봐야 합니다.

#2. 2018년 수능 이과 20번

출제상인 2017. 11. 가형(76%). 20번. 4점

좌표공간에 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A, B, C 가 있다. 다음 조건을 만족시키는 평면 α 에 대하여 각 점 A, B, C 와 평면 α 사이의 거리 중에서 가장 작은 값을 $d(\alpha)$ 라 하자.

- (가) 평면 α 는 선분 AC 와 만나고, 선분 BC 와도 만난다.
 (나) 평면 α 는 선분 AB 와 만나지 않는다.

위의 조건을 만족시키는 평면 α 중에서 $d(\alpha)$ 가 최대가 되는 평면을 β 라 할 때,
 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

- <보 기>
- ㄱ. 평면 β 는 세 점 A, B, C 를 지나는 평면과 수직이다.
 ㄴ. 평면 β 는 선분 AC 의 중점 또는 선분 BC 의 중점을 지난다.
 ㄷ. 세 점이 $A(2, 3, 0), B(0, 1, 0), C(2, -1, 0)$ 일 때, $d(\beta)$ 는 점 B 와 평면 β 사이의 거리와 같다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

여기서 잠깐

‘중심문자(대상)설정’하는 것은 수학에만 있는 아이디어가 아닙니다.
 과학 실험을 할 때도 ‘조작변인’을 딱 한 개로 설정하고,
 나머지 모든 변인을 통제시켜서 실험을 진행합니다.

수학도 이와 같습니다.

만약 위의 문제를 제대로 맞췄다고 자신한다면 아래 보기도 판단해보세요.

<보 기>

- ㄹ. $\overline{AC} < \overline{BC}$ 일 때, 직선 AC는 평면 β 와 수직이다.
ㅁ. $\overline{AC} = \overline{BC}$ 일 때, 세 점 A, B, C에서 평면 β 까지의 거리는 모두 같다.
ㅂ. 평면 β 는 선분 AC의 중점과 선분 BC의 중점을 모두 지난다.
ㅅ. 직선 AC는 평면 β 와 수직이면 점 B와 평면 β 사이의 거리는 $d(\beta)$ 보다 크다.

초경상인 마지막 관문까지 통과해보세요. (뒤에 해설이 있습니다. ^^)

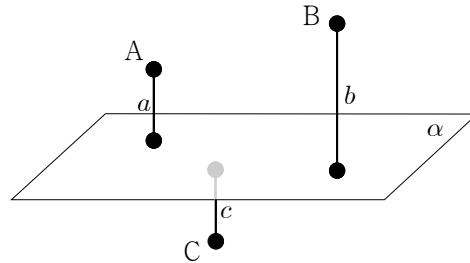
좌표공간에 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A, B, C가 있다. 다음 조건을 만족시키는 평면 α 에 대하여 각 점 A, B, C와 평면 α 사이의 거리 중에서 가장 작은 값을 $d(\alpha)$ 라 하자.

- (가) 평면 α 는 선분 AC와 만나고, 선분 BC와도 만난다.
(나) 평면 α 는 선분 AB와 만나지 않는다.

위의 조건을 만족시키는 평면 α 중에서 $d(\alpha)$ 가 최대가 되는 평면을 β 라 하고,
세 점이 A(0, 0, 2), B(-6, 2, 2), C(0, 2, -2)라고 할 때, $d(\beta)$ 에 대하여
 $10\{d(\beta)\}^2$ 의 값을 구하시오.

#2-1. 상황의 이해

문제에서 제시한 상황을 그림으로 표현해준다면 다음과 같이 표현됩니다.
 편의상 점 A 에서 평면 α 까지의 거리를 a , 점 B 에서 평면 α 까지의 거리를 b ,
 점 C 에서 평면 α 까지의 거리를 c 라고 해보겠습니다.



대략적으로 문제의 상황을 만족하는 한 가지 그림을 표현해 보았습니다.

(문제의 발문) 평면 α 중에서 $d(\alpha)$ 가 최대가 되는 평면을 β

여기서 잠깐

평가원은 여기에서 우리한테 방향을 알려주고 있습니다.
 사실 점의 위치도 고정되어 있지 않고, 평면도 고정되어 있지 않기 때문에
 우리는 '중심대상을 설정'해서 상황을 관찰해야 합니다.
 즉, 한 개의 대상을 제외하고 모두 고정시켜서 상황을 관찰하라는 뜻입니다.

