대수능과 3월 학평

21, 30

고지우 수학연구소

2016년 대수능 21번

$0<t<41$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$와 직선 $y=t$가 만나는 세 점 중에서 x좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t),\, t)$, x좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t),\, t)$라 하자. $h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$라 할 때, $h'(5)$의 값은?

① $\frac{79}{12}$ ② $\frac{85}{12}$ ③ $\frac{91}{12}$ ④ $\frac{97}{12}$ ⑤ $\frac{103}{12}$

2016년 3월 서울시 교육청 30

함수 $f(x)=x^2e^{ax}\,(a<0)$에 대하여 부등식 $f(x)\geq t\,(t>0)$을 만족시키는 x의 최댓값을 $g(t)$라 정의하자. 함수 $g(t)$가 $t=\dfrac{16}{e^2}$에서 불연속일 때, $100a^2$의 값을 구하시오. (단, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$)

2017년 대수능 20번

함수 $f(x)=e^{-x}\int_{0}^{x}\sin(t^2)dt$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f(\sqrt{\pi})>0$

ㄴ. $f'(a)>0$을 만족시키는 a가 열린구간 $(0, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. $f'(b)=0$을 만족시키는 b가 열린구간 $(0, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2017년 대수능 21번

닫힌 구간 $[0,1]$에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가 $\int_0^1 f(x)dx=2$, $\int_0^1 |f(x)|dx=2\sqrt{2}$ 를 만족시킨다. 함수 $F(x)$가

$F(x)=\int_0^x |f(x)|dx \ (0\le x\le 1)$ 일 때, $\int_0^1 f(x)F(x)dx$의 값은?

① $4-\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{2}$ ③ $5-\sqrt{2}$ ④ $1+2\sqrt{2}$ ⑤ $2+2\sqrt{2}$

2017년 서울시 교육청 21번

구간 $[0, 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$에 대하여 함수 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt \quad (0 \le x \le 1)$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $F(x)=f(x)-x$

(나) $\int_0^1 F(x)\,dx = e-\frac{5}{2}$

〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $F(1)=e$

ㄴ. $\int_0^1 xF(x)\,dx=\frac{1}{6}$

ㄷ. $\int_0^1 \{F(x)\}^2\,dx=\frac{1}{2}e^2-2e+\frac{11}{6}$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2018년 대수능 21번

양수 t에 대하여 구간 $[1,\ \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가 $f(x)=\begin{cases}\ln x & (1 \le x < e) \\ -t+\ln x & (x \ge e)\end{cases}$ 일 때, 다음 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$ 중에서 직선 $y=g(x)$의 기울기의 최솟값을 $h(t)$라 하자.

1 이상의 모든 실수 x에 대하여 $(x-e)\{g(x)-f(x)\} \ge 0$이다.

미분가능한 함수 $h(t)$에 대하여 양수 a가 $h(a)=\dfrac{1}{e+2}$을 만족시킨다. $h'\left(\dfrac{1}{2e}\right)\times h'(a)$의 값은?

① $\dfrac{1}{(e+1)^2}$ ② $\dfrac{1}{e(e+1)}$ ③ $\dfrac{1}{e^2}$ ④ $\dfrac{1}{(e-1)(e+1)}$ ⑤ $\dfrac{1}{e(e-1)}$

2018년 대수능 30번

실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=\begin{cases} 1-|x-t| & (|x-t|\le 1) \\ 0 & (|x-t|>1) \end{cases}$ 이라 할 때, 어떤 홀수 k에 대하여 함수

$g(t)=\int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 극소이고 $g(\alpha)<0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을
>
> α_1, α_2, $\cdots$, α_m (m은 자연수)라 할 때, $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=45$이다.

$k-\pi^2\sum_{i=1}^{m}g(\alpha_i)$의 값을 구하시오.

