

안녕하세요. 미천한 수학자입니다.

순수 개념만 150페이지에 달하는 기하와 벡터를 시작합니다.

(전체 책은 400페이지 정도 됩니다.)

모든 개념은 하나의 큰 흐름으로 연결될 것이고,

모든 기출문제는 ‘개념’으로 풀릴 것입니다.

‘기하의 아이디어’는 몇 가지 안에서

끊임없이 반복됩니다.

처음만난개념 기하와 벡터는 개념만 150 페이지입니다.

‘교과 외 소재는 거의 제외’했습니다.

5%는 ‘논리’ 설명을 위해 남겨둔 것이 있습니다.

모든 논리는 ‘오랜 연구’입니다.

모든 논리와 설명에는 ‘명분’이 녹아 있습니다.

(5월 말 ~ 6월에 암기노트도 제공됩니다.)

중등기하 총 정리에는

모든 기출문제에 나온 모든 도형을 짝 다 추렸습니다.

고3 뿐만 아니라 고1, 고2, 고3 평가원, 교육청 모의고사

+ 사관, 경찰대까지

모든 기하를 뽑았습니다.

평면기하의 논리 - 중1 ~ 중3의 모든 논리를 담았습니다.

(쓰이지 않는 지엽적인 공식은 배제했습니다.)

다음은 공간에서 직선의 방정식입니다.

직선의 방정식은 항상

‘방향벡터’

와

‘매개변수 좌표’

로 풀어갑니다.

즉, 어떤 식으로 직선의 정보가 제공되어 있든

이 두 가지 정보를 빠르게 캐치하고

이 정보를 통해 상황을 해석해 나가는 것이 중요합니다.

#2. 직선의 방정식

#2-1. 직선의 방정식

좌표공간에서 한 점 A를 지나고 영벡터가 아닌 공간벡터 $\vec{u}$ 에 평행인 직선 l 의 방정식을 벡터를 이용하여 나타낼 때, $\vec{u}$ 를 직선 l 의 **방향벡터**라 하고, **‘벡터를 이용해서 표현된 방정식’**을 **‘직선의 벡터방정식’**이라고 한다.

또한 이 벡터방정식을 ‘성분’을 이용하여 연산하면 벡터가 사라지게 되는데 이것을 (벡터라는 말을 빼고) **‘직선의 방정식’**이라고 한다.

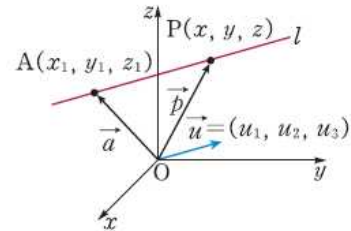
오른쪽 그림과 같이 직선 l 위의 임의의 점을 P라고 하면

$$\overrightarrow{AP} // \vec{u} \text{이므로 } \overrightarrow{AP} = t\vec{u}$$

를 만족하는 실수 t 가 존재한다.

여기서 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$ 라고

하면 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ 이므로 $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$ ①



좌표평면에서 점 $A(x_1, y_1, z_1)$ 을 지나고 벡터 $\vec{u} = (a, b, c)$ 에 평행인 직선 l 위의 점을 $P(x, y, z)$ 라고 하면 $\vec{p} = (x, y, z)$, $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ 이므로 ①은

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c) = (at + x_1, bt + y_1, ct + z_1)$$

이다. 이때, 두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여
$$\begin{cases} x = at + x_1 \\ y = bt + y_1 \\ z = ct + z_1 \end{cases} \quad (\text{단, } t \text{는 실수}) \quad \dots\dots ②$$

이다. 즉, ②는 점 $A(x_1, y_1, z_1)$ 을 지나고 벡터 $\vec{u} = (a, b, c)$ 에 평행인 직선의 방정식을 매개변수 t 로 나타낸 표현이다. (이것을 앞으로 **매개변수 좌표**라고 하겠다.)

여기서 $abc \neq 0$ 일 때, ②에서 t 를 소거하면 $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$ 을 얻는다.

방향비가 0인 경우

한편, ②에서 $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ 이면 직선의 방정식은 $x = x_1$, $\frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$ 이고,

$a = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$ 이면 직선의 방정식은 $x = x_1$, $y = y_1$ 이다.

직선의 방정식의 기본형 1

점 $A(x_1, y_1, z_1)$ 을 지나고 벡터 $\vec{u} = (a, b, c)$ 에 평행인 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \quad (\text{단, } abc \neq 0)$$

⇒ 주어진 직선의 방정식에서 **방향벡터를 알아내기 위해서는** 위와 같이 식의 구조를 맞춰줘야 한다. 즉, **x, y, z 앞의 계수를 1로 맞춘 후 분모를 읽어준다.**

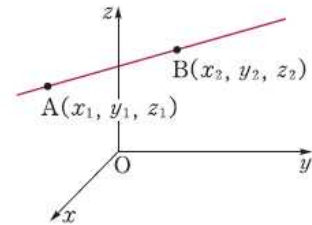
$$\frac{-x+1}{2} = \frac{2y+1}{3} = -z \text{ 는 } \frac{x-1}{-2} = \frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{z}{-1} \text{ 이므로 방향벡터는 } \left(-2, \frac{3}{2}, -1\right)$$

직선의 방정식의 기본형 2

$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad (\text{단, } x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2, z_1 \neq z_2)$$

⇒ 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은
 방향벡터가 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ 이고,
 점 $A(x_1, y_1, z_1)$ 을 지나는 직선의 방정식이다.



#2-2. 방향벡터와 매개변수 좌표

결국 직선의 방정식은 ‘방향벡터’와 ‘매개변수 좌표’로 쓴다.

주어진 상황에서 ‘방향벡터’와 ‘매개변수 좌표’를 빨리 찾아내는 것이 핵심이다.

예시01) 점 $A(3, 2, 1)$ 을 지나고 벡터 $\vec{u} = (2, 1, -2)$ 에 평행인 직선

예시02) 점 $A(0, -2, 1)$ 을 지나고 벡터 $\vec{u} = (2, 1, 3)$ 에 평행인 직선

예시03) 두 점 $A(3, 2, 1)$, $B(-1, 3, 2)$ 를 지나는 직선

예시04) 직선의 방정식 $\frac{x-1}{2} = \frac{2y+1}{3} = -z$

예시05) 직선 위의 임의의 점이 $P(1-2t, t+3, -3t-3)$ 인 경우

예시06) 점 $A(3, 2, 1)$ 을 지나고 벡터 $\vec{u} = (2, 1, 0)$ 에 평행인 직선

예시07) 점 $A(0, -2, 1)$ 을 지나고 벡터 $\vec{u} = (0, 1, 0)$ 에 평행인 직선

예시08) 두 점 $A(3, 2, 1)$, $B(3, 3, 2)$ 를 지나는 직선

예시09) 두 점 $A(3, 2, 2)$, $B(3, 3, 2)$ 를 지나는 직선

예시10) 직선의 방정식 $\frac{x-1}{2} = \frac{2y+1}{3}$, $z = 1$

예시11) 직선의 방정식 $\frac{x+1}{2} = \frac{z-2}{3}$, $y = -1$

예시12) 직선의 방정식 $\frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{3}$, $x = 2$

예시13) 직선의 방정식 $x = -2$, $z = 1$

예시14) 직선의 방정식 $x = 1$, $y = 2$

예시15) 직선의 방정식 $y = 3$, $z = 1$

예시16) 직선 위의 임의의 점이 $P(1-2t, t+3, -3)$ 인 경우

예시17) 직선 위의 임의의 점이 $P(1-t, 2, t-3)$ 인 경우

예시18) 직선 위의 임의의 점이 $P(1, t+3, t-3)$ 인 경우

예시19) 직선 위의 임의의 점이 $P(1, t, -3)$ 인 경우

예시20) 직선 위의 임의의 점이 $P(t, 2, -3)$ 인 경우

Part 7. 공간도형의 방정식

예시21) 직선 위의 임의의 점이 $P(1, 3, t)$ 인 경우

예시22) 점 $A(3, 2, 1)$ 을 지나고 x 축에 평행한 직선

예시23) 점 $A(-1, 2, 1)$ 을 지나고 y 축에 평행한 직선

예시24) 점 $A(3, 2, 1)$ 을 지나고 z 축에 평행한 직선

예시25) 점 $A(0, -2, 1)$ 을 지나고 xy 평면에 평행한 직선 (미정계수 1개로 표현)

예시26) 점 $A(2, 3, 1)$ 을 지나고 yz 평면에 평행한 직선 (미정계수 1개로 표현)

예시27) 점 $A(3, 1, 2)$ 을 지나고 zx 평면에 평행한 직선 (미정계수 1개로 표현)

예시28) 점 $A(3, 1, 2)$ 을 지나고 두 벡터 $\vec{a} = (1, 1, 2)$, $\vec{b} = (1, 2, 3)$ 에 수직인 벡터

예시29) 직선 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = -z$ 의 xy 평면 위로의 정사영

예시30) 직선 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = -z$ 의 zx 평면 위로의 정사영

예시31) 직선 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = -z$ 의 yz 평면 위로의 정사영

예시32) 직선 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3}$, $z = 1$ 의 yz 평면 위로의 정사영

Part 7. 공간도형의 방정식

정답표

예시01) 방향벡터	$\vec{u} = (2, 1, -2)$, 매개변수 좌표 $P(2t+3, t+1, -2t+1)$
예시02) 방향벡터	$\vec{u} = (2, 1, 3)$, 매개변수 좌표 $P(2t, t-2, 3t+1)$
예시03) 방향벡터	$\vec{u} = (-4, 1, 1)$, 매개변수 좌표 $P(-4t+3, t+2, t+1)$
예시04) 방향벡터	$\vec{u} = (4, 3, -2)$, 매개변수 좌표 $P(4t+3, 3t+1, -2t-1)$
예시05) 방향벡터	$\vec{u} = (-2, 1, -3)$, 매개변수 좌표 $P(1-2t, t+3, -3t-3)$
예시06) 방향벡터	$\vec{u} = (2, 1, 0)$, 매개변수 좌표 $P(2t+3, t+2, 1)$
예시07) 방향벡터	$\vec{u} = (0, 1, 0)$, 매개변수 좌표 $P(0, t, 1)$
예시08) 방향벡터	$\vec{u} = (0, 1, 1)$, 매개변수 좌표 $P(3, t+2, t+1)$
예시09) 방향벡터	$\vec{u} = (0, 1, 0)$, 매개변수 좌표 $P(3, t, 2)$
예시10) 방향벡터	$\vec{u} = (4, 3, 0)$, 매개변수 좌표 $P(4t+3, 3t+1, 1)$
예시11) 방향벡터	$\vec{u} = (2, 0, 3)$, 매개변수 좌표 $P(2t+1, -1, 3t+5)$
예시12) 방향벡터	$\vec{u} = (0, 2, 3)$, 매개변수 좌표 $P(2, 2t+3, 3t+2)$
예시13) 방향벡터	$\vec{u} = (0, 1, 0)$, 매개변수 좌표 $P(-2, t, 1)$
예시14) 방향벡터	$\vec{u} = (0, 0, 1)$, 매개변수 좌표 $P(1, 2, t)$
예시15) 방향벡터	$\vec{u} = (1, 0, 0)$, 매개변수 좌표 $P(t, 3, 1)$
예시16) 방향벡터	$\vec{u} = (-2, 1, -3)$, 매개변수 좌표 $P(1-2t, t+3, -3)$
예시17) 방향벡터	$\vec{u} = (-1, 0, 1)$, 매개변수 좌표 $P(1-t, 2, t-3)$
예시18) 방향벡터	$\vec{u} = (0, 1, 1)$, 매개변수 좌표 $P(1, t+3, t-3)$
예시19) 방향벡터	$\vec{u} = (0, 1, 0)$, 매개변수 좌표 $P(1, t, -3)$
예시20) 방향벡터	$\vec{u} = (1, 0, 0)$, 매개변수 좌표 $P(t, 2, -3)$
예시21) 방향벡터	$\vec{u} = (0, 0, 1)$, 매개변수 좌표 $P(1, 3, t)$
예시22) 방향벡터	$\vec{u} = (1, 0, 0)$, 매개변수 좌표 $P(t+3, 2, 1)$
예시23) 방향벡터	$\vec{u} = (0, 1, 0)$, 매개변수 좌표 $P(-1, t, 1)$
예시24) 방향벡터	$\vec{u} = (0, 0, 1)$, 매개변수 좌표 $P(3, 2, t)$
예시25) 방향벡터	$\vec{u} = (a, 1, 0)$, 매개변수 좌표 $P(at, t-2, 1)$
예시26) 방향벡터	$\vec{u} = (0, a, 1)$, 매개변수 좌표 $P(2, at+3, t+1)$
예시27) 방향벡터	$\vec{u} = (a, 0, 1)$, 매개변수 좌표 $P(at+3, 1, t+2)$
예시28) 방향벡터	$\vec{u} = (1, 1, -1)$, 매개변수 좌표 $P(t+3, t+1, -t+2)$
예시29) 방향벡터	$\vec{u} = (2, 3, 0)$, 매개변수 좌표 $P(2t+1, 3t-1, 0)$
예시30) 방향벡터	$\vec{u} = (2, 0, -1)$, 매개변수 좌표 $P(2t+1, 0, -t)$
예시31) 방향벡터	$\vec{u} = (0, 3, -1)$, 매개변수 좌표 $P(0, 3t-1, -t)$
예시32) 방향벡터	$\vec{u} = (0, 1, 0)$, 매개변수 좌표 $P(0, t, 1)$

