



신재민의 수학공간

수학 영역

1

올바른 개념공부#1 -기본개념편

안녕하세요 신sun입니다.

2018년 들어와서 쓰는 두 번째 칼럼입니다.

이제부터 일주일에 한 회씩

수능 수학을 공부하면서 도움될만한 글을 차근차근 연재할 예정이니

다들 팔로우하시고 빠르게 읽어보시길 바랍니다.

저번 칼럼에서 다룬 내용은

수능수학을 바라보는 태도 및 관점과

개념공부부터 어떻게 공부해야 킬러문제까지 풀 수 있는 실력을 갖출 수 있는지에 대해

각 단계별로 간단하게 얘기해보았습니다.

혹여라도 안 보신 분 있다면, 잠시 시간을 내어 보시길 바랍니다.

오늘은 어떤 얘기를 해볼 것인가.

바로, 개념학습은 정확히 어떻게 해야하는 것인지

그 방법에 대해 소개하고,

과연 얼마나 깊게 해야하는 지, 그 정도에 대해 얘기해보겠습니다.

개념공부를 잘 못하고 있는 학생들을 쏘 보면 대부분 이렇습니다.

1.유명강사의 실전개념 강의를 들으면서 별 생각없이 내용복습 함

2. 개념은 핵심만 읽고 외운 뒤, 시중 문제집을 풀면서 해설지를 참고만 한답시고, 해설지가 있어야 문제를 풀 수 있는 상태로 공부를 함

여러분들도 아시다시피, 이 방식으로 공부하면 편합니다.

대부분 학생들이 해설지를 보면서 문제를 풀 때

내가 스스로 이 문제를 풀기위해 어떠한 개념을 사용하며, 무슨 논리체계를 갖고 풀이과정이 진행되는지에 대한 생각을 따로 하지 않기 때문에 쉽고 편합니다.

개념을 제대로 공부하고 그 것을 통해 문제에 적용하는 것은 간단합니다.

각 단원별 내용 (정의, 증명과정, 정리, 따름정리 등)이 기계적으로 특 튀어나올 정도로 공부해야 하며, 그 개념의 내용 또한 편식하지 않고 빠짐없이 알고 있어야 한다.

예제 4

함수 $f(x)=|x-1|$ 은 $x=1$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않음을 보여라.

풀이 (i) $x=1$ 에서의 연속성을 조사하여 보자.

$$f(1)=0 \text{이고, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} |x-1| = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

따라서 함수 $f(x)=|x-1|$ 은 $x=1$ 에서 연속이다.

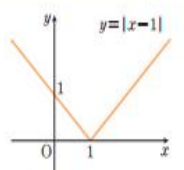
(ii) $x=1$ 에서의 미분가능성을 조사하여 보자.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)-0}{x-1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)-0}{x-1} = 1$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 은 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)=|x-1|$ 은 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.



풀이 참조

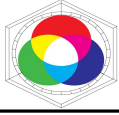
(출처- 미래N 교과서)

예를 들면 다음과 같다.

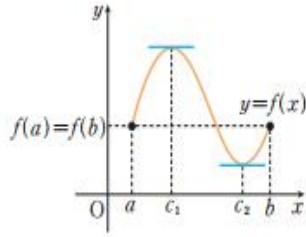
별 거 아닌 것 같아보이지만, 꼭 해야한다.

미분가능성의 정의를 다시 한 번 확인할 수 있는 좋은 문제이다.

단순히, 옛 저건 첨점이자나! 당연히 안되지 라고 넘기지 말란 얘기입니다.



함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린 구간 (a, b) 에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$ 이면 오른쪽 그림과 같이 열린 구간 (a, b) 에서 곡선 $y=f(x)$ 는 기울기가 0인 접선을 가짐을 알 수 있다.



일반적으로 다음 정리가 성립하는데, 이를 **롤의 정리**라고 한다.

롤의 정리

함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린 구간 (a, b) 에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$ 이면

$$f'(c)=0$$

인 c 가 a 와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

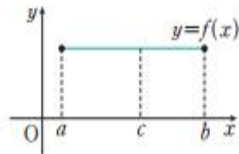
(출처- 미래N 교과서)

롤의 정리를 보고 저 내용만 주구장창 암기하는 것이 아니라,

최대·최소 정리를 이용하여 롤의 정리를 증명하여 보자.