' $d(\alpha)$ '라는 표현은 ' α 에 따른 거리'라는 표현으로
'모든 점을 고정시키고 평면 α 를 중심대상으로 하여 관찰해봐.'
 라는 의도를 담고 있습니다.

#2-2. 논리의 적용

‘논리적으로 사고’한다는 말은 ‘단계적으로 사고’한다는 말과 같은 말입니다.

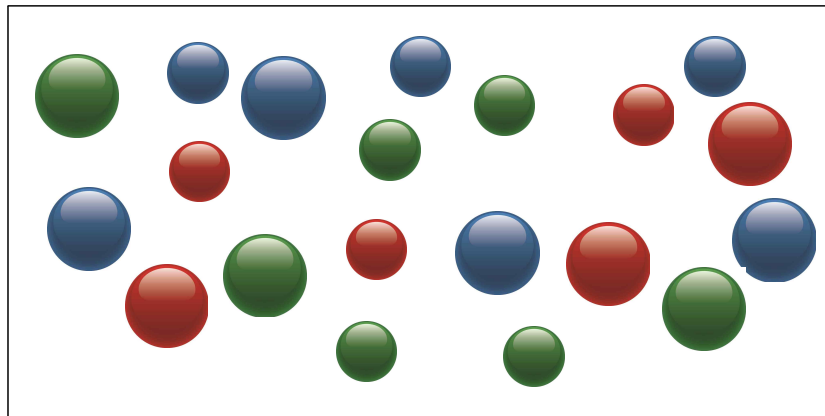
그리고 저는 ‘분할적으로 사고’한다는 말을 즐겨쓰죠.

그리고 이것이 직관과 논증의 가장 큰 차이이기도 합니다.

예컨대 아래 그림과 같이 세 가지 색깔, 두 가지 크기의 공이 있다고 해보죠.

이제 이 공들을 크기와 색깔에 따라서 분류해봅시다.

이때 우리는 ‘두 가지 기준’을 발견하게 되는데 하나는 ‘크기’이고, 또 하나는 ‘색깔’입니다.



이때 우리가 분류하는 사고방식이 수학에서 논리를 적용하는 방식과 흡사합니다.

사고방식 1 (직관)

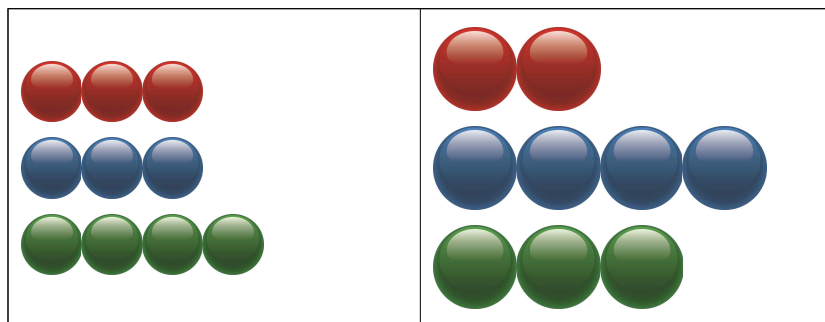
크고 빨강색
작고 빨강색
크고 파랑색
작고 파랑색
크고 초록색
작고 초록색

사고방식 2 (논리)