정답과 해설

1) 정답 ④

$h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$이므로

$$h'(t)=\{f(t)-g(t)\}+t\times\{f'(t)-g'(t)\}$$

그러므로

$$h'(5)=\{f(5)-g(5)\}+5\{f'(5)-g'(5)\} \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, $y=x^3+2x^2-15x+5$와 직선 $y=5$가 만나는 점의 x좌표는

$$x^3+2x^2-15x+5=5$$

$$x(x^2+2x-15)=0$$

$$x(x+5)(x-3)=0$$

$$\therefore\ x=-5 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

그러므로

$$f(5)=3,\ g(5)=-5 \quad \cdots\cdots ㉡$$

한편, $y'=3x^2+4x-15$에서

$$f'(5)=\frac{1}{3\cdot 3^2+4\cdot 3-15}=\frac{1}{24}$$

$$g'(5)=\frac{1}{3\cdot(-5)^2+4\cdot(-5)-15}=\frac{1}{40} \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉡과 ㉢을 ㉠에 대입하면

$$h'(5)=\{3-(-5)\}+5\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{40}\right)$$

$$=8+\frac{1}{12}$$

$$=\frac{97}{12}$$

2) 정답 25

함수 $f(x)=x^2e^{ax}\ (a<0)$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)'e^{ax}+x^2(e^{ax})' \\ &= 2xe^{ax}+ax^2e^{ax} \\ &= (ax^2+2x)e^{ax}=ax\left(x+\frac{2}{a}\right)e^{ax} \end{aligned}$$

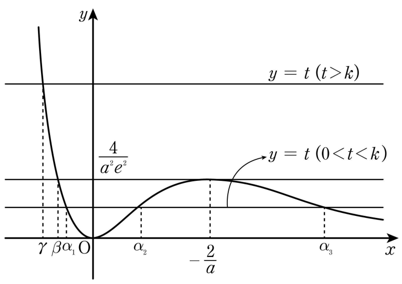
$f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\frac{2}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{a^2e^2}$	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극솟값 0 를 갖고 $x=-\frac{2}{a}$ 에서 극댓값 $\frac{4}{a^2e^2}$ 를 갖는다.

또 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$ 이고, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ 이므로

함수 $f(x)=x^2e^{ax}\ (a<0)$ 의 그래프는 그림과 같다.



부등식 $f(x)\ge t\ (t>0)$을 만족시키는 x 의 최댓값 $g(t)$ 에 대하여 $k=\frac{4}{a^2e^2}$ 라 하면, $g(t)$ 는 $0<t<k$ 또는 $t=k$ 또는 $t>k$로 나누어 생각할 수 있다.

ⅰ) $0<t<k$일 때

방정식 $f(x)=t$ 의 서로 다른 세 실근을 α_1, α_2, α_3 라 하면 부등식 $f(x)\ge t$ 의 해는 그림에서 $x\le\alpha_1$ 또는 $\alpha_2\le x\le\alpha_3$ 이므로 부등식을 만족시키는 x 의 최댓값은 α_3 이다.

따라서 $g(t)=\alpha_3$ 이다.

ⅱ) $t=k$일 때

방정식 $f(x)=t$ 의 음의 실근을 β라 하면 부등식 $f(x)\ge t$ 의 해는 $x\le\beta$ 또는 $x=-\frac{2}{a}$ 이므로 $g(t)=-\frac{2}{a}$ 이다.

ⅲ) $t>k$일 때

방정식 $f(x)=t$ 의 실근을 γ라 하면 부등식 $f(x)\ge t$ 의 해는 $x\le\gamma$이므로 $g(t)=\gamma$ 이다.