#2-3. 수선의 발

1) 수선의 발, 대칭점, 최단거리, 수선의 방정식

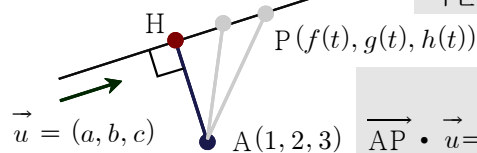
수선의 발

직선 $l : \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$ 과 $A(1, 2, 3)$ 에 대하여 $A(1, 2, 3)$ 에서

직선 l 에 내린 수선의 발을 H 라 하자. 수선의 발 H 만 구하면

- $A(1, 2, 3)$ 와 직선 l 에 대한 대칭점.
- $A(1, 2, 3)$ 와 직선 l 위의 움직이는 점 P 의 거리의 최솟값.
- 점 $A(1, 2, 3)$ 를 지나고, 직선 l 과 직교(수직으로 만남)하는 직선의 방정식을 모두 구할 수 있다.

$$l : \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$



1단계

직선을 매개변수 좌표로 표현

2단계

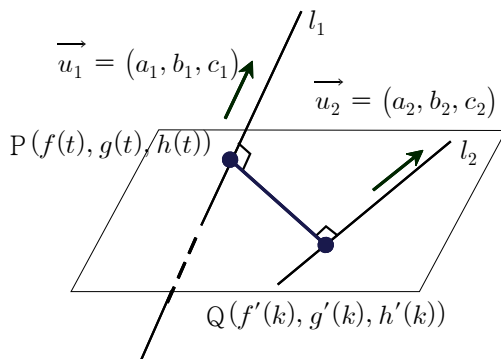
$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = 0$ 을 만족하는 t 값을 구하고, 이것을 $P(f(t), g(t), h(t))$ 에 대입하면 수선의 발의 좌표가 나온다.

2) 공통수선의 길이, 공통수선의 방정식

교인 위치의 두 직선의 공통수선의 길이, 공통수선의 방정식

직선 $l_1 : \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$ 위의 점 P 와

직선 $l_2 : \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$ 위의 점 Q 에 대하여 $\overline{PQ}$ 의 길이의 최솟값이 두 직선의 공통수선의 길이이고, 이 직선 PQ 의 방정식이 공통수선의 방정식이다.



1단계

각 직선 위의 점을 매개변수 좌표로 표현

2단계

공통수선은 직선 PQ 가 두 직선 l_1, l_2 와 모두 수직일 때이므로 $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u}_1 = 0$ 과 $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u}_2 = 0$ 을 모두 만족하는 t 와 k 를 구해서 $P(f(t), g(t), h(t))$ 와 $Q(f'(k), g'(k), h'(k))$ 에 대입하면 공통 수선의 발을 구할 수 있다.

이해, 훈련을 위해

필요한 내용은 이와 같이

예제를 모두 만들었습니다.

평면의 방정식은

‘법선벡터’

와

‘평면의 방정식 그 자체’

를 이용하여 풀어갑니다.

중요한 것은 평면을 제시하거나 표현하는 방법이

생각보다 많다는 것입니다.

움직이는 평면도 적절한 미정계수를 이용해서

설정할 줄 알아야 합니다.

평면이 제시될 수 있는 모든 상황을 정리했습니다.

#3. 평면의 방정식

#3-1. 평면의 방정식

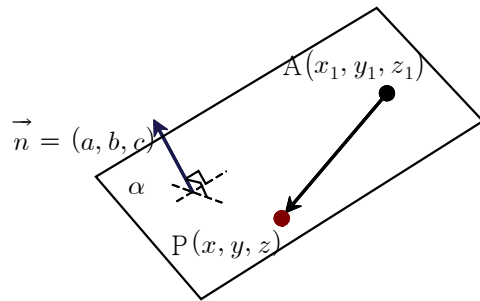
1) 평면의 방정식의 기본형

좌표공간에서 한 점 A를 지나고 영벡터가 아닌 공간벡터 $\vec{n}$ 에 수직인 평면 α 의 방정식을 벡터를 이용하여 나타낼 때, $\vec{n}$ 를 평면 α 의 법선벡터라 하고, '벡터를 이용해서 표현된 방정식'을 '평면의 벡터방정식'이라고 한다.

또한 이 벡터방정식을 '성분'을 이용하여 연산하면 벡터가 사라지게 되는데 이것을 (벡터라는 말을 빼고) '평면의 방정식'이라고 한다.

평면 위를 움직이는 임의의 점을 $P(x, y, z)$ 라
두고 P에 대한 관계식을 세운다.
공간에서는 이 관계식을 만들기 위해서
두 가지가 필요하다.

- ① 성분으로 표현된 평면과 수직인 벡터
 $\Leftrightarrow \vec{n} = (a, b, c)$
- ② 평면 위의 고정된 한 점 $\Leftrightarrow A(x_1, y_1, z_1)$



그림과 같이 평면 α 위의 임의의 점을 P라고 하면 $\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$ 이므로 $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$

여기서 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$ 라고 하면

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0 \quad \dots\dots ①$$

좌표평면에서 점 $A(x_1, y_1, z_1)$ 을 지나고 벡터 $\vec{n} = (a, b, c)$ 에

수직인 평면 α 위의 점을 $P(x, y, z)$ 라고 하면 $\vec{p} = (x, y, z)$, $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ 이므로

$$\vec{p} - \vec{a} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$

이다. 따라서 ①을 성분으로 나타내면

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1) \cdot (a, b, c) = 0$$

$$\text{즉, } a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

평면의 방정식의 기본형

점 $A(x_1, y_1, z_1)$ 을 지나고 벡터 $\vec{n} = (a, b, c)$ 에 수직인 직선의 방정식은

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

Part 7. 공간도형의 방정식

일차방정식과 평면

평면의 방정식 $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$ 을 정리하면

$ax + by + cz - (ax_1 + by_1 + cz_1) = 0$ 이므로 $-ax_1 - by_1 - cz_1 = d$ 로 놓으면 평면의 방정식은

$$ax + by + cz + d = 0$$

와 같이 x, y, z 에 대한 일차방정식으로 나타내어진다. 역으로 x, y, z 에 대한 일차방정식 $ax + by + cz + d = 0$ 은 법선벡터가 $\vec{n} = (a, b, c)$ 인 평면의 방정식이다.

2) 다양한 평면의 방정식

세 절편과 평면

x 절편이 a , y 절편이 b , z 절편이 c 인 평면의 방정식은 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 이다.

이때 이 평면의 법선벡터는 $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ 인데 이것을 삼수선 제3정리를 활용하여 기하학적으로 설명해보자.

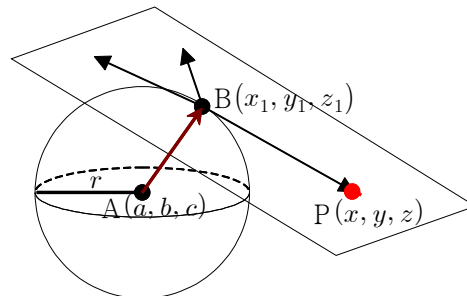
Part 7. 공간도형의 방정식

접평면의 방정식

중심이 $A(a, b, c)$ 이고, 반지름의 길이가 r 인 구 위의 점 $B(x_1, y_1, z_1)$ 에서 접하는 평면 α 는 점 B 를 지나고, $\overrightarrow{AB}$ 가 법선벡터인 평면이다. 즉, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_1 - a, y_1 - b, z_1 - c)$ 가 법선벡터이고, 점 $B(x_1, y_1, z_1)$ 를 지나므로

$$(x_1 - a)(x - x_1) + (y_1 - b)(y - y_1) + (z_1 - c)(z - z_1) = 0$$

이것을 정리하면 $(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) + (z - c)(z_1 - c) = r^2$



$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

이차곡선에서 접점을 알 때 접선의 방정식을 구했던 공식은 여기에서도 그대로 통용된다.

접점이 $A(x_1, y_1, z_1)$ 인 구의 접평면의 방정식은

구에 존재하는 항(좌변)을 우변으로만 바꾸어 주면 쉽게 나올 수 있다.

$x^2 \rightarrow x_1 x$	$y^2 \rightarrow y_1 y$	$z^2 \rightarrow z_1 z$	$x \rightarrow \frac{x + x_1}{2}$	$y \rightarrow \frac{y + y_1}{2}$	$z \rightarrow \frac{z + z_1}{2}$
$(x - a)^2 \rightarrow (x_1 - a)(x - a)$	$(y - b)^2 \rightarrow (y_1 - b)(y - b)$	$(z - c)^2 \rightarrow (z_1 - c)(z - c)$			

예컨대 구 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ 위의 점 $A(x_1, y_1, z_1)$ 에서 접하는 평면의 방정식은

$$x_1 x + y_1 y + z_1 z = r^2$$

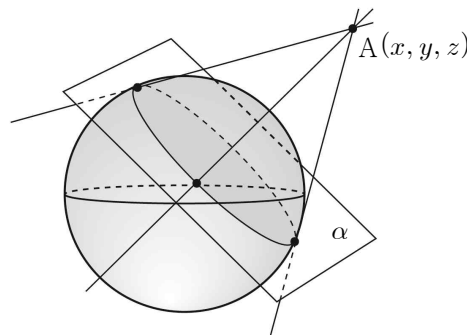
극평면의 방정식

구 $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ 와 구 밖의 한 점 $A(x_1, y_1, z_1)$ 에서 구에 접선을 긋는다.

이때 접점을 연결한 원을 포함하는 평면의 방정식은

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) + (z - c)(z_1 - c) = r^2$$

접선의 방정식과 공식의 구조가 같아 외우기 쉽다.



두 구의 교선을 포함하는 평면의 방정식

두 구 $O_1 : x^2 + y^2 + z^2 + A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$,

$O_2 : x^2 + y^2 + z^2 + A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ 가 교선을 가질 때,

이 교선을 포함하는 평면의 방정식은

$$x^2 + y^2 + z^2 + A_1x + B_1y + C_1z + D_1 - (x^2 + y^2 + z^2 + A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

참고) $x^2 + y^2 + z^2 + A_1x + B_1y + C_1z + D_1 - k(x^2 + y^2 + z^2 + A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ 은

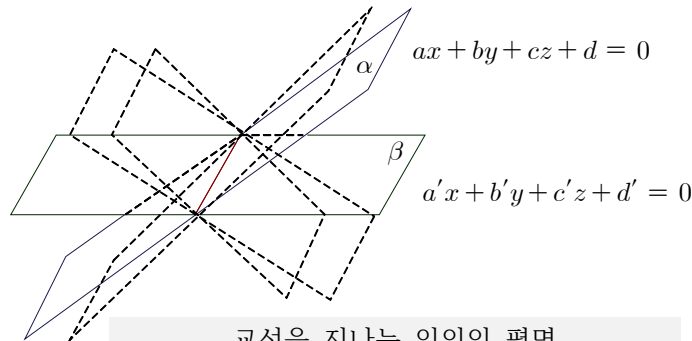
두 구의 교선을 포함한 임의의 구이다. (단, O_2 는 제외)

두 평면의 교선을 포함하는 임의의 평면

두 평면 $\alpha : ax + by + cz + d = 0$, $\beta : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ 가 교선을 가질 때,

이 교선을 포함하는 임의의 평면의 방정식은

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + k(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0 \quad (\text{단, } \beta \text{는 제외})$$



교선을 지나는 임의의 평면
 $(ax + by + cz + d) + k(a'x + b'y + c'z + d') = 0$

한 직선을 포함하는 평면의 방정식

- 공간의 모든 직선은 두 평면의 연립방정식으로 표현된다.