큰 것
작은 것

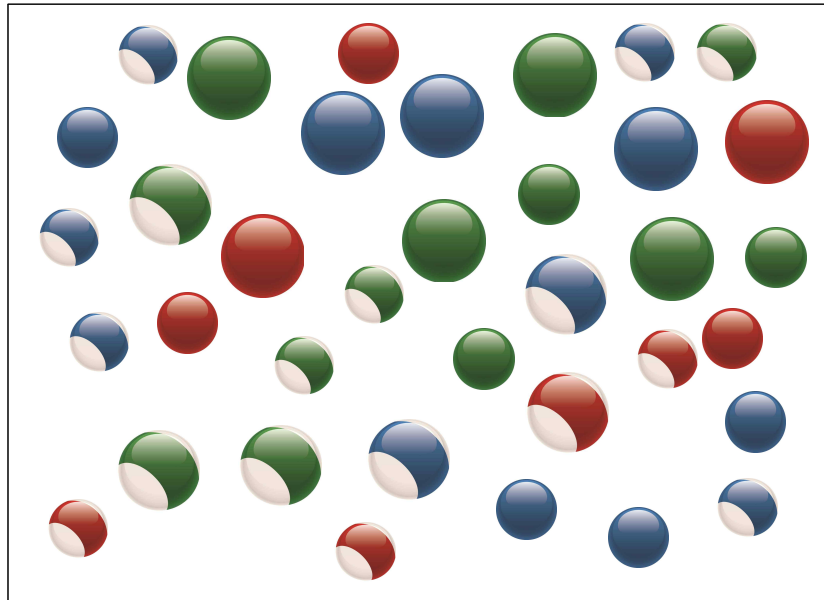


빨강색
파랑색
초록색



이처럼 수학적 논리도 한 번에 모두 적용하는 것이 아니라 ‘하나의 기준을 정해서 적용한 후 결론’을 내고, 그 결론 안에서 다시 ‘새로운 기준을 적용하는 것’입니다. (혹은 그 논리의 결과를 귀납적으로 확장시킵니다.)

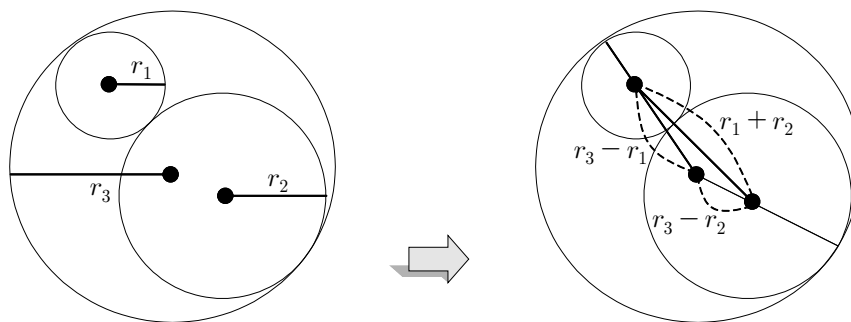
만약 아래와 같이 ‘줄무늬’라는 하나의 기준만 추가되더라도
 논리적으로 사고하지 않으면 고려할 것이 ‘등비수열의 규칙으로 증가’하게 됩니다.



여기서 잠깐

교과서를 보면 ‘두 원의 위치관계’라는 논리가 있습니다.
 그런데 ‘세 원의 위치관계’라는 논리가 따로 있지는 않습니다.
 이유는 세 원이 있다면 ‘두 원의 위치관계’를 세 번 적용하는 것뿐이기 때문이죠.

아래 그림과 같이 반지름이 r_1, r_2, r_3 ($r_1 < r_2 < r_3$)인 세 원의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3 라고 해보겠습니다. 삼각형 $O_1O_2O_3$ 의 길이를 결정하기 위해서는
‘두 원의 위치관계’를 세 번 따지면 됩니다.



다시 문제의 상황으로 돌아와 보겠습니다.

우리는 처음부터 세 선분 AB, BC, CA와 평면 α 의 관계를 동시에 따질 필요가 없습니다.
(앞에서 설명한 세 원의 위치관계를 바라보는 시선과 같은 방식이죠.)

선분 AC와 선분 BC 중에서 길이가 최소인 선분을 '선분 AC'라고 생각하고,
($\overline{AC} = \overline{BC}$ 인 상황이라도 최소가 되는 선분은 '선분 AC'라고 할 수 있습니다.)

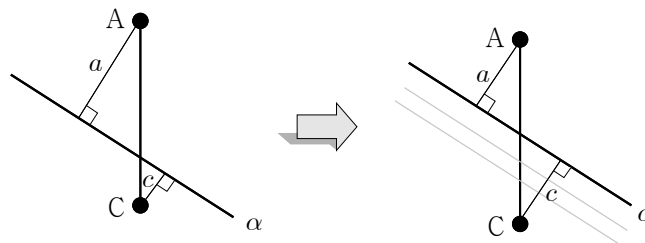
선분 AC와 평면 α 사이의 관계를 따져본 후
그 논리의 결과를 귀납적으로 확장하면 그만입니다.