정의역이 $\left\{x\,|\,x<\beta,\ x\ge-\frac{2}{a}\right\}$ 인 함수 $h(x)$ 를

$$h(x)=\begin{cases} h_1(x)=f(x) & (x<\beta) \\ h_2(x)=f(x) & \left(x\ge-\frac{2}{a}\right) \end{cases}$$

라 정의하면, 두 함수 $y=h_1(x)$와 $y=h_2(x)$ 는 각각의 정의역에서 일대일 대응이므로 역함수를 갖는다. 또한, $y=h_1(x)$의 치역은 $\{y\,|\,y>k\}$이고, $y=h_2(x)$ 의 치역은 $\{y\,|\,0<y\le k\}$이므로 함수 $h(x)$ 의 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x>0\}$이다. 이때, $h(x)=t$를 만족하는 x 의 값은 방정식 $f(x)=t$ 의 해 중에서 최댓값이므로 $h(x)$ 의 역함수가 $g(t)$ 이다. $g(t)$ 는 $0<t<k$, $t>k$ 인 모든 점에서 연속함수이므로 $t=k$에서의 연속성을 조사하면 된다.

$\lim_{t\to k-}g(t)=-\frac{2}{a}$에서 $a<0$ 이므로 $-\frac{2}{a}>0$, $\lim_{t\to k+}g(t)=\beta$ 에서 $\beta<0$ 이므로 $\lim_{t\to k-}g(t)\ne\lim_{t\to k+}g(t)$이다.

따라서 함수 $g(t)$ 는 $t=k$에서만 불연속이다.

$$k=\frac{4}{a^2e^2}=\frac{16}{e^2},\quad \frac{4}{a^2}=16,\quad a^2=\frac{1}{4}$$

따라서 $100a^2=100\times\frac{1}{4}=25$

3) 정답 ⑤

ㄱ. $0 < x < \sqrt{\pi}$에서

$e^{-x} > 0$, $\sin(x^2) \geq 0$이고, $\sin 0 = 0$, $\sin\pi = 0$이므로

$f(\sqrt{\pi}) = e^{-\pi}\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2)dt > 0$ (참)

ㄴ. $f'(x) = -e^{x}\int_0^{x} \sin(t^2)dt + e^{-x}\sin(x^2)$

$f'(0) = -e^{-0}\int_0^{0} \sin(t^2)dt + e^{-0}\sin(0^2) = 0$

$f'(\sqrt{\pi}) = -e^{-\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2)dt + e^{-\sqrt{\pi}}\sin(\sqrt{\pi^2})$

$= -f(\sqrt{\pi}) < 0$

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0, \sqrt{\pi}]$에서 연속이고, 열린구간 $(0, \sqrt{\pi})$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$f(a) = \dfrac{f(\sqrt{\pi}) - f(0)}{\sqrt{\pi} - 0} > 0$

를 만족시키는 a가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$에서 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄷ. ㄴ을 만족시키는 a $(0 < a < \pi)$에 대하여 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, \sqrt{\pi}]$에서 연속이고,

$f'(a) > 0$, $f'(\sqrt{\pi}) < 0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f'(b) = 0$을 만족시키는 n가 열린구간 $(0, \sqrt{\pi})$에서 적어도 하나 존재한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

4) 정답 ④

함수 $y = f(x)$의 그래프가 구간 $[0, 1]$ 에서 x축과 만나는 점의 x좌표를 k라 하자.

곡선 $y = f(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 직선 $x = 1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자.

$\int_0^1 f(x)dx = 2$에서

$-S_1 + S_2 = 2 \cdots$ ㉠

$\int_0^1 |f(x)|dx = 2\sqrt{2}$ 에서

$S_1 + S_2 = 2\sqrt{2} \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$S_1 = \sqrt{2} - 1$, $S_2 = \sqrt{2} + 1$

i) $0 \leq x \leq k$인 경우

$F(x) = \int_0^x (-f(t))dt = -f(x)$

$\int_0^k f(x)F(x)dx$에서

$F9x) = s$라면

$x = 0$일 때, $s = 0$, $x = k$일 때, $s = \sqrt{2} - 1$,

$F'(x)\dfrac{dx}{ds} = 1$이므로

$\int_0^k f(x)F(x)dx$

$= \int_0^{\sqrt{2}-1} (-s)ds$

$= \left[-\dfrac{1}{2}s^2\right]_0^{\sqrt{2}-1}$

$= -\dfrac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)^2 = -\dfrac{3}{2} + \sqrt{2}$