: 예를 들어 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3}, z=1 \iff$ 평면 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3}$ 과 평면 $z=1$ 의 교선이다.

$\frac{x-1}{2} = \frac{2y+1}{3} = -z \iff$ 평면 $\frac{x-1}{2} = \frac{2y+1}{3}$ 과 평면 $\frac{2y+1}{3} = -z$ 의 교선이다.

- 즉, $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$ 을 포함한 임의의 평면을 표현하려면

$$\frac{x-x_1}{a} - \frac{y-y_1}{b} + k\left(\frac{y-y_1}{b} - \frac{z-z_1}{c}\right) = 0 \quad \text{또는} \quad \frac{y-y_1}{b} - \frac{z-z_1}{c} = 0$$

이다.

Part 7. 공간도형의 방정식

참고) 두 평면의 교선의 방정식 : 표현 방식만 바꾼다.

$$\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad \beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

: 사실 두 평면을 위의 같이 병렬적으로 나열하는 것 자체로 하나의 직선을 표현하는 것이다.
공간 위의 모든 직선은 두 평면의 연립방정식으로 표현되기 때문이다. 하지만 저 상태로는
직선의 중요한 내용인 ‘방향벡터’와 ‘매개변수 좌표’를 알아내기가 어렵다.

즉, 다음의 알고리즘으로 식의 형태를 바꾼다.

1단계) 두 식을 가감하여 y 를 소거한 식과 z 를 소거한 식을 준비한다.

2단계) ‘ $x=y$ 에 대한 식’과 ‘ $x=z$ 에 대한 식’으로 표현 한 후 이 식을

$$x=y \text{에 대한 식} = z \text{에 대한 식}$$

으로 표현하면 ‘방향벡터’와 ‘매개변수 좌표’를 찾아내기 쉬운 식이 된다.

2) 평면의 방정식의 핵심 - 법선벡터와 평면의 방정식 그 자체

결국 평면의 방정식은 ‘법선벡터’와 ‘평면의 방정식 그 자체’를 이용하여 푼다.

주어진 상황에서 ‘법선벡터’와 ‘평면의 방정식’을 빨리 찾아내는 것이 핵심이다.

위와 같이 다양한 방식으로 평면을 줄 수 있다. 하지만 평면을 구해내기만 한다면
법선벡터와 매개변수 좌표를 찾는 것은 매우 쉽다.

이후 평면의 방정식과 직선으로 설정될 수 있는

‘모든 경우’

또한 개념으로 정리되어 있습니다.

단지 푸는 법이 아니라

‘그리는 방법’ 등도 모두 개념으로 제시되어 있습니다.

공간도형은

기하를 잘 하지 못하는 학생들에게 참 애매한 단원입니다.

‘무엇을 어디까지 어떻게 논증하는지’

참 애매합니다.

교과서의 모든 내용을

‘실전정리 12가지에 압축’

했습니다.

명확히 외우면 이것으로 모두 논증이 가능합니다.

‘직관’에 대한 이야기도

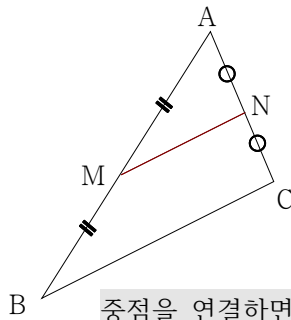
추상적으로 하지 않습니다.

관찰하는 도형도 모두 직접 제작했습니다.

아래는 ‘책의 일부’입니다.

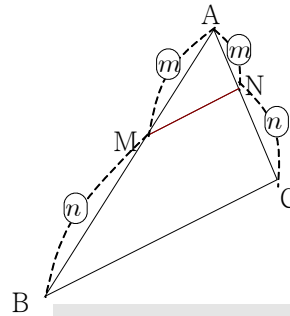
3) 실전정리 1~4

**실전정리 1 : 중점연결정리의 논리
연결하면 평행한다.**



중점을 연결하면
 $\Rightarrow \overline{MN}$ 과 $\overline{BC}$ 는 평행이다.

논리의 확장



$\overline{AB}$ 를 $m:n$ 으로 내분하는 점 M과
 $\overline{AC}$ 를 $m:n$ 으로 내분하는 점 N을
연결하면 $\Rightarrow \overline{MN}$ 과 $\overline{BC}$ 는 평행이다.

**실전정리 2 : 평행사변형의 논리
두쌍평, 두쌍각, 두쌍길, 한쌍평길, 대각반**

- ① 두쌍평 : 두 쌍의 대변이 서로 평행한다.
- ② 두쌍각 : 두 쌍의 대각이 서로 같다.
- ③ 두쌍길 : 두 쌍의 대변의 길이가 서로 같다.
- ④ 한쌍평길 : 한 쌍의 대변이 서로 평행하고, 길이도 같다.
- ⑤ 대각반 : 대각선이 서로 이등분한다.

**실전정리 3 : 평행선 삼단논법
평행하고, 평행하면, 평행한다. / 평행하고, 수직이면, 수직이다.**

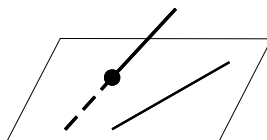
공간 위에 서로 다른 세 직선 l, m, n 에 대하여

- $l//m, m//n \Rightarrow l//n$
- $l//m, m \perp n \Rightarrow l \perp n$

**실전정리 4 : 꼬인 위치 판단법
한 직선을 포함한 평면, 그 평면을 관통하는 직선**

두 직선 l, m 이 서로 꼬인 위치임을 밝히려면

직선 l 을 포함하면서 직선 m 이 관통하는 평면 1개를 찾아내면 된다.



물론 엄밀하게 말하면 관통하는 점이 직선 l 위에 있으면 안 되지만
이 경우 당연히 만난다고 판단이 되므로 생각할 필요가 없다.

Part 6. 공간도형과 공간좌표

관찰 06

실전정리 1,2는 두 직선이 평행한 상황임을 문제에서 제시하는 방식이고, 실전정리 3은 이를 이용하여 두 직선이 평행함을 밝히는 것이다.

예컨대 오른쪽 직육면체 $ABCD-EFGH$ 에서

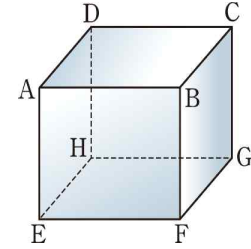
$ABCD$ 가 직사각형이므로 $\overline{CD}$ 와 $\overline{AB}$ 는 평행이고,

$ABEF$ 가 직사각형이므로 $\overline{AB}$ 와 $\overline{EF}$ 는 평행이다. (실전정리 2)

그렇기 때문에 $\overline{CD}$ 와 $\overline{EF}$ 는 서로 평행이다. (실전정리 3)

즉, $\overline{CD}$ 와 $\overline{EF}$ 는 평행하고 길어도 같으므로 사각형 $CDEF$ 는 평행사변형이다.

(물론 직사각형이지만 그것을 밝히려면 수직임도 밝혀야 하는데 이것은 뒤에 나온다.)

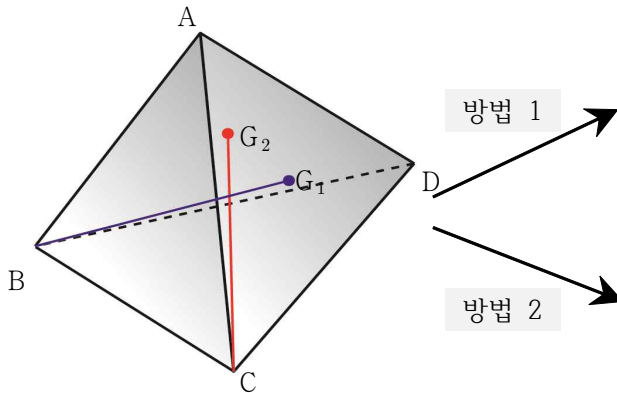


꼬인 위치인 것 같지만 확신이 필요할 때는 실전정리 4를 이용한다.

예를 들어 평면 $ABCD$ 는 직선 AB 를 포함하고, 직선 CG 와 한 점에서 만난다. 이런 경우는 반드시 꼬인 위치가 된다.

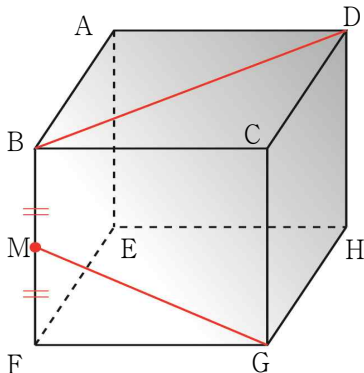
관찰 07

정사면체 $ABCD$ 에서 삼각형 ACD 의 무게중심을 G_1 , 삼각형 ABD 의 무게중심을 G_2 라고 할 때, 두 직선은 만나는가?



관찰 08

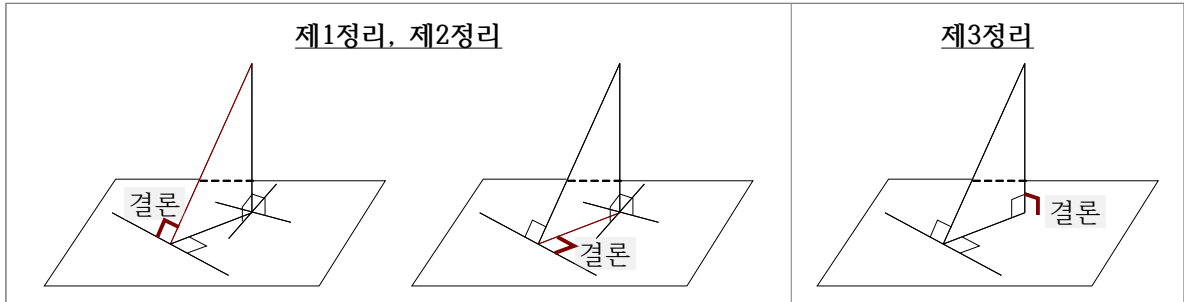
정육면체 $ABCD-EFGH$ 에서 선분 BF 의 중점을 M 이라고 할 때, 직선 BD 와 직선 GM 은 만나는가?



#2. 삼수선 정리와 정사영

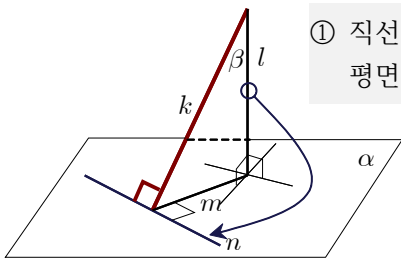
#2-1. 삼수선 정리의 논리

1) 제1, 2정리



2) 증명

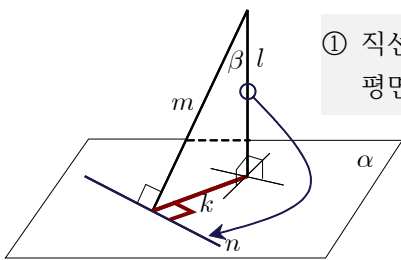
<조건> 직선 l, m, n, k 과 평면 α, β 에 대하여 $m \perp n, l \perp \alpha$



① 직선 l 은 평면 α 와 수직이므로
평면 α 위에 있는 직선 n 과 수직이다.

② 직선 n 은 두 직선(m, l)과 수직이므로
두 직선으로 결정된 평면 β 와 수직이다.
 $\Rightarrow$ 직선 n 은 평면 β 위의 직선 k 과 수직

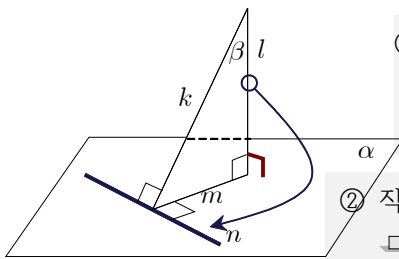
<조건> 직선 l, m, n, k 과 평면 α, β 에 대하여 $m \perp n, l \perp \alpha$



① 직선 l 은 평면 α 와 수직이므로
평면 α 위에 있는 직선 n 과 수직이다.