아래 그림과 같이 평면 α 가 차원이 변하고, (직선으로 보이고)

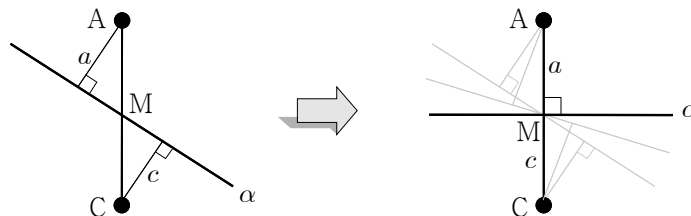
선분 AC가 왜곡되지 않는 위치에서 바라보고,
(지금 보고 있는 종이면 위에 있는 직선이라고 생각)

직선과 평면이 이루는 각을 일정하게 고정하고,
'평면의 위치만 이동시키면서 상황을 관찰'합니다.

그러면 평면 α 가 선분 AB의 중점을 지나는 순간에
점과 평면 사이의 거리의 최솟값은 최대가 된다는 사실을 알 수 있습니다.
(그전까지는 항상 c 가 a 보다 작고, c 의 값이 점과 평면 사이의 거리의 최솟값이 됩니다.
그리고 평면이 선분 AC의 중점을 지나는 순간에 c 가 최대가 됨을 알 수 있습니다.
또한 이 순간에 $a = c$ 라는 사실도 알 수 있습니다.)



이번엔 AC의 중점을 M이라 할 때, M을 지나도록 평면 α 위치를 고정하고 각을 움직여보면
직선 AC와 평면 α 가 수직인 순간에 점과 평면 사이의 거리의 최솟값은 최대가 된다는 사실을
알 수 있습니다.

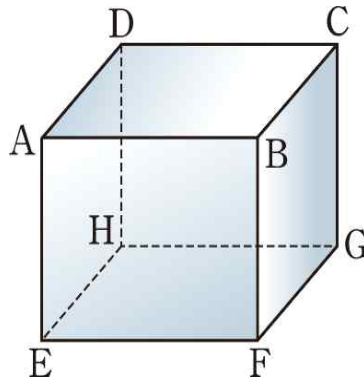


이처럼 두 점에서의 결론을 이제 세 점으로 확장시키면 됩니다. :)

왜곡과 차원에 대하여

우리는 그동안 ‘종이(평면)’에 그려진 ‘평면기하’를 관찰해 왔기 때문에 ‘왜곡현상’과 ‘차원이 변한 물체를 관찰’하는 논리에 익숙하지 않다.

아래 정육면체를 관찰해 보자.



이 물체를 바라보고 있는 현재 위치에서 직선 BC와 평면 BCGF는 왜곡되어 있다.

(현재 위치에서 선분의 길이와 사각형의 넓이가 원래 길이, 원래 면적과 달라 보이기 때문)

이 물체를 정면에서 바라봤을 때 왜곡되지 않은 직선은 $\overline{AB}$, $\overline{BF}$ 등이다.

왜곡되지 않은 평면은 ABFE, DCGH이다.

차원이 변한 직선은 $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ 등이다.

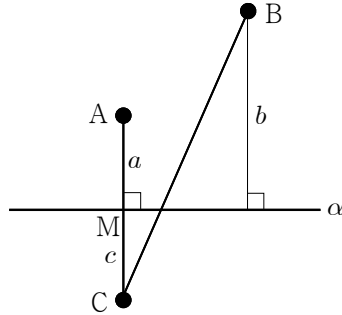
차원이 변한 평면은 BCGF, EFGH 등이다.

#2-3. 논리의 확장

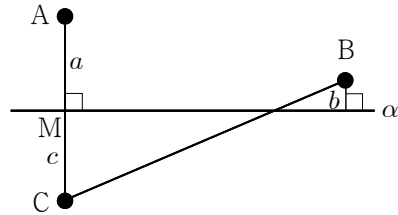
일단 평면이 AC의 중점을 지나면 $a=c$ 이므로 최솟값을 a 라고 지칭하겠습니다.

이제 우리는 점 B의 위치까지 생각하여 결론을 내야 합니다.

점 B의 위치는 크게 두 가지를 생각할 수 있습니다.



[그림 1] $a < b$



[그림 2] $a > b$

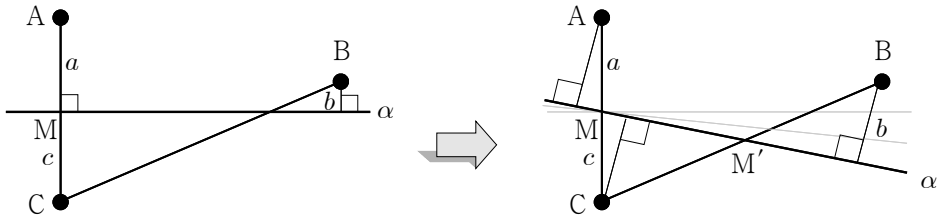
[그림 1]과 같이 b 가 a 보다 큰 경우

평면 β 는 선분 AC를 수직이등분하는 평면으로 결정되게 됩니다.