ii) $k \leq x \leq 1$인 경우

$F(x) = (\sqrt{2} - 1)\int_k^x f(t)dt$이므로

$F'(x) = f(x)$

$\int_k^1 f(x)F(x)dx$에서

$F(x)=s$라면

$x=k$일 때, $s=\sqrt{2}-1$

$x=1$일 때, $S=2\sqrt{2}$

$F'(x)\dfrac{dx}{ds}=1$이므로

$$\int_k^1 f(x)F(x)dx$$

$$=\int_{\sqrt{2}-1}^{2\sqrt{2}} sds$$

$$=\left[\frac{1}{2}s^2\right]_{\sqrt{2}-1}^{2\sqrt{2}}$$

$$=4-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2=4-\frac{3}{2}+\sqrt{2}=\frac{5}{2}+\sqrt{2}$$

ⅰ), ⅱ)에서

$$\int_0^1 f(x)F(x)dx$$

$$=\int_9^k f(x)F(x)dx+\int_k^1 f(x)F(x)dx$$

$$=1+2\sqrt{2}$$

5)

ㄱ. (가)의 $F(x)=f(x)-x$를 (나)의 $F(x)$에 대입하면

$$\int_0^1 F(x)\,dx=\int_0^1\{f(x)-x\}\,dx$$
$$=\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 x\,dx$$
$$=\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{2}$$
$$=F(1)-\frac{1}{2}$$

이므로 $F(1)=e-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=e-2$ (거짓)

ㄴ. (가)의 $F(x)=f(x)-x$를 $\int_0^1 xF(x)dx$의 $F(x)$에 대입하면

$$\int_0^1 xF(x)dx=\int_0^1 x\{f(x)-x\}\,dx$$
$$=\int_0^1\{xf(x)-x^2\}\,dx$$
$$=\int_0^1 xf(x)\,dx-\int_0^1 x^2\,dx=\Big[xF(x)\Big]_0^1-\int_0^1 F(x)\,dx-\frac{1}{3}$$
$$=F(1)-\left(e-\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{3}$$
$$=e-2-e+\frac{5}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\ \text{(참)}$$

ㄷ. $F(0)=\int_0^0 f(t)\,dt=0$이고, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $F'(x)=f(x)$

(가)에 의해서

$$\int_0^1\{F(x)\}^2\,dx=\int_0^1 F(x)\{f(x)-x\}\,dx$$
$$=\int_0^1 F(x)f(x)\,dx-\int_0^1 xF(x)\,dx=\int_0^1 F(x)F'(x)\,dx-\int_0^1 xF(x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}\{F(x)\}^2\right]_0^1-\frac{1}{6}$$
$$=\frac{1}{2}\{F(1)\}^2-\frac{1}{2}\{F(0)\}^2-\frac{1}{6}$$
$$=\frac{1}{2}(e-2)^2-\frac{1}{6}$$
$$=\frac{1}{2}e^2-2e+\frac{11}{6}\ \text{(참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답과 해설

[다른 풀이]

$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

조건 (가)의 $F(x)=f(x)-x$ 의 양변을 x에 대하여 두 번 미분하면 $f'(x)=f''(x)$

$\frac{f''(x)}{f'(x)}=1$이므로 양변을 x에 대하여 적분하면

$\ln|f'(x)|=x+C_1$ (단, C_1 는 적분상수)

$f'(x)=C_2e^x$ (단, C_2 는 상수)이므로 양변을 x에 대하여 적분하면 $f(x)=C_2e^x+C_3$ (단, C_3 은 적분상수)

$0=F(0)=f(0)-0$, $f(0)=0$

$f(x)=f'(x)-1$이므로 $f'(0)=1$

$f'(x)=C_2e^x$, $f(x)=C_2e^x+C_3$에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)=C_2=1$, $f(0)=C_2+C_3=0$, $C_3=-1$

$f(x)=e^x-1$

이를 조건 (가)에 대입하면

$F(x)=e^x-x-1$

$$\begin{aligned}\int_0^1 F(x)\,dx&=\int_0^1(e^x-x-1)\,dx\\&=\left[e^x-\frac{1}{2}x^2-x\right]_0^1\\&=(e-1)-\frac{1}{2}-1\\&=e-\frac{5}{2}\end{aligned}$$

이므로 함수 $F(x)=e^x-x-1$은 조건 (나)를 만족시킨다.