② 직선 n 은 두 직선(m, l)과 수직이므로
두 직선으로 결정된 평면 β 와 수직이다.
 $\Rightarrow$ 직선 n 은 평면 β 위의 직선 k 과 수직

<조건> 직선 l, m, n, k 과 평면 α, β 에 대하여 $k \perp n, m \perp n, l \perp m$



① 직선 n 은 두 직선(k, m)과 수직이므로
두 직선으로 결정된 평면 β 와 수직이다.
 $\Rightarrow$ 직선 n 은 평면 β 위의 직선 l 과 수직

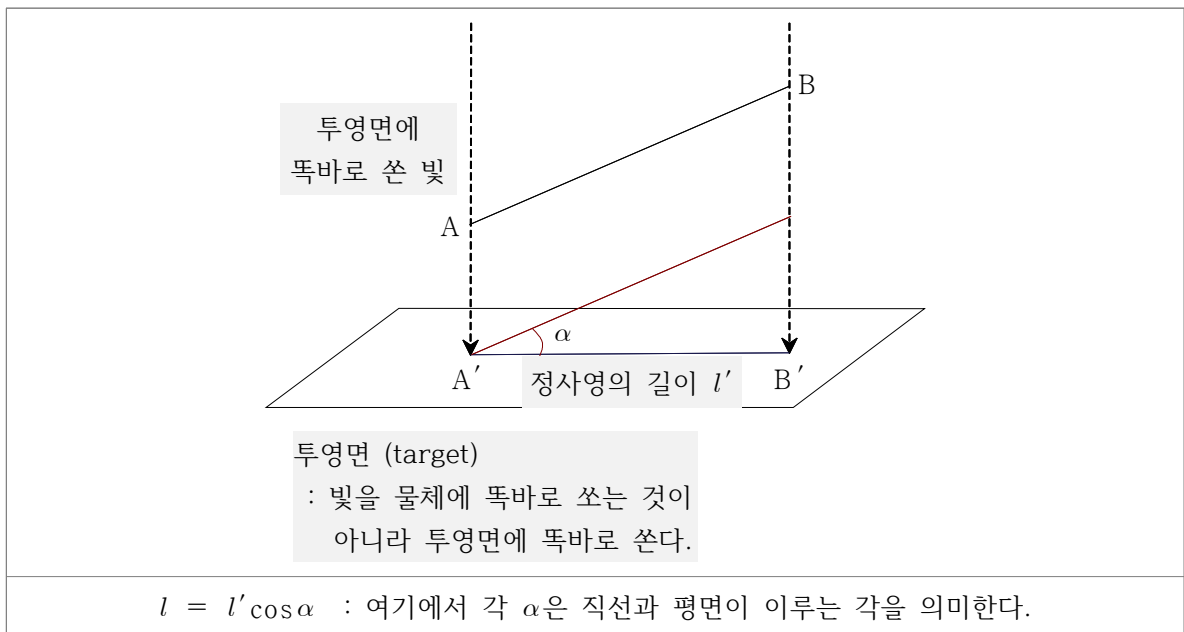
② 직선 l 은 평면 α 위의 평행하지 않은 두 직선 m, n 과 수직
 $\Rightarrow$ 직선 l 은 평면 α 와 수직이다.

#2-3. 정사영

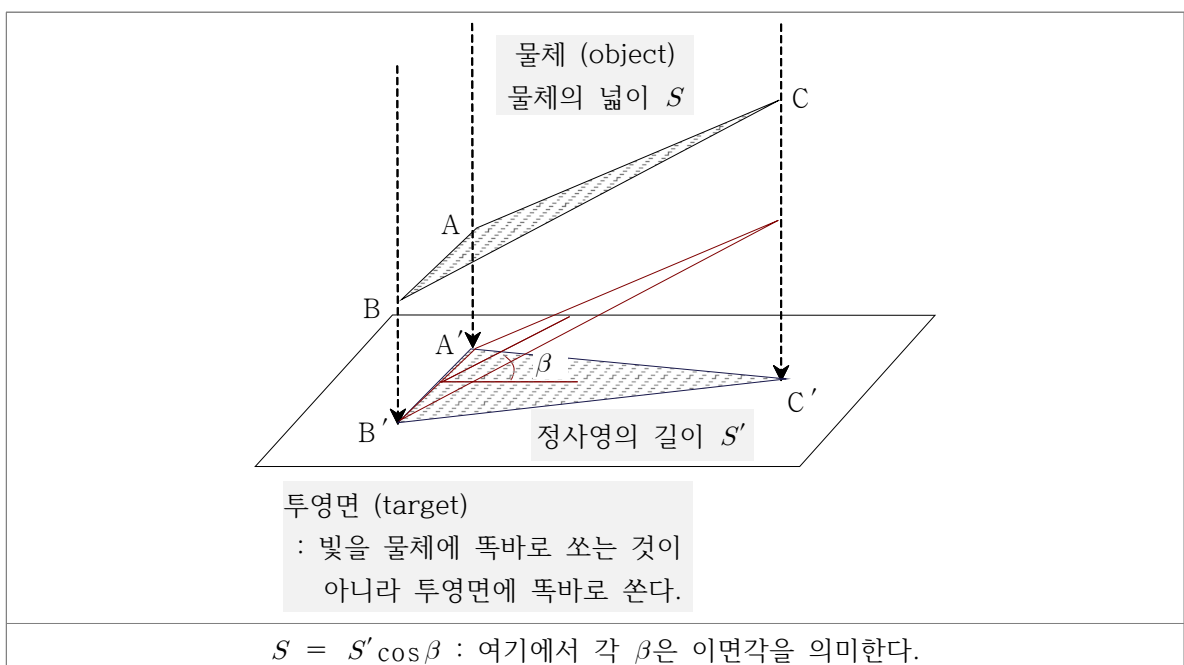
정사영의 기본은 점의 정사영이다.

도형 위의 모든 점에서 투영면에 수선의 발을 내렸을 때, 이 수선의 발의 집합이 바로 정사영이다. 공식 이전에 ‘직관적으로 정사영을 관찰’하는 것이 우선이다.

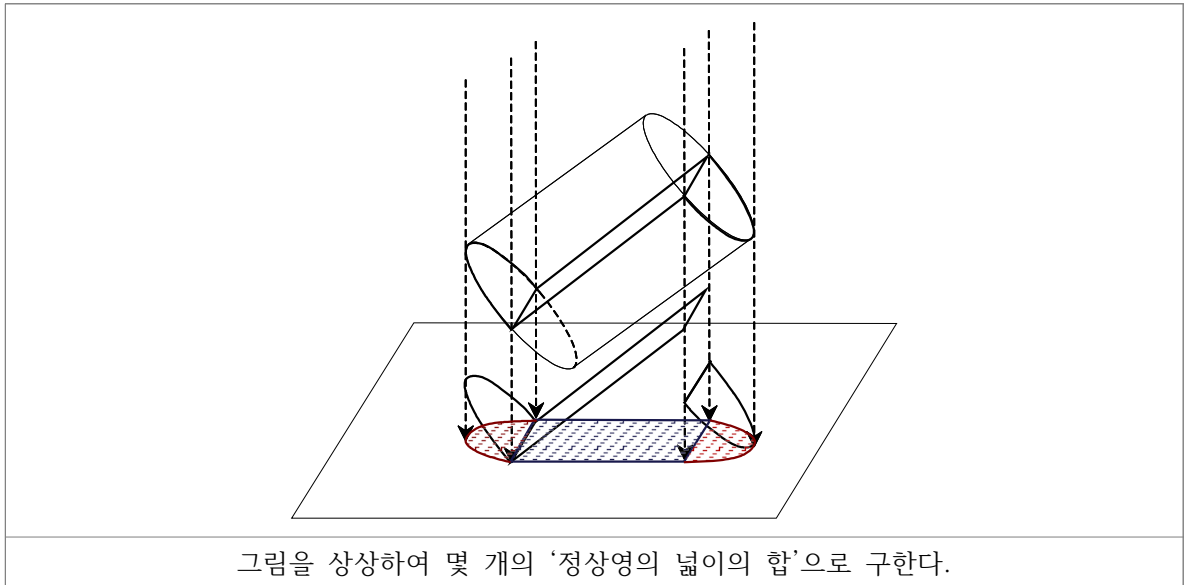
1) 정사영의 길이



2) 정사영의 넓이



3) 입체의 정사영

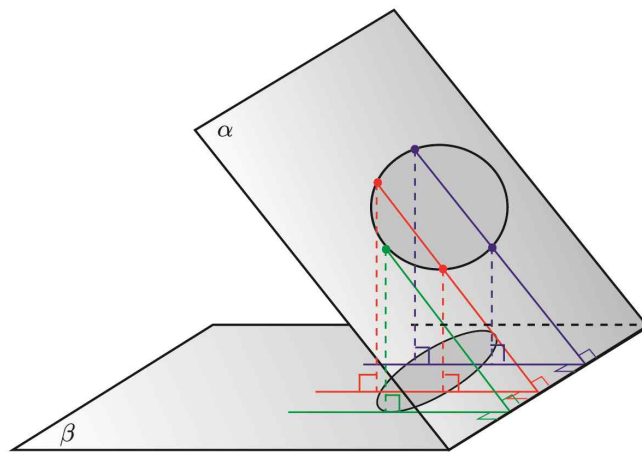


4) 차원이 변한 위치에서 삼각비를 본다.

결국 정사영의 핵심은 교선에 수직한 선분의 (면적을 구성하는 선분 - 면적소)

'모든 길이가 일정한 비율로 줄어든다.'

는 것에 있다. 즉, 구분구적법의 입장에서 생각해본다면 원래 도형의 면적에 이면각을 곱하면 정사영의 면적이 나온다는 것을 이해할 수 있다.



꼭 타겟에 똑바로 쓰지 않더라도 이런 원리는 그대로 적용되기 때문에
'차원이 변한 위치'에서 삼각비를 풀면 그림자의 넓이를 구할 수 있다.

NOTE. 원의 정사영은 타원

원의 정사영은 '교선과 평행한 선분'의 구분구적법으로 한 번 상상하고,

'교선과 수직한 선분'의 구분구적법으로 다시 한 번 상상한다.

그러면 '장축의 길이=원의 지름', '단축의 길이=원의 지름 $\times \cos\theta$ '임을 알 수 있다.

5) 실전정리 10~12

실전정리 10 : 삼수선 정리의 논리

제1,2정리 - 수선, 연결 $\Rightarrow$ 직각

제3정리 - 평면에 수선을 내리고자 한다면 평면 위의 직선에 수선을 내린다.

제1,2정리. 수선, 연결 $\Rightarrow$ 직각

- 삼수선 제1정리와 제2정리는 근본적인 논리가 같다.

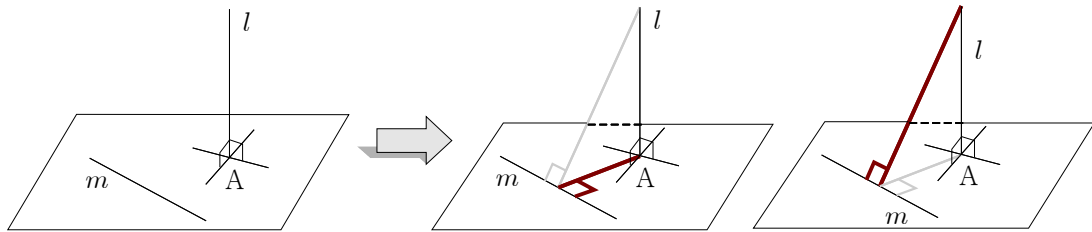
일단 '평면과 수직인 직선 l '과 '평면 위의 직선 m '이 조건으로 제시되어 있어야 한다.

(평면과 직선 l 의 교점을 A 라 하자.)

점 A 든 직선 l 위의 다른 점이든 일단 직선 m 에 수선을 내리고, 연결하면

'연결된 직선과 직선 m 이 수직'일 수밖에 없다는 논리이다.

결론적으로 아래 그림에서 '흐린 직선'도 '굵은 직선'도 모두 내가 그어야 하는 보조선이다.



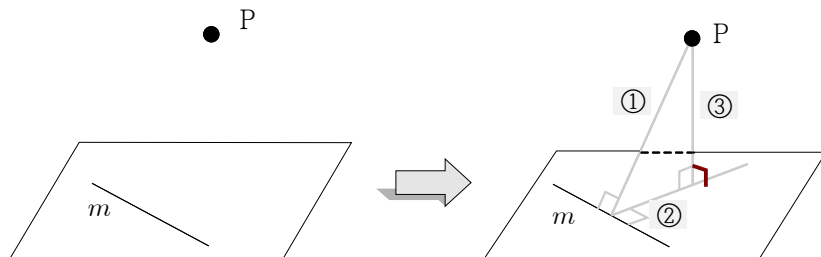
'삼수선 제1,2정리는 평면과 수직인 직선이 주어졌을 때 사용한다.'

제3정리. 평면에 수선을 내리고자 한다면 평면 위의 직선에 수선을 내린다.

- 삼수선 제3정리는 논리가 완전히 다르다.