하지만 [그림 2]와 같이 $\overline{BC} > \overline{AC}$ 라고 하더라도 $a > b$ 인 경우도 있습니다.

[그림 2]의 경우에는 다시 '평면을 움직이며 관찰'해봐야 합니다.

이때 평면을 반드시 점 M을 지나야 하고, 여차피 $a=c$ 이므로 a 와 b 를 비교하며 평면 α 를 움직여보면 됩니다.



위의 그림과 같이 그림 상에서

점과 평면 사이의 거리의 최솟값인 b 가 최대가 되려면 평면 α 를 움직여서

선분 BC의 중점을 지나야 합니다. 이 점을 M' 이라 하면 결국 평면은

M과 M' 을 지나야 하고, 이 때 $a=b=c$ 을 성립하게 됩니다.

즉, [그림 2]의 상황에서는 $a=b=c$ 인 순간에 평면 β 가 결정되는 것입니다.

(만약 평면이 M을 반드시 지나야 한다는 것을 어떻게 아나요? - 한 번 안 지난다고 가정하고 실험해보세요.

그래도 평면은 같은 원리로 M' 을 지난다는 결론을 얻을 수 있고 그림 $b=c$ 이기 때문에

다시 c 와 a 를 비교하면 중점 M을 지나야 한다는 결론을 얻을 수 있죠. ^^)

여기에서 끝난 게 아닙니다.

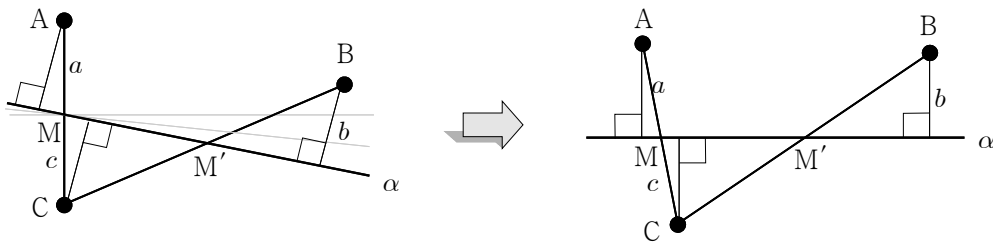
여기서 잠깐

우리가 보통 고난도 문제를 잘 해결하지 못하는 이유는
‘사고체력’이 부족하기 때문입니다.
‘체력’이 부족하다는 말은 ‘길을 보았음에도 끝까지 해내지 못한다.’는 것을 의미하죠.

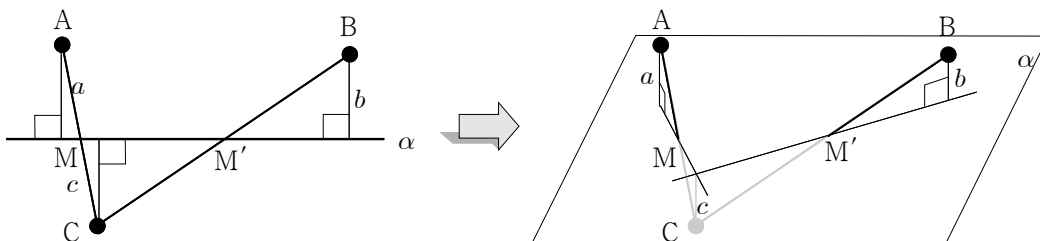
예컨대 문제를 풀기 시작하면서 i) ii) iii)을 고려해야 한다는 사실을
알았지만 ii) 즈음을 진행하다가 계산도 한 두 번 실수하고,
문제도 한, 두 번 착각하고, 그렇게 겨우겨우 ii)의 결론을 얻어내다 보니
우리의 뇌가 문제를 다 풀었다고 착각하는 거죠.

이런 경우는 끝까지 문제를 스스로의 힘으로 해결하려고 노력해야 하고,
펜으로 중간과정을 생략하지 않고, 상세히 써 내려가면서 푸는 습관을 길러야 합니다.