ㄱ. $F(1)=e^1-1-1=e-2$ (거짓)

ㄴ. $$\begin{aligned}\int_0^1 xF(x)\,dx&=\int_0^1 x(e^x-x-1)\,dx\\&=\int_0^1 xe^x\,dx-\int_0^1 x^2\,dx-\int_0^1 x\,dx\\&=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\\&=\left[xe^x\right]_0^1-\left[e^x\right]_0^1-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\\&=e-(e-1)-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\text{ (참)}\end{aligned}$$

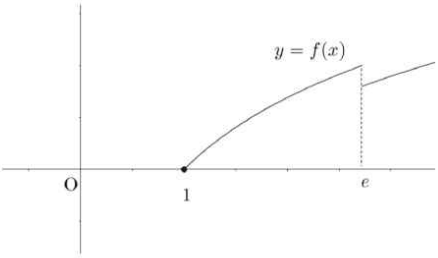
ㄷ. $$\int_0^1\{F(x)\}^2\,dx=\int_0^1(e^x-x-1)^2\,dx$$

$$=\int_0^1\{e^{2x}+x^2+1-2xe^x+2x-2e^x\}\,dx=\int_0^1 e^{2x}\,dx+\int_0^1 x^2\,dx+\int_0^1 1\,dx\quad-2\int_0^1 xe^x\,dx+\int_0^1 2x\,dx-2\int_0^1 e^x\,dx=\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[x\right]_0^1$$

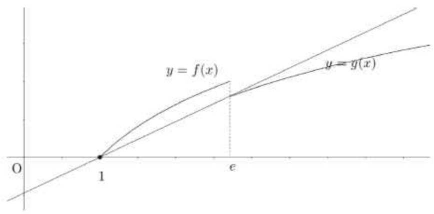
$$-2\left[xe^x\right]_0^1+2\left[e^x\right]_0^1+\left[x^2\right]_0^1-2\left[e^x\right]_0^1=\frac{1}{2}(e^2-1)+\frac{1}{3}+1-2\times1+1-2(e-1)=\frac{1}{2}e^2-2e+\frac{11}{6}\text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

6) ④
함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때 일차함수 $g(x)$가 주어진 조건을 만족시키려면
$1 \le x < e$일 때 $g(x) \le f(x)$이고,
$x \ge 1$일 때 $g(x) \ge f(x)$이어야 한다.
따라서 일차함수 $g(x)$의 기울기의 최솟값 $h(t)$는 다음과 같다.
(ⅰ) 점 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y=-t+\ln x\ (x \ge e)$에 그은 접선이 존재하지 않을 때



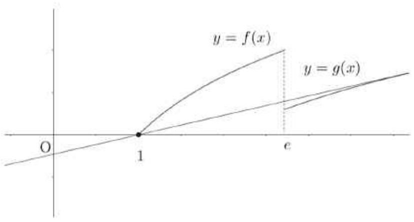
두 점 $(1,\ 0)$, $(e,\ f(e))$를 지나는 직선의 기울기가 $h(t)$이다.

즉, $h(t)=\dfrac{-t+\ln e}{e-1}=\dfrac{-t+1}{e-1}$이다.

이때, $h'(t)=\dfrac{-1}{e-1}$이므로

$$h'\left(\frac{1}{2e}\right)=\frac{-1}{e-1}$$

(ⅱ) 점 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y=-t+\ln x\ (x \ge e)$에 그은 접선이 존재할 때



그 접선의 기울기가 $h(t)$이다.