[1] 함수 $f(x)$ 가 상수함수인 경우

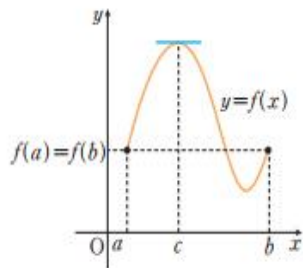
열린 구간 (a, b) 에 속하는 모든 c 에 대하여 $f'(c)=0$ 이다.



[2] 함수 $f(x)$ 가 상수함수가 아닌 경우

$f(a)=f(b)$ 이므로 최대·최소 정리에 의하여 함수 $f(x)$ 는 열린 구간 (a, b) 에 속하는 $x=c$ 에서 최댓값 또는 최솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$ 가 $x=c$ 에서 최댓값을 가질 때, 절댓값이 충분히 작은 실수 $h(h \neq 0)$ 에 대하여 $f(c+h)-f(c) \leq 0$ 이므로



$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$

이 성립한다.

그런데 함수 $f(x)$ 가 $x=c$ 에서 미분가능하므로 좌극한과 우극한이 같다. 즉,

$$0 \leq \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$

이므로 다음이 성립한다.

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = 0$$

같은 방법으로 함수 $f(x)$ 가 $x=c(a < c < b)$ 에서 최솟값을 가질 때도 $f'(c)=0$ 임을 보일 수 있다.

(출처- 미래N 교과서)

이 내용의 증명과정도 꼭 해보라는 얘기입니다.

본 내용은, 어떠한 열린구간 안에서의 최대/최소를 미분계수를 이용해서 표현할 수 있다는 것도 배울 수 있다.

며칠 전 박주혁 선생님께서도 언급하신 내용입니다.

마지막 예를 들어보면

이산확률변수 X 의 기댓값(평균), 분산, 표준편차

① 기댓값(평균) $E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$

② 분산 $V(X) = E((X-m)^2) = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i$
 $= \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - m^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

③ 표준편차 $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

이 것만 주구장창 외우지 말고,

$$V(X) = E((X-m)^2) = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i$$

이다. 이것을 다음과 같이 구할 수도 있다.

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - 2m \sum_{i=1}^n x_i p_i + m^2 \sum_{i=1}^n p_i \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - 2m^2 + m^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - m^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \end{aligned}$$

(출처- 미래N 교과서)

분산이 구해지는 과정도 한 번씩 해보자는 이야기다.

분명 큰 도움 될 것입니다.

또한, 문제를 풀 때, 꼭 교과개념을 활용해서 문제를 푸려고 해야한다.

(내가 푸는 풀이의 이유를, 교과개념으로 설명할 수 있어야 한다)

예를 들면 다음과 같습니다.



문제 4

다음은 수지가 흰 공 3개와 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 두 공이 서로 다른 색일 확률을 구한 것이다. 잘못된 이유를 설명하고, 올바른 풀이를 말하여라.



나올 수 있는 경우는 흰공과 흰공, 흰공과 검은공, 검은공과 검은공의 3가지가 있으므로 두 공이 서로 다른 색일 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다.

(출처- 미래N 교과서)

위의 문제를 정확하게 수학적확률을 활용하기 위해서

‘모든 근원사건의 발생확률은 똑같아야 한다’를 만족시키기 위해서

‘각 공들을 모두 다르게 취급해야 한다’라는 것을 이해하고 있어야 한다. 그래야 문제의 답이 조합으로 사용한다는 것을 알 수 있다.

참고로 조합은 서로다른 n 개 중에서 r 개를 선택한다 는 의미이다



흰 공과 흰 공, 흰 공과 검은 공, 검은 공과 검은 공이
나올 가능성은 모두 동일하지 않으므로 두 공이 서로
다른 색일 확률은 $\frac{1}{3}$ 이 아니다.

각각의 확률은 다음과 같다.

(i) 흰 공과 흰 공이 나올 확률은

$$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$$

(ii) 흰 공과 검은 공이 나올 확률은

$$\frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_5C_2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

(iii) 검은 공과 검은 공이 나올 확률은

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$$

따라서 두 공이 서로 다른 색인 경우는 (ii)이고, 그때의
확률은 $\frac{3}{5}$ 이다.

또한 강의를 수강하고 복습할 때에도 마찬가지입니다.

강의 듣는 것은 의외로 재밌고

수업내용을 필기하는 것은

무언가 이유모를 뿌듯함과 마음의 안정을 줍니다.

그리고 배운 수업내용을 꼭 다시 읽고 이해하면 되고

좀 전에 풀어준 문제를 다시 푸는 건 그닥 어려운 것이 아니기 때문
에 쉽고 편합니다.