일단 '평면 위의 직선 m '과 '평면 위에 있지 않은 한 점 P '가 조건으로 제시되어 있어야 한다. 그리고 우리는 점 P 에서 평면에 수선의 발을 내리고 싶을 때 쓰는 논리이다.

결론적으로 평면에 수선을 내리는 경우는 없으며 평면 위의 직선에 수선을 내리는 것이다.



위의 그림과 같이 점 P 에서 평면에 수선을 내리고자 한다면

① 평면 위의 직선 m 에 수선의 발을 내리고,

② 그 점을 지나고, 직선 m 에 수직인 평면 위의 직선을 그린 다음

③ 그 직선에 내린 수선이 바로 평면에 내린 수선이 된다.

'삼수선 제3정리는 평면과 수직인 직선이 주어지지 않은 상태에서 평면에 수선을 내리고 싶을 때 사용한다.'

실전정리 11 : 정사영 알고리즘

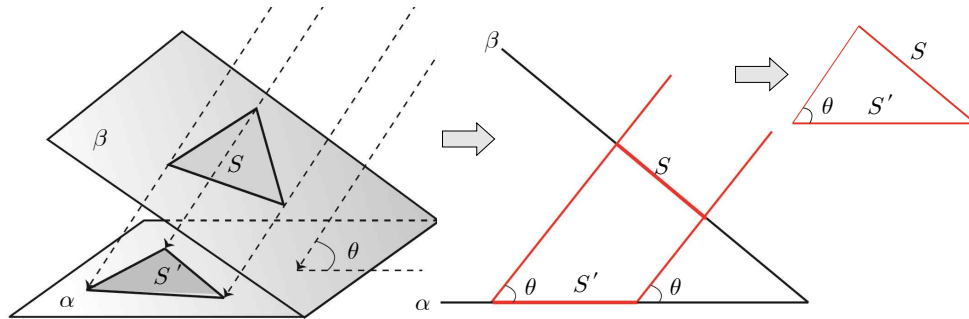
11-1. 점의 정사영 관찰

11-2. 수직성분과 수평성분으로 그림자를 관찰하고, 차원이 변한 위치에서 삼각비를 푼다.

11-1. 점의 정사영 관찰

- 정사영의 가장 기본은 '점의 정사영'의 자취와 영역을 상상하는 것이다.
꽤 많은 경우는 공식을 이용하지 않고도 정사영의 길이 또는 넓이를 구할 수 있다.
- 직선의 정사영은 직선이거나 점이다.

11-2. 수직성분과 수평성분으로 그림자를 관찰하고, 차원이 변한 위치에서 삼각비를 푼다.



- 정사영의 모습이 잘 상상이 되지 않는다면 교선과 수평한 성분의 정사영과 수직한 성분의 정사영을 각각 상상해본다.
- 원래 도형과 정사영 된 도형을 포함한 두 평면을 차원이 변한 위치에서 보면 정사영의 넓이를 구하는 활용 문제는 결국 '삼각비'문제이다.

실전정리 12 : 직평각과 이면각

정의 - 정사영 - 벡터

정의

- 직선과 평면이 이루는 각과 이면각을 정의로 구하겠다는 말은 두 가지 모두 공통적으로 삼수선 제3정리를 이용하겠다는 뜻이다. 핵심은 평면에 수선을 받을 내리는 것이고, 이때 사용되는 논리가 삼수선 제3정리이다.

정사영

- 정사영을 통해 직평각 또는 이면각을 구하는 것은 '점의 정사영'을 통해 정사영의 길이나 면적이 직관적으로 구해지는 경우에 사용될 수 있다.

$$\cos \alpha = \frac{l'}{l} \quad (\text{단, } \alpha \text{ 는 직평각}), \quad \cos \beta = \frac{S'}{S} \quad (\text{단, } \beta \text{ 는 이면각})$$

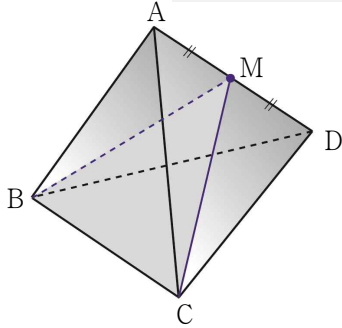
벡터

- 후에 배우는 '방향벡터'를 '내적'을 통해서 공식을 통해 직평각과 이면각을 구하는 방법을 추가로 배운다.

Part 6. 공간도형과 공간좌표

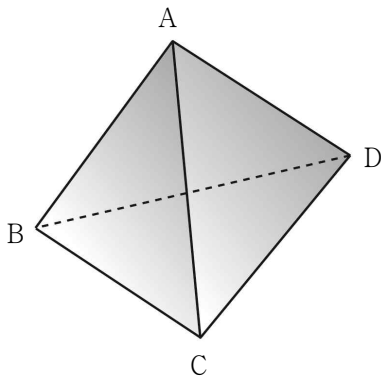
관찰 18

정사면체 $ABCD$ 에 대하여 변 AD 의 중점을 M 이라 할 때, 선분 AB 의 평면 BCM 으로의 정사영



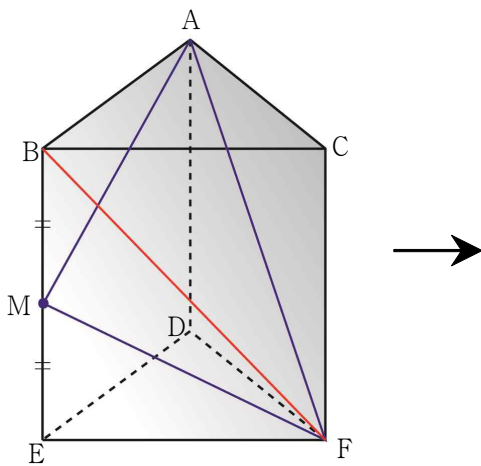
관찰 19

정사면체 $ABCD$ 에 대하여 점 A 에서 평면 BCD 에 내린 수선의 발이 삼각형 BCD 의 무게중심임을 논증하시오.



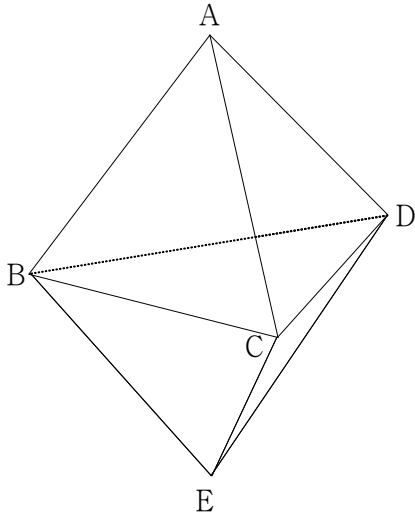
관찰 20

모든 변의 길이가 2 인 정삼각기둥 $ABC-DEF$ 에 대하여 변 BE 의 중점을 M 이라고 할 때, 선분 BF 의 평면 AMF 로의 정사영의 길이를 구하시오.

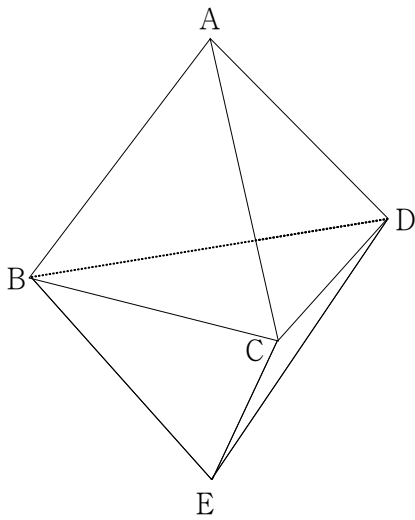


Part 6. 공간도형과 공간좌표

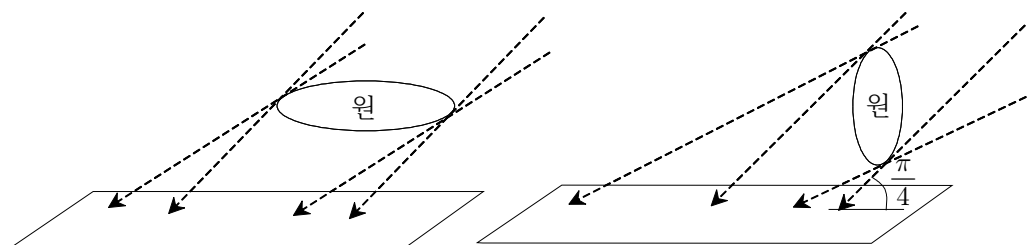
- 관찰 21 밑면을 공유한 서로 다른 두 정사면체 ABCD와 EBCD가 있다.
평면 ABC와 평면 BCE가 이루는 각을 θ 라 할 때, $\sin \theta$ 은 값은?



- 관찰 22 밑면을 공유한 서로 다른 두 정사면체 ABCD와 EBCD가 있다.
평면 ABC와 평면 BCE가 이루는 각을 θ 라 할 때, $\sin \theta$ 은 값은?



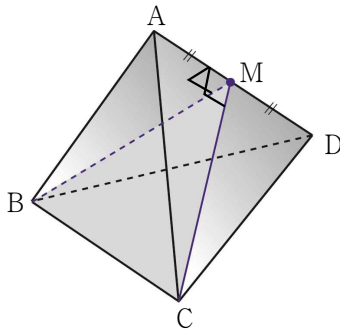
- 관찰 23 정사영을 관찰해보자.



<관찰 18, 19, 20, 21 해설>

관찰 18

정사면체 ABCD 에 대하여 변 AD 의 중점을 M 이라 할 때, 선분 AB의 평면 BCM 으로의 정사영은?



$\overline{AM} \perp \overline{BM}$, $\overline{AM} \perp \overline{CM}$ 이므로 직선 AM 은 평면 BCM 과 수직이다. 즉, 선분 AB 의 평면 BCM 으로의 정사영은 선분 BM 이다.

- 실전정리 10 : 삼수선 정리의 논리

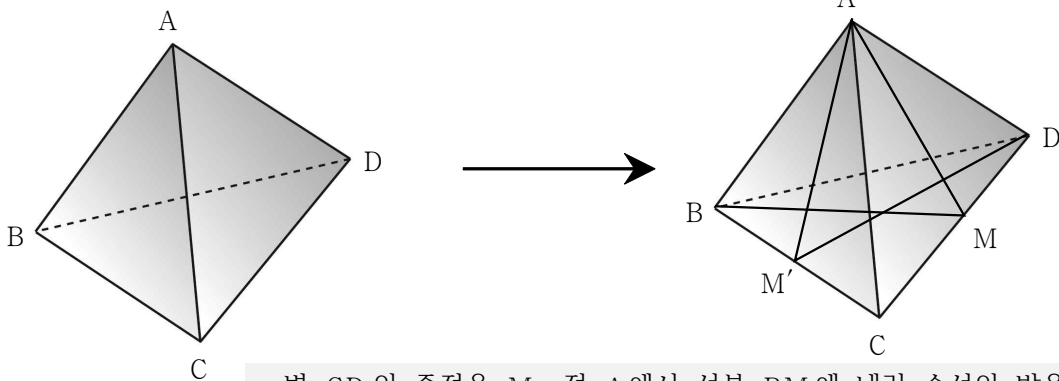
제1,2정리 - 수선, 연결 $\Rightarrow$ 직각

제3정리 - 평면에 수선을 내리고자 한다면 평면 위의 직선에 수선을 내린다.

$\Rightarrow$ 우리는 허허벌판에 수선의 발을 내리는 것이 아니다. 점 A 에서 평면 BCM 에 수선을 발을 내리고자 했다면 세 직선 BC, BM, CM 중 하나로 수선의 발을 내려야 했다.

관찰 19

정사면체 ABCD 에 대하여 점 A 에서 평면 BCD 에 내린 수선의 발이 삼각형 BCD 의 무게중심임을 논증하시오.



- 변 CD 의 중점을 M, 점 A 에서 선분 BM 에 내린 수선의 발을 G_1 이라하면 G_1 은 점 A 에서 평면 BCD 에 내린 수선의 발이다.

(삼수선 제3정리)

- 변 BC 의 중점을 M' , 점 A 에서 선분 DM' 에 내린 수선의 발을 G_2 이라하면 G_2 은 점 A 에서 평면 BCD 에 내린 수선의 발이다.