이때 $f'(x)=\dfrac{1}{x}\ (x \ne e)$이므로 접점의 x좌표를 α라 하면

$$h(t)=\frac{1}{\alpha}$$

이다.
한편, 접점 $(\alpha,\ -t+\ln\alpha)$에서의 접선의 방정식은

$$y-(-t+\ln\alpha)=\frac{1}{\alpha}(x-\alpha)$$

이다.
이 접선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$$t-\ln\alpha=\frac{1}{\alpha}-1$$

$$\ln\alpha+\frac{1}{\alpha}=t+1$$

이때 $h(t)=\dfrac{1}{\alpha}$이므로

$$\ln\frac{1}{h(t)}+h(t)=t+1$$

즉, $h(t)-\ln h(t)=t+1$이다.

위 등식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$h'(t)-\frac{h'(t)}{h(t)}=1$$

이므로 $h'(t)=\dfrac{h(t)}{h(t)-1}$이다.

한편, 두 점 $(1,\ 0)$, $(e,\ f(e))$, 즉 두 점 $(1,\ 0)$, $(e,\ -t+1)$을 지나는 지선의 기울기는

$$\frac{-t+1}{e-1}$$

이고, 점 $\lim_{x\to e+}f'(x)=\dfrac{1}{e}$이므로

$$\frac{-t+1}{e-1}>\frac{1}{e}$$

즉, $t<\dfrac{1}{e}$이면

$$h(t)=\frac{-t+1}{e-1}$$

이므로

$$h'(t)=\frac{-1}{e-1}$$

이고,

$$\frac{-t+1}{e-1}\le\frac{1}{2}$$

즉, $t\ \ge\ \dfrac{1}{e}$이면

$$h(t)-\ln h(t)=t+1$$

이므로

$$h'(t)=\frac{h(t)}{h(t)-1}$$

이다.

$\dfrac{1}{2e}<\dfrac{1}{e}$이므로

$$h'\left(\frac{1}{2e}\right)=\frac{-1}{e-1}$$

한편, $t\ \le\ \dfrac{1}{e}$에서 $h(t)=\dfrac{-t+1}{e-1}$의 최솟값은

$$h\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{-\frac{1}{e}+1}{e-1}=\frac{1}{e}$$

이다.

한편, 양수 a에 대하여 $h(a)=\dfrac{1}{e+2}$일 때

$$h(a)=\frac{1}{e+2}<\frac{1}{e}=h\left(\frac{1}{e}\right)$$

이므로 $a>\dfrac{1}{e}$이다.

따라서

$$h'(a)=\frac{h(a)}{h(a)-1}$$

$$=\frac{\frac{1}{e+2}}{\frac{1}{e+2}-1}=\frac{-1}{e+1}$$

따라서

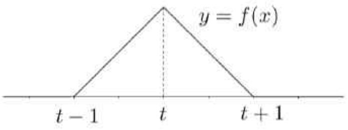
$$h'\left(\frac{1}{2e}\right)\times h'(a)=\frac{-1}{e-1}\times\frac{-1}{e+1}$$

$$=\frac{1}{(e-1)(e+1)}$$

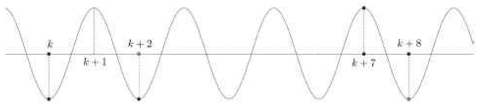
이다.

7) 21

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



한편, 함수 $y=\cos(\pi x)$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\pi}=2$이므로 홀수 k에 대하여 함수 $y=\cos(\pi x)$의 그래프는 다음과 같다.



한편, $x<t-1$ 또는 $x>t+1$일 때 $f(x)=0$이므로 닫힌 구간 $[a,\ b]$가 $(-\infty,\ t-1]$에 포함되거나 $[t+1,\ \infty)$에 포함되면

$$\int_a^b f(x)\cos(\pi x)\,dx=0$$

이다.