아래와 같이 평면 ABC가 왜곡되지 않고,
평면 α 가 차원이 변한 위치에서 관찰했을 때를 ‘기준’으로 평면 α 를 다시 움직이며
최종결론을 내야 합니다.



아래 그림과 같이 평면을 두 중점 M, M'을 지나도록 하면서
움직여보면 (즉, $a = b = c$ 을 만족) 평면 ABC와 평면 α 가 수직인 순간에
점과 평면 사이의 거리의 최솟값이 최대가 된다는 사실을 알 수 있습니다.



#2-4. 최종결론

이제 한 번 결론을 내보겠습니다.

문제의 조건을 만족하는 평면 β 는 크게 두 가지 케이스가 존재합니다.

첫 번째. 선분 AC와 선분 BC 중 '짧은 직선을 수직이등분'하는 평면

두 번째. 선분 AC와 선분 BC의 중점을 지나면서 평면 ABC와 수직한 평면

두 가지 케이스 모두 평면 β 는 평면 ABC와 수직하게 됩니다.

(첫 번째 경우에서 평면 β 와 평면 ABC가 수직한 이유는 아래 나와 있습니다.)

여기서 잠깐 - 처음 만나는 개념 5 - 기백 발췌

실전정리 9 : 평면과 평면의 수직

9-1. 평면과 평면의 수직조건 : 교선에 내린 수선은 평면과 수직한다.

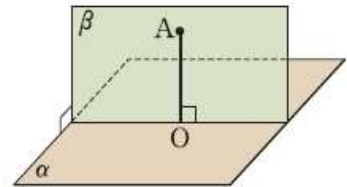
9-2. 수직인 평면 결정하기 : 평면과 수직인 직선을 포함하는 모든 평면

9-1. 평면과 평면의 수직조건 : 교선에 내린 수선은 평면과 수직한다.

<평면 α 에 수직인 평면 β 위의 한 점 A에서 α, β 의 교선에 내린 수선의 발을 O라고 할 때, 선분 AO는 평면 α 에 수직>

: 두 평면 α, β 의 교선을 m 이라 하고, 점 O를 지나고 교선에 수직인 직선을 l 이라고 하면 이면각의 정의에 의하여

$$\overline{AO} \perp m, \overline{AO} \perp l \Leftrightarrow \overline{AO} \perp \alpha$$

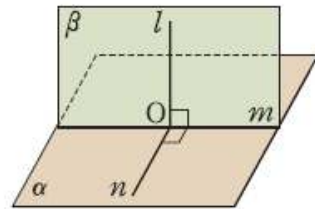


9-2. 수직인 평면 결정하기 : 평면과 수직인 직선을 포함하는 모든 평면

<평면 α 에 수직인 직선 l 을 포함하는 평면 β 는 α 에 수직>

: 두 평면 α, β 의 교선을 m 이라 하고, 직선 l 과 평면 α 의 교점을 O라고 하자. 평면 α 위에 점 O를 지나고 직선 m 에 수직인 직선 n 을 그으면 $l \perp m, m \perp n$

따라서 두 평면 α, β 의 이면각의 크기는 두 직선 l, n 이 이루는 각의 크기와 같다. 이때 $l \perp \alpha$ 이고 직선 n 은 평면 α 에 포함되므로 $l \perp n \Leftrightarrow \alpha \perp \beta$



#3. 마무리

다시 문제로 돌아와 보겠습니다.

초력상인 2017. 11. 가형(76%). 20번. 4점

좌표공간에 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A, B, C가 있다. 다음 조건을 만족시키는 평면 α 에 대하여 각 점 A, B, C와 평면 α 사이의 거리 중에서 가장 작은 값을 $d(\alpha)$ 라 하자.

- (가) 평면 α 는 선분 AC와 만나고, 선분 BC와도 만난다.
 (나) 평면 α 는 선분 AB와 만나지 않는다.

위의 조건을 만족시키는 평면 α 중에서 $d(\alpha)$ 가 최대가 되는 평면을 β 라 할 때,
 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

- <보 기>
- ㄱ. 평면 β 는 세 점 A, B, C를 지나는 평면과 수직이다.
 ㄴ. 평면 β 는 선분 AC의 중점 또는 선분 BC의 중점을 지난다.
 ㄷ. 세 점이 A(2, 3, 0), B(0, 1, 0), C(2, -1, 0)일 때, $d(\beta)$ 는 점 B와 평면 β 사이의 거리와 같다.