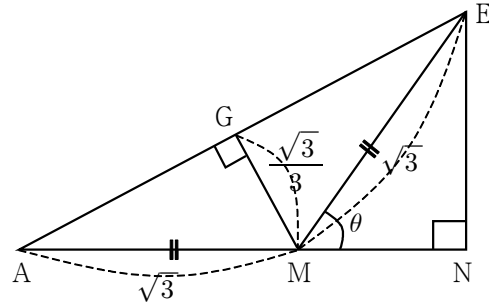
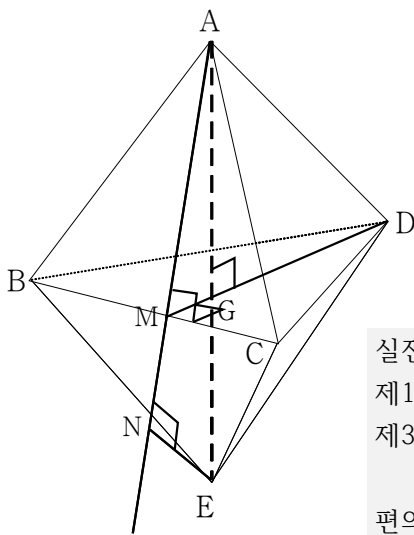
(삼수선 제3정리) 수선의 발은 유일하므로 $G_1 = G_2$

- 선분 AG_1 은 평면 AMB 위에 있고, 선분 AG_2 은 평면 $AM'D$ 위에 있으므로 선분 $AG_{1(2)}$ 는 두 평면 AMB 와 $AM'D$ 의 교선이다.

무게중심의 정의에 의하여 $G_{1(2)}$ 는 삼각형 BCD 의 무게중심이다.

관찰 21

밑면을 공유한 서로 다른 두 정사면체 ABCD와 EBCD가 있다.
평면 ABC와 평면 BCE가 이루는 각을 θ 라 할 때, $\sin \theta$ 은 값은?



실전정리 10 : 삼수선 정리의 논리

제1,2정리 - 수선, 연결 $\Rightarrow$ 직각

제3정리 - 평면에 수선을 내리고자 한다면 평면 위의 직선에 수선을 내린다.

편의상 한 변의 길이를 2라고 잡아보자.

G 는 삼각형 BCD의 무게중심이므로 $\overline{GM} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

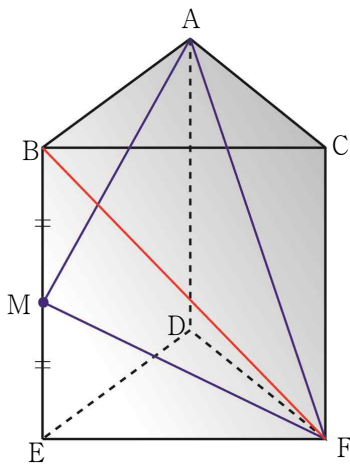
피타고라스의 정리와 이등변삼각형의 성질에 의해

$$\overline{AE} = \frac{4\sqrt{6}}{3}, \text{ 삼각형 AMG와 삼각형 EAN이}$$

답았으므로 $\overline{EN} = \frac{4\sqrt{6}}{9}$, 즉, $\sin \theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$

관찰 20

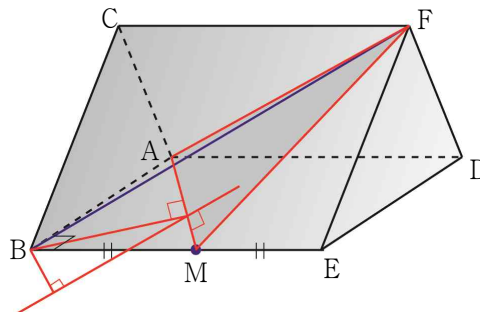
모든 변의 길이가 2인 정삼각기둥 $ABC-DEF$ 에 대하여 변 BE 의 중점을 M 이라고 할 때, 선분 BF 의 평면 AMF 로의 정사영의 길이를 구하시오.



실전정리 10 : 삼수선 정리의 논리

제1,2정리 - 수선, 연결 $\Rightarrow$ 직각

제3정리 - 평면에 수선을 내리고자 한다면
평면 위의 직선에 수선을 내린다.
위의 직선에 수선을 내린다.



#2-4. 실전정리 총정리

씩 다 외워라.

- 실전정리 1 : 중점연결정리의 논리
연결하면 평행한다.
- 실전정리 2 : 평행사변형의 논리
두쌍평, 두쌍각, 두쌍길, 한쌍평길, 대각반
- 실전정리 3 : 평행선 삼단논법
평행하고, 평행하면, 평행한다. / 평행하고, 수직이면, 수직이다.
- 실전정리 4 : 꼬인 위치 판단법
한 직선을 포함한 평면, 그 평면을 관통하는 직선
- 실전정리 5 : 직선과 평면의 평행판단법
평행선 딱 한개
- 실전정리 6 : 직선과 평면의 수직관계
6-1. 평면 위의 평행하지 않는 두 직선과 수직하면 직선과 평면이 수직이다.
6-2. 직선이 평면과 수직이면 평면 위의 모든 직선과 수직이다.
- 실전정리 7 : 꼬인 위치의 두 직선의 수직관계
꼬인 위치의 두 직선의 수직관계는 직선과 평면의 수직관계로 밝힌다.
- 실전정리 8 : 평면과 평면의 평행판단법
평행선 딱 두 개
- 실전정리 9 : 평면과 평면의 수직
9-1. 평면과 평면의 수직조건 : 교선에 내린 수선은 평면과 수직한다.
9-2. 수직인 평면 결정하기 : 평면과 수직인 직선을 이용한다.
- 실전정리 10 : 삼수선 정리의 논리
10-1. 수선, 연결 $\Leftrightarrow$ 직각
10-2. 평면에 수선을 내리고자 한다면 평면 위의 직선에 수선을 내린다.
- 실전정리 11 : 정사영 알고리즘
11-1. 점의 정사영 관찰
11-2. 수직성분과 수평성분으로 그림자를 관찰하고,
차원이 변한 위치에서 삼각비를 푼다.
- 실전정리 12 : 직평각과 이면각
정의 - 정사영 - 벡터

공간좌표도

점 찍는 법, 그리는 법 등

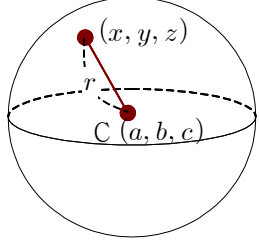
필요한 모든 내용이 서술되어 있습니다.

교과서에도 있는 실전 지식이고

기출문제 풀 때 실제로 사용되는 사고방식입니다.

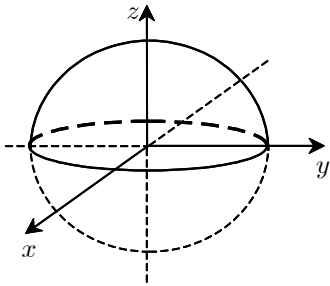
#3-3. 구와 기본 공간도형의 방정식

1) 구

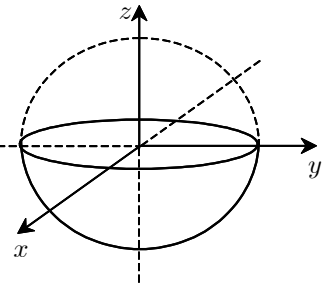


점 $C(a, b, c)$ 를 중심으로 하고
반지름의 길이가 r 인 구의 방정식은
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

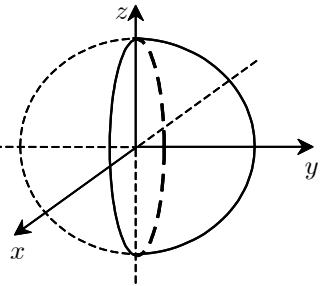
반구의 방정식 : 구의 방정식에 부등식을 연립한 형태로 표현된다.



$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$
 $z \geq 0$



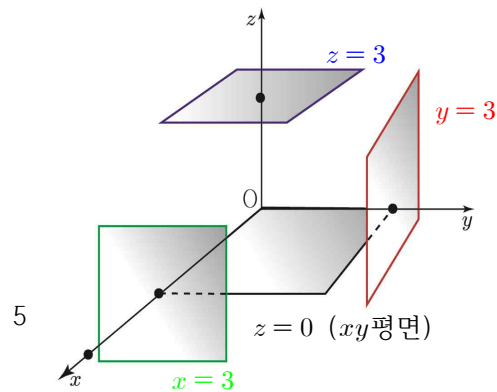
$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$
 $z \leq 0$



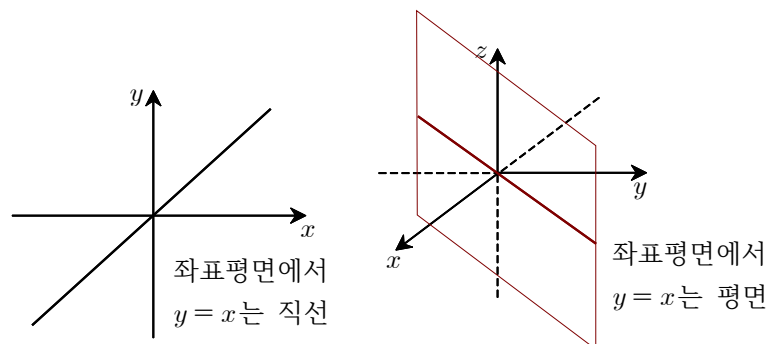
$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$
 $y \geq 0$

2) 기본평면

- 수직선에서 $x = 3$ 은 좌표이다.
- 좌표평면에서 $x = 3$ 은 직선이다.
- 좌표공간에서 $x = 3$ 은 평면이다.

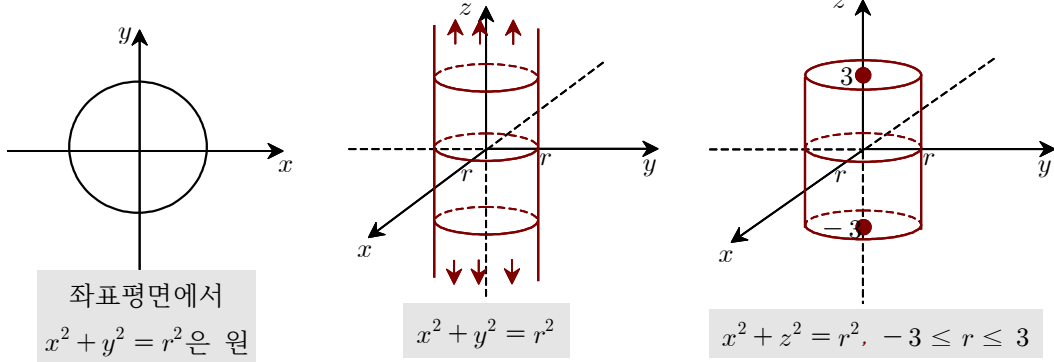


- 좌표평면에서
 $y = x$ 는 직선이다.
- 좌표공간에서
 $y = x$ 는 평면이다

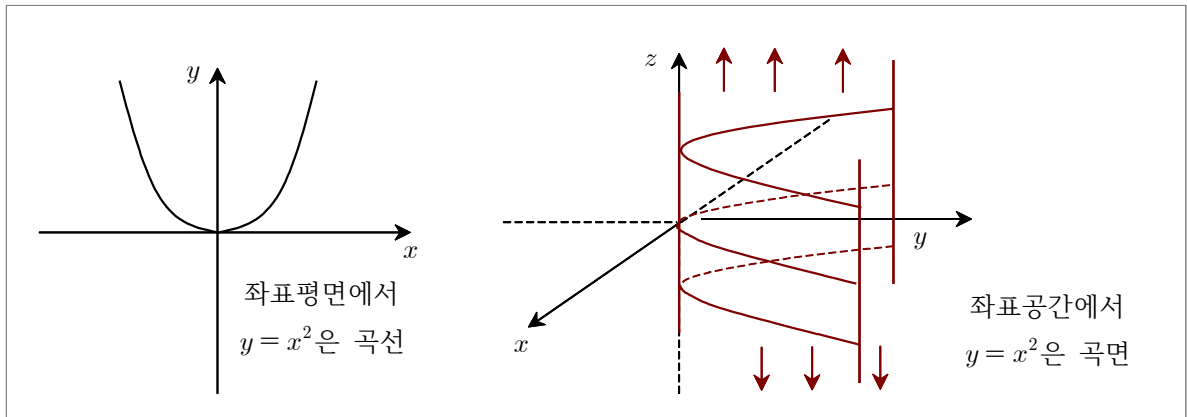


3) 원기둥

- 좌표평면에서 $x^2 + y^2 = r^2$ 은 원이다.
- 좌표공간에서 $x^2 + y^2 = r^2$ 은 원기둥이다.