따라서 t의 값을 증가시키면서 함수 $g(t)$를 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $t+1 \le k$일 때

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=\int_k^{k+8} 0\times\cos(\pi x)\,dx=0$$

(ⅱ) $t-1 \le k \le t+1$일 때

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=\int_k^{t+1} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$

(ⅲ) $k \le t-1 < t+1 \le k+8$일 때

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=\int_{t-1}^{t+1} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$

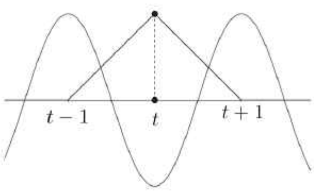
(ⅳ) $t-1 \le k+8 \le t+1$일 때

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=\int_{t-1}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$

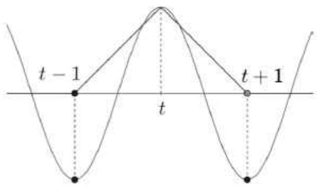
(ⅴ) $t-1 \ge k+8$일 때

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=\int_k^{k+8} =\times\cos(\pi x)\,dx=0$$

한편, 다음 그래프에서 함수 $\displaystyle\int_{t-1}^{t+1} f(x)\cos(\pi x)\,dx$는 t가 홀수일 때 극소이자 최소이고, t가 짝수일 때 극대이자 최대임을 알 수 있다.



[t가 홀수일 때]



[t가 짝수일 때]

그런데,

$$\int_0^1 (1-x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{\pi}(1-x)\sin(\pi x)\right]_0^1+\frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx$$
$$=0+\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{\pi^2}$$

이므로 t가 $k \le t-1 < t+1 \le k+8$인 홀수일 때

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=\int_{t-1}^{t+1} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1} f(x+t)\cos\{\pi(x+t)\}\,dx$$
$$=-\int_{-1}^{1}(1-|x|)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=-2\int_0^1 (1-x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=-\frac{4}{\pi^2}$$

이고, t가 $k \le t-1 < t+1 \le k+8$인 짝수일 때

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=\int_{t-1}^{t+1} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1} f(x+t)\cos\{\pi(x+t)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(1-\{x\})\cos(\pi x)\,dx$$
$$=2\int_0^1 (1-x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=\frac{4}{\pi^2}$$

이다.

그런데 k는 홀수이므로 함수 $g(t)$는 다음과 같이 극솟값을 갖는다.

(1) $t=k$에서 극솟값

$$\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=\int_k^{k+1} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=-\int_0^1 (1-x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=-\frac{2}{\pi^2}$$

을 갖는다.

(2) $t=k+8$에서 극솟값

$$\int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=\int_{k+7}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=-\int_{-1}^{0}(1+x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=-\int_{0}^{1}(1-x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=-\frac{2}{\pi^2}$$
를 갖는다.

(3) $t=k+2$에서 극솟값

$$\int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=\int_{k+1}^{k+3} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=-\int_{-1}^{1}(1+x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=-2\int_{0}^{1}(1-x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=-\frac{4}{\pi^2}$$
를 갖는다.

(4) $t=k+4,\ +6$에서도 (3)과 마찬가지로 극솟값
$$-\frac{4}{\pi^2}$$
를 갖는다.

이상에서

$\alpha_1=k,\ \alpha_2=k+2,\ \alpha_3=k+4,\ a_4=k+6,\ \alpha_5=k+8$

이고,

$$g(\alpha_1)=g(\alpha_8)=-\frac{2}{\pi^2}$$
$$g(\alpha_2)=g(\alpha_3)=g(\alpha_4)=-\frac{4}{\pi^2}$$
이다.

이때 $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=5k+20=45$이므로

$k=5$

또,

$$\sum_{i=1}^{m} g(\alpha_i)=\sum_{i=1}^{5} g(\alpha_i)$$
$$=-\frac{1}{\pi^2}(2+4+4+4+2)$$
$$=-\frac{16}{\pi^2}$$

따라서

$$k-\pi^2\sum_{i=1}^{m} g(\alpha_i)=5-\pi^2\times\left(-\frac{16}{\pi^2}\right)$$
$$=5+16=21$$