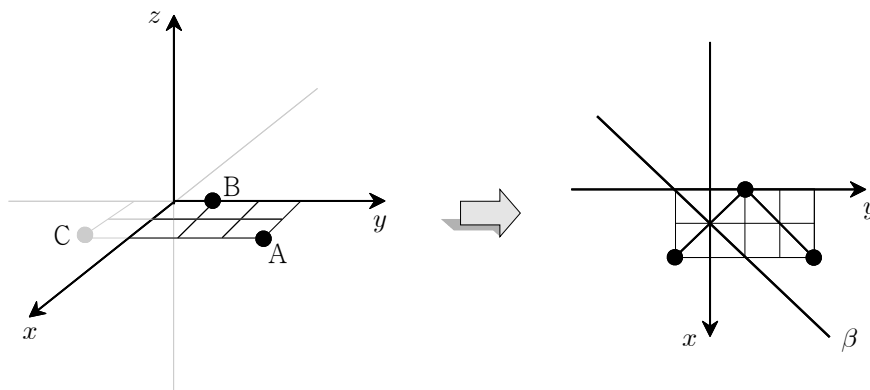
- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ과 ㄴ은 당연히 옳은 상황입니다.

ㄷ은 평가원에서 문제를 쉽게 내려고 의도한 것 같습니다.

이유는 A(2, 3, 0), B(0, 1, 0), C(2, -1, 0) 모두 xy 평면에 존재하기 때문입니다.

어차피 평면 ABC와 평면 β 는 수직한다는 결론을 얻었는데
 (시험장에서 판단이 안 되었어도 보통 ㄱ을 맞다고 하고 넘어갈 가능성이 크죠 ㅎㅎ)
 평면 ABC가 xy 평면이고, 그와 수직한 평면은
 ‘ xy 평면이 왜곡되지 않는 위치에서 봤을 때, 직선으로 보이기 때문이죠.’



ㄷ은 짧은 선분인 BC를 수직이등분하면 평면일 때 정확히 A까지의 거리도 같습니다.
 즉, 첫 번째 결론과 두 번째 결론을 모두 만족하는 상황입니다. ㄷ은 더 구체적으로 말하면

$$\begin{aligned} d(\beta) &= \text{점 A와 평면 } \beta \text{ 사이의 거리} = \text{점 B와 평면 } \beta \text{ 사이의 거리} \\ &= \text{점 C와 평면 } \beta \text{ 사이의 거리} = \sqrt{2} \text{ 입니다.} \end{aligned}$$

이제 추가 보기도 해결해보죠.

<보 기>

- ㄹ. $\overline{AC} < \overline{BC}$ 일 때, 직선 AC는 평면 β 와 수직이다.
- ㅁ. $\overline{AC} = \overline{BC}$ 일 때, 세 점 A, B, C에서 평면 β 까지의 거리는 모두 같다.
- ㅂ. 평면 β 는 선분 AC의 중점과 선분 BC의 중점을 모두 지난다.
- ㅅ. 직선 AC는 평면 β 와 수직이면 점 B와 평면 β 사이의 거리는 $d(\beta)$ 보다 크다.

- ㄹ. $\overline{AC} < \overline{BC}$ 일 때, 직선 AC는 평면 β 와 수직이다.
 - 앞서서와 같이 논리적 사고를 통해 결론을 냈다면 ‘두 번째 결론’이 반례가 된다는 사실을 알 수 있습니다. 즉, 거짓입니다.
- ㅁ. $\overline{AC} = \overline{BC}$ 일 때, 세 점 A, B, C에서 평면 β 까지의 거리는 모두 같다.
 - 이 경우 평면 β 는 선분 AC와 선분 BC의 중점을 모두 지나야 하므로 참입니다.
- ㅂ. 평면 β 는 선분 AC의 중점과 선분 BC의 중점을 모두 지난다.
 - 이것은 당연히 거짓이겠지요? 두 선분 중 짧은 선분의 중점만 지날 수도 있습니다. 그리고 이 경우에는 당연히 짧은 선분을 수직이등분합니다.
- ㅅ. 직선 AC는 평면 β 와 수직이면 점 B와 평면 β 사이의 거리는 $d(\beta)$ 보다 크다.
 - 같은 경우도 있습니다. ‘크다.’가 아니고 ‘크거나 같다.’ 또는 ‘작지 않다.’ 라고 표현해야 합니다. 즉, 거짓입니다.