하지만, 결코 유명 선생님의 수능에 최적화된 수업 내용 및 지식을
본인의 것으로 만드는 것은 그리 쉽지 않습니다.

공부한 만큼 성적이 안 나오는 이유이기도 합니다.

상답을 해오는 학생의 80% 이상이

~~선생님의 인강을 따라가고 있다.

이 커리큘럼대로 가면 2등급은 되나요?

복습은 두 번 이면 충분하겠죠?

이런 말도 안 되는 질문을 많이 합니다.

기출문제도 마찬가지지만, 몇 회독을 하느냐가 중요한 것이 아니라,
어떻게 공부하는 지가 훨씬 중요한 법인데
이 부분을 간과한 채 단순히 횟수에 집착하게 됩니다.

강의를 수강할 때 제대로 공부하는 방법은

우선 100프로 수학적으로 이해가 되도록 교재복습 및 수업내용을 꼼
꼼히 봅니다.

이 때, A4용지를 옆에다 두고 적어가며 직접 증명과정도 다 써가면
서 그 과정들을 유기적으로 이해하고, 각 내용을 암기합니다.

가장 쉽게 나름 복습을 잘 했는지 확인하는 방법은

배운 개념의 내용 혹은 문제의 풀이를 백지에 나름 술술 적어 내려
가거나 구두로 얘기할 수 있을 정도면 됩니다.

더불어서 시간이 된다면, 자세한 개념서를 활용해서

위에서 언급한대로 혼자서 개념공부를 하는 것을 병행하는 게 좋습
니다.

이 때, 공부하기 적합한 교재는 맨 마지막에 말씀드리겠습니다.

정리하자면,

개념을 공부하는 것은 어렵게 생각할 필요가 없다.

단순하게 생각하면, 교과서(개념서)의 내용을 빠짐없이
수학적(논리적)으로 증명하거나 이해할 수 있을 정도까지 공부한다.

이 부분은 잘 안 나오지 않을까?

이 것만 알아도 되지 않을까?

라는 생각은 넣어둔다.

단, 인강을 수강할 땐,

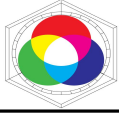
맹목적으로 받아들이고 생각없이 복습하는 것이 아니라

내용을 100프로 이해 및 암기하고 선생님이 설명하는 흐름과 내용을
모두 백지 한 장 놓고 써내려가면서 복습한다.

절대 눈으로 공부하지 않는다.

그러면 몇 문제를 통해 꼼꼼한 개념학습의 중요성을
얘기해보겠습니다.

아래 문제들은 문/이과 모두 볼 수 있도록 미적분 1 내용을 담았습
니다.



문제를 보기 앞 서,

극대/극소에 대한 교과서 내용을 먼저 보고 가겠습니다.

$x=a$ 를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x 에 대하여

$$f(x) \leq f(a)$$

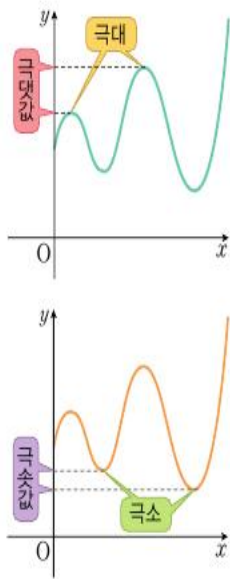
이면 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 **극대**가 된다고 하고, 그때의 함수값 $f(a)$ 를 **극댓값**이라고 한다.

또, $x=a$ 를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x 에 대하여

$$f(x) \geq f(a)$$

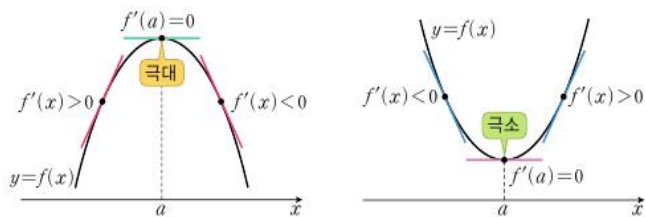
이면 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 **극소**가 된다고 하고, 그때의 함수값 $f(a)$ 를 **극솟값**이라고 한다.

이때 극댓값과 극솟값을 통틀어 **극값**이라고 한다.



미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극값을 가지면 극값의 정의에 의하여 $x=a$ 의 좌우에서 함수의 증가와 감소가 바뀌므로 도함수 $f'(x)$ 의 부호가 바뀐다.