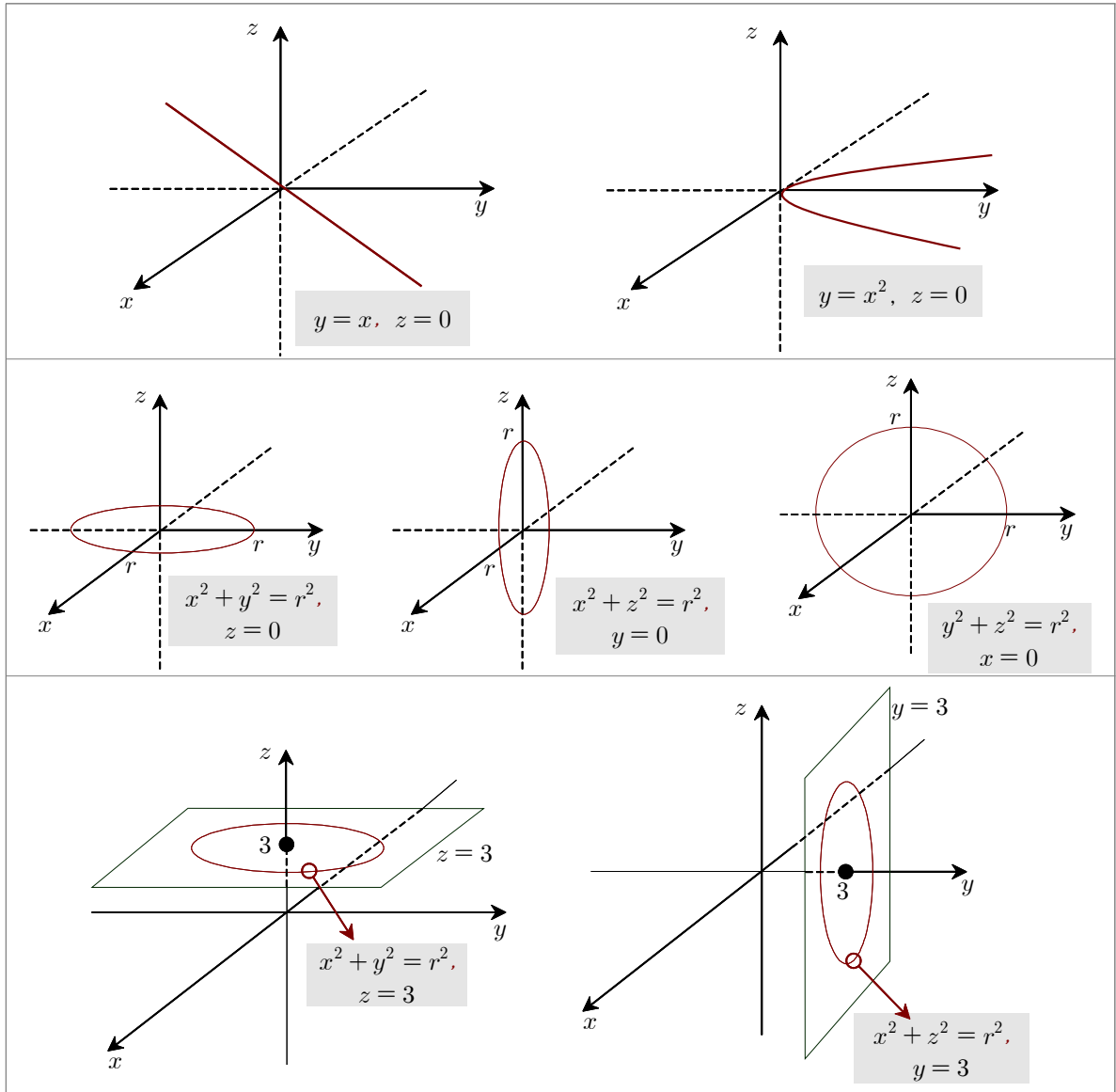


4) 곡면



Part 6. 공간도형과 공간좌표

5) 공간에서 ‘평면도형’은 연립방정식의 형태로 표현된다.



이처럼 기본 공간도형의 방정식은 반드시 그릴 수 있어야 한다.

좌표화 (공간에서 성분으로 표시하는 아이디어와 사고방식)

에 대한 생각도 구체적으로

명확히 제시합니다.

(기출문제는 최소 2가지 이상의 방법으로 풀어봐야 합니다.)

3) 공간벡터의 좌표화

시점에서 종점을 뺀다.

두 점 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ 에 대하여

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

증명) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

참고) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

방향을 고정시키고, 시점을 원점으로 종점의 좌표를 읽는다.

- 방향을 고정시키고

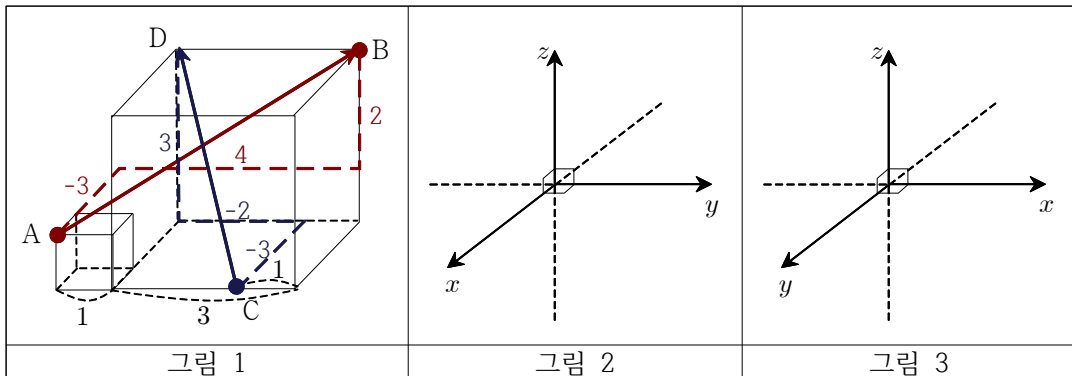
: **방향을 고정시키라는 말**은 문제에서 좌표평면이 따로 설정되어 있지 않으면,

우리가 x 축, y 축, z 축의 방향을 설정해야 하는데 모든 벡터는 '같은 축을 기준'으로 좌표화를 해야 한다는 말이다. '서로 다른 기준'을 적용하여 좌표화 할 경우 벡터들의 위치관계가 바뀌어 버린다.

- 좌표의 독립성과 방향성 (기반논리 - 좌표를 읽는 방법)

: 좌표화되는 모든 벡터는 **시점이 원점인 위치벡터**이다.

이때, 벡터의 시점을 원점으로 옮기는 것이 아니라 벡터는 그대로 둔 상태에서 시점을 원점으로 생각하여 종점의 좌표를 읽어도 같은 결과를 얻을 수 있다.



예를 들어 [그림 1]과 같이 길이가 각각 1과 3인 정육면체에서 [그림 2]와 같은 방향을 축으로 설정했을 때, $\overrightarrow{AB}$ 와 $\overrightarrow{CD}$ 를 성분으로 표시하려면 시작점의 기준으로 종점의 좌표를 결정하면 된다. 즉, $\overrightarrow{AB} = (-3, 4, 2)$, $\overrightarrow{CD} = (-3, -2, 3)$

또한 [그림 3]과 같은 방향을 축으로 설정하면 $\overrightarrow{AB} = (4, -3, 2)$, $\overrightarrow{CD} = (-2, -3, 3)$

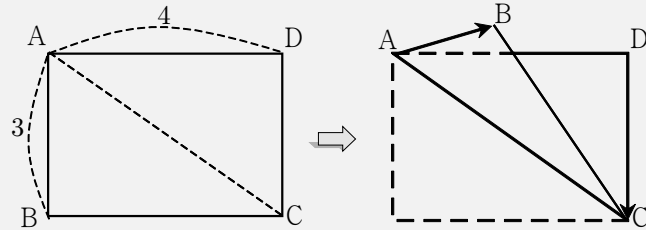
차원이 변한 위치에서 두 방향의 좌표를 정하고,
남은 한 개는 상상한다.

Part 7. 공간도형의 방정식

관찰 25

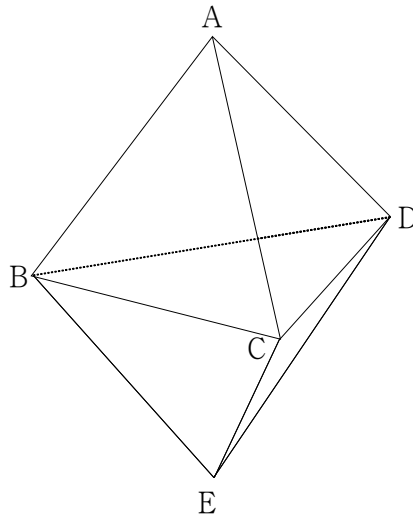
2004. 10. 가형(39%). 22번. 4점

$\overline{AD} = 4$, $\overline{AB} = 3$ 인 직사각형 모양의 종이 $ABCD$ 가 있다. 대각선 AC 를 접는 선으로 하여 평면 ABC 가 평면 ACD 와 수직이 되게 접는다. 접은 도형에서 내적 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{b}{a}$ (a, b 는 서로소인 자연수)일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.



관찰 26

밑면을 공유한 서로 다른 두 정사면체 $ABCD$ 와 $EBCD$ 가 있다. 평면 ABC 와 평면 BCE 가 이루는 각을 벡터를 이용하여 구해보자.

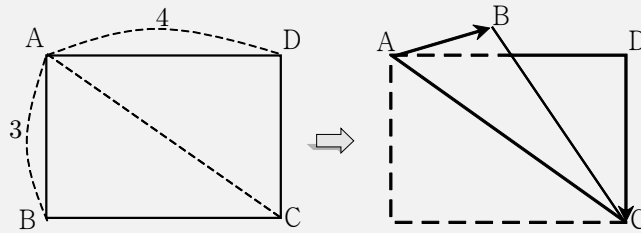


<관찰 25, 26 해설>

관찰 25

2004. 10. 가형(39%). 22번. 4점

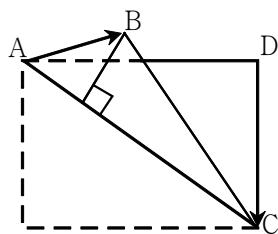
$\overline{AD} = 4$, $\overline{AB} = 3$ 인 직사각형 모양의 종이 ABCD가 있다. 대각선 AC를 접는 선으로 하여 평면 ABC가 평면 ACD와 수직이 되게 접는다. 접은 도형에서 내적 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{b}{a}$ (a, b 는 서로소인 자연수)일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.



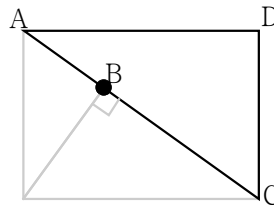
- 실전정리 9 : 평면과 평면의 수직

9-1. 평면과 평면의 수직조건 : 교선에 내린 수선은 평면과 수직한다.

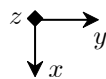
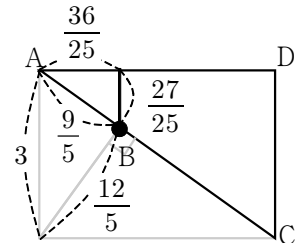
- 차원이 변한 위치에서 두 방향의 좌표를 정하고, 남은 한 개는 상상한다.



실전정리 9-1



평면 ACD가
왜곡되지 않는 위치



다음과 같이 방향을 정한다. (위에서 본 모양이므로 z 축은 점으로 보인다.)

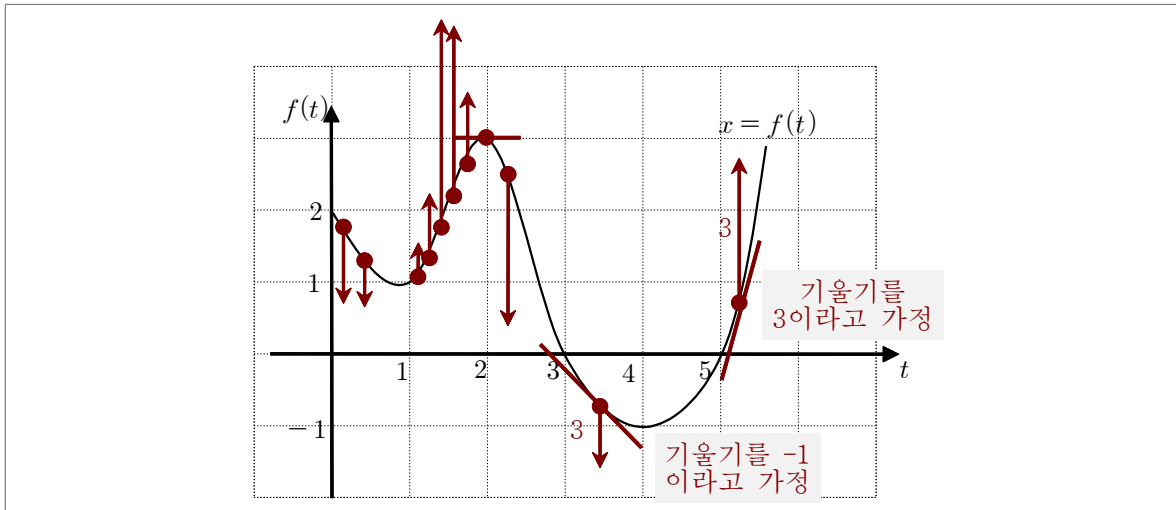
$$\text{결국 } \overrightarrow{AB} = \left(\frac{27}{25}, \frac{36}{25}, \frac{12}{5} \right), \overrightarrow{DC} = (3, 0, 0) \text{ 이므로 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{81}{25}$$

어느 한 부분도 대충 쓰지 않았습니다.