최정살인 이제 이 문제를 풀어보죠.

좌표공간에 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A, B, C가 있다. 다음 조건을 만족시키는 평면 α 에 대하여 각 점 A, B, C와 평면 α 사이의 거리 중에서 가장 작은 값을 $d(\alpha)$ 라 하자.

- (가) 평면 α 는 선분 AC와 만나고, 선분 BC와도 만난다.
 (나) 평면 α 는 선분 AB와 만나지 않는다.

위의 조건을 만족시키는 평면 α 중에서 $d(\alpha)$ 가 최대가 되는 평면을 β 라 하고, 세 점이 A(0, 0, 2), B(-6, 2, 2), C(0, 2, -2)라고 할 때, $d(\beta)$ 에 대하여

$10\{d(\beta)\}^2 = \frac{q}{p}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)

1단계 : $\overline{AC} = \sqrt{20}$, $\overline{BC} = \sqrt{52}$ 이므로 $\overline{AC} < \overline{BC}$ 입니다.

2단계 : 즉, 먼저 선분 AC를 수직이등분하는 평면을 γ 라 하고, 평면 γ 의 방정식을 구해볼게요.
 $\overrightarrow{AC} = (0, 2, -4)$ 이므로 평면 γ 의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면 $\vec{n} = (0, 1, -2)$ 라고 할 수 있습니다.
 선분 AC의 중점을 M이라 하면 M(0, 1, 0)이므로 평면 γ 의 방정식은

$$y - 2z - 1 = 0$$

입니다. 그리고 평면 γ 와 점 B(-6, 2, 2) 사이의 거리를 구해보면 $\frac{3}{\sqrt{5}}$ 이고,

평면 γ 와 점 A(0, 0, 2) 사이의 거리를 구해보면 $\frac{5}{\sqrt{5}}$ 이므로

앞의 첫 번째 결론에 해당되지 않겠지요? :)

3단계 : 선분 AC의 중점을 M, 선분 BC의 중점을 M'이라고 하면
 결국 우리는 평면 ABC와 수직이고, 두 점 M, M'을 지나는 평면의 방정식을 구하면 됩니다.

평면 ABC는 A(0, 0, 2), B(-6, 2, 2), C(0, 2, -2)을 지나는 평면이므로
 평면의 방정식의 일반형인 $ax + by + cz + d = 0$ 에 대입하면 쉽게 구할 수가 있습니다.
 (외적 같은 거 안 쓰셔도 돼요. ^^)

즉, 세 식 $2c + d = 0$, $-6a + 2b + 2c + d = 0$, $2b - 2c + d = 0$ 을 연립하면

$d = -2c$, $b = 2c$, $a = \frac{2}{3}c$ 이므로 평면 ABC의 법선벡터 $\vec{m}$ 라 하면 $\vec{m} = (2, 6, 3)$ 이라고

할 수 있습니다.

이제 두 점 M(0, 1, 0), M'(-3, 2, 0)을 지나고 법선벡터가 $\vec{m} = (2, 6, 3)$ 와 수직인
 평면의 방정식을 구해보겠습니다. 이 평면을 문제에서 β 라고 했으니까 평면 β 의 방정식을
 구하게 되는 것이죠. :)

평면 β 의 방정식을 $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ 이라고 하면

$$2a' + 6b' + 3c' = 0, \quad b' + d' = 0, \quad -3a' + 2b' + d' = 0$$

이 세 식을 연립하면 $d' = -b$, $a' = \frac{1}{3}b'$, $c' = -\frac{20}{9}b'$ 이므로

$$\beta : 3x + 9y - 10z - 9$$

입니다.

이제 점과 평면사이의 거리 공식을 써보면

$$d(\beta) = \frac{29}{\sqrt{190}}$$

입니다. 우리가 처음 결론을 냈던 것과 같이 점 A, B, C 중 어느 점을 선정하여 공식을 적용하더라도 똑같은 결과가 나오죠. :)

$$10\{d(\beta)\}^2 = 10 \times \frac{841}{190} = \frac{841}{19}$$

정답은 860입니다.

제가 가진 수학교육에 대한
특별한 신념이
여러분에게 전달되기를 바랍니다.
10년은 더 노력할 생각입니다.
최고의 콘텐츠를 만들겠습니다.
감사합니다.

- 미천한 수학자 -

‘명이완정’

중심문자(대상)설정

특이함에서 특별함으로

미친한 수학자