다음은 곡선 위의 운동입니다.

#5-2. 평면 위의 운동

1) 도입 - 수직선 위의 운동 : 기울기 $\Rightarrow$ 벡터 (표현의 진화)



위와 같이 기울기를 벡터의 표현으로 바꿈으로서 우리는 실제 움직임을 훨씬 직관적으로 표현할 수 있다. 실제로 위의 그래프에서

어떤 순간에 물체의 운동 방향은 '화살표의 방향'으로

어떤 순간에 물체의 빠르기는 '화살표의 길이'로 표현한다면

기울기로 표현하는 것보다 훨씬 직관적으로 물체의 움직임을 관찰할 수 있다.

2) 평면 위의 운동 - 위치

평면에서 움직이는 어떤 물체의 움직임을 분석할 때는

x 축의 방향과 y 축의 방향을 각각 시간에 대해서 독립적으로 분석한다.

예를 들어 $x = 2t$ 에서 단위를 '초'라고 했을 때 어떤 물체는 1초에 x 축의 양의 방향으로 2씩 움직인다. 또한 $y = 3t$ 에서 어떤 물체는 1초에 y 축의 양의 방향으로 3씩 움직인다.

만약 두 함수 $x = 2t$ 과 $y = 3t$ 에 동시에 영향을 받는 물체는 어떻게 될까?

만약 이 물체가 원점 $(0, 0)$ 에서 출발했다고 생각해본다면 1초 후의 위치는 $(2, 3)$ 이 될 것이고, 2초 후의 위치는 $(4, 6)$ 이 될 것이다. 이것을 연속적인 시간에서 생각해본다면

시간 t 에 따른 (x, y) 의 자취의 방정식을 구하면 되므로 $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \end{cases}$ 를 연립한 $y = \frac{3}{2}x$ 라는 직선 위를 움직인다고 이야기 할 수 있을 것이다.

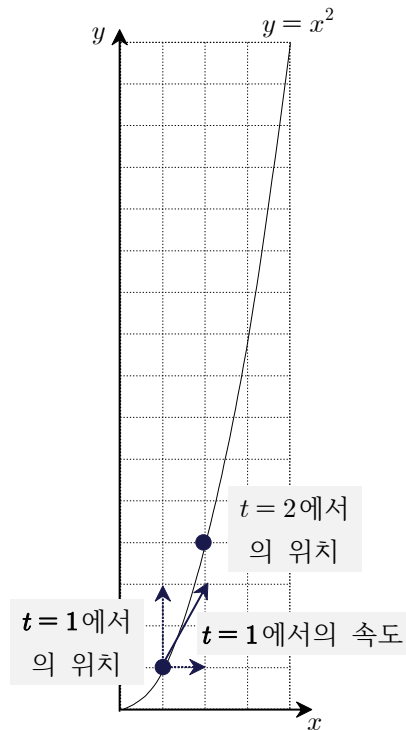
마찬가지로 함수 $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ 에 영향을 받는 물체는 $y = x^2$ 의 곡선 위를 움직인다고 이야기 할 수 있다.

3) 평면 위의 운동 - 속도

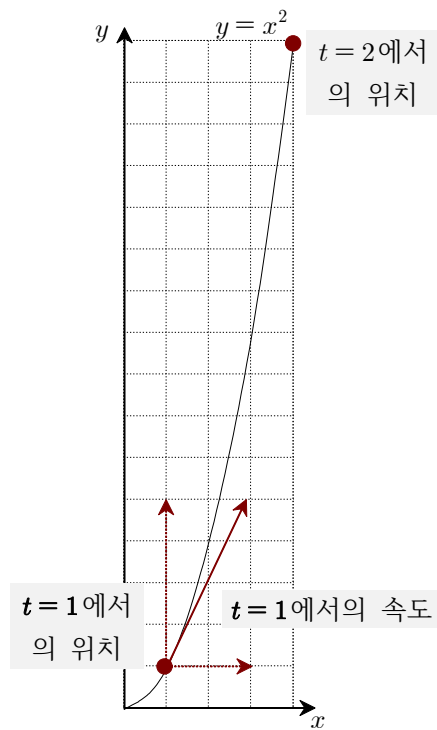
$y = x^2$ 의 곡선 위를 움직이는 함수 $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ 에 영향을 받는 물체 A와

$y = x^2$ 의 곡선 위를 움직이는 함수 $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^4 \end{cases}$ 에 영향을 받는 물체 B에 대해서 생각해보자.

두 곡선은 분명 같은 자취를 그리지만 빠르기는 다르다. 실제로 둘 다 원점에서 출발하지만 $t = 2$ (초)인 순간의 위치는 많은 차이가 난다.



[그림 1]



[그림 2]

평면 위를 움직이는 물체의 움직임을 x 축의 방향과 y 축의 방향을 각각 시간에 대한 함수로 따로 표현하듯이 물체의 속도 역시 x 축의 방향과 y 축의 방향을 각각 따로 분석한다.

위의 그림에서 물체 A의 시간에 따른 위치는 (t, t^2) 이고,

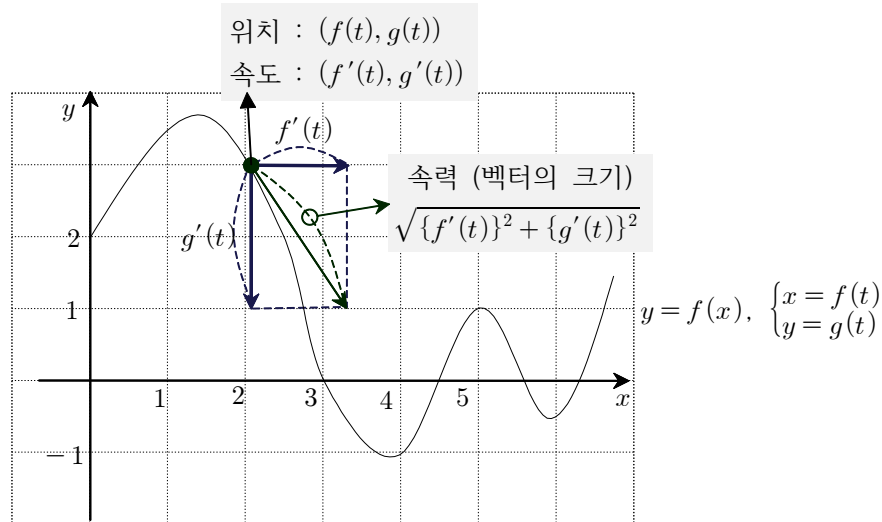
시간에 따른 속도는 $\vec{v} = (1, 2t)$ 이다.

$\vec{v} = (1, 2t)$ 은 벡터 값이며 시점을 원점으로 했을 때 종점의 좌표가 $(1, 2t)$ 인 벡터를 의미하는 것이다. 위의 그림은 ‘A의 그 시간에서의 위치를 원점으로 생각하여 속도벡터’를 표현한 것이다. 물체 A의 $t = 1$ 에서의 위치는 $(1, 1)$ 이고, 속도는 $(1, 2)$ 인데 이것을 [그림1]과 같이 표현했다. 이때 ‘빠르기(속도 벡터의 크기)’는 $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ 이다.

마찬가지로 물체 B의 $t = 1$ 에서의 위치는 $(1, 1)$ 이고, 속도는 $(2, 4)$ 인데 이것을 [그림2]과 같이 표현했다. 이때 ‘빠르기(속도 벡터의 크기)’는 $\sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ 이다. 이것은 $t = 1$ 초인 순간에 물체 A보다 물체 B가 ‘같은 방향의 2배 빠른 속력’으로 움직이고 있다는 것을 의미한다.

이렇게 의미를 읽어주는 것이 바로 ‘평면 위의 운동의 해석’이다.

4) 일반화와 이동거리



눈에 보이는 그대로 움직인다.

우리가 하늘에서 땅을 볼 때 어떤 물체가 구불구불한 오솔길을 따라 가는 것을 상상하면 된다. 여기에는 t 축은 눈에 보이지 않는다.

위치는 좌표로 속도는 벡터로 표현

즉, 시간이 t 일 때의 위치는 $(f(t), g(t))$

시간이 t 일 때의 속도는 $(f'(t), g'(t))$

시간이 t 일 때의 속력은 $\sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}$

이동거리 : 멋진 식.... 의미를 있는 그대로 읽어주기

$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (f'(t), g'(t))$ 에서 속력은 $|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}$

속력에 아주 작은 시간(무한소) dt 를 곱해주면 찰나의 이동거리가 나온다. 여기에 실수계의 시그마인 정적분을 취해주면 시간의 연속적 변화에 따른 찰나의 이동거리의 합이 나온다.

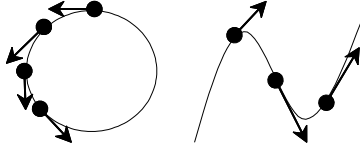
- t 초인 순간의 찰나의 이동거리 $\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$

- $t = a$ 에서 $t = b$ 까지 이동거리는 (실수계의 시그마 - 인티그럴)

$$\Rightarrow \int_a^b |\vec{v}| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt$$

NOTE1. 위치도 사실 벡터이지만 그냥 좌표라고 생각하자.

NOTE2. 방향이 일정하지 않은 운동에서 물체가 움직이는 방향은 순간에서의 접선의 방향이다.



#5-3. 곡선의 길이

$y = f(x)$ 라는 함수에서 $x = a$ 에서 $x = b$ 까지의 곡선의 길이는
'평면 위에서의 운동'의 내용을 활용하여 구할 수 있다.

$y = f(x)$ 라는 함수에서 $x = a$ 에서 $x = b$ 까지의 곡선의 길이는

1단계 $\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$ 라고 두어 매개변수로 식을 표현하면 '속도'처럼 식을 해석할 수 있다.

2단계 $\Rightarrow$ 그러면 '속도'는 $\vec{v} = \left(1, \frac{dy}{dt}\right) = (1, f'(t))$ 이고,

'속력'은 $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$ 이다.

3단계 $\Rightarrow x = t$ 이므로 $x = a$ 이면 $t = a$ 이고, $x = b$ 이면 $t = b$ 이다.

즉, $y = f(x)$ 라는 함수에서 $x = a$ 에서 $x = b$ 까지의 곡선의 길이를
 $t = a$ 에서 $t = b$ 까지 이동거리라고 생각하면

$$\int_a^b |\vec{v}| dt = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

4단계 $\Rightarrow$ 정적분에서는 적분변수를 바꾸어도 상관없다.

즉, $x = a$ 에서 $x = b$ 까지의 곡선의 길이는

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

NOTE 1. 매개변수 함수에서 우리가 배운 $\frac{dy}{dx}$ 의 의미

: $\frac{dy}{dx}$ 는 속도가 아니다. 속도는 위에서도 언급했듯이 $(f'(t), g'(t))$ 이다. 앞에서도 언급했듯이

어떤 곡선궤도를 움직이는 물체는 순간순간 방향이 바뀌는 운동을 하고 어떤 순간의 움직이는 방향은 그 순간의 접선의 기울기이다.

즉, $\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$ 속도의 방향(운동방향)이라고 한다.

이것은 정확히 $y = f(x)$ 위의 점 $(f(t), g(t))$ 에서의 접선의 기울기와 일치한다.

이 책 한 권을 5회독 하고,
모든 기출문제에 적용해 봄으로서
기백을 정복해 보시길 바랍니다.

+

추가 암기노트이나 홀로그램연습을 위한
칼럼도 계속 제공될 예정입니다.

- 미천한 수학자 -