이때 $f'(x)$ 의 부호의 변화를 그래프로 알아보면 다음과 같다.



따라서 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 극대와 극소는 다음과 같이 판정할 수 있다.

극대와 극소의 판정

미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(a)=0$ 일 때, $x=a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가

- ① 양(+)에서 음(-)으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$ 를 갖는다.
- ② 음(-)에서 양(+)으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$ 를 갖는다.

(출처 - 미래N 미적분1 교과서)

이 내용을 잘 기억하시고 문제를 풀어보세요!

15학년도 9월 A형 17번 문제입니다.

24. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+a$ 의 모든 극값의 곱이 -4 일 때, 상수 a 의 값은?

[4점][2014년 9월]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

조건 극값의 곱을 물어왔으니,

극값이 되는 x 값을 먼저 구한다.

$f(x)$ 는 다항함수 이므로, $\forall x$ 대해 미분가능하다.

$\therefore f'(x)=0$ 이면서, 좌/우에서 미분계수의 부호가 바뀌면 -

그 x 값이 극값이 되는 것!

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \quad \therefore x=0, \quad 2$$

$$\therefore f(0) = a \quad f(2) = 8 - 12 + a = a - 4$$

$$\therefore a(a-4) = -4 \quad a^2 - 4a + 4 = 0 \quad \therefore a = 2$$

이 문제는 쉬웠죠?

극값 구하자! 우선 미분해서 0되는 값 찾자!

그냥 여러분 평소 하던 습관대로 문제를 풀어도 풀리기 때문이죠.

다음 문제를 보겠습니다.

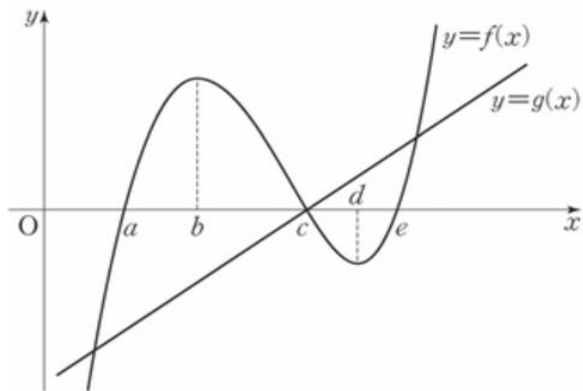
17학년도 6월 나형 18번 문제입니다.

그냥 대충 풀면 의외로 까다롭습니다.

잘 생각해서 풀어보세요



29. 삼차함수 $y=f(x)$ 와 일차함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 그림과 같고, $f'(b)=f'(d)=0$ 이다.



함수 $y=f(x)g(x)$ 는 $x=p$ 와 $x=q$ 에서 극소이다. 다음 중 옳은 것은? (단, $p < q$)

[4점][2016년 6월]

- ① $a < p < b$ 이고 $c < q < d$
- ② $a < p < b$ 이고 $d < q < e$
- ③ $b < p < c$ 이고 $c < q < d$
- ④ $b < p < c$ 이고 $d < q < e$
- ⑤ $c < p < d$ 이고 $d < q < e$

이런이도 똑같이 미분해서 =0 되는 구간을 찾아볼까요?

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 0 \text{ 되는 구간이 극대 or 극소 인가?}$$

이때부터, 극대/극소 공식을 $()' = 0$ 으로만 생각해, 어떤 학생들은...

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 0 \text{ 이니까, } f'(x)g(x) = -f(x)g'(x)$$

라고 생각하, 많은 문제가 생깁니다!

극대/극소의 거의 모든 문제는 공식과 원리에 맞게 제대로 풀어야 합니다.

이런 문제에서 상당히 쉽게 풀 수 있습니다.

우선 이점을 보면, 그래프가 생겼습니다. '아~ 맞다'가 나왔습니다.

라는 감이 드는 때는 대조!

생각: '개념을 꼼꼼히 체크 해 보는 것 + 본인이 편하게 쓸 수 있는 것만 사용하는 것.'

을 본인이 이해하고, 개념을 다시 보며 꼼꼼하게 본인이 재확인 합니다.

주요 인자에서 양하는 것들을 주의해서 본인이 갖고 있는 문제 유형에 맞춰서 해 보면 됩니다.

그래서 이번에는 '이제 + 이해 + 풀이' (이해는 생략하는...)로

본인이 스스로 재확인 합니다.

그럼 어떻게 풀어야 하나?

$x=p$, $x=q$ 에서 극소인 것은, $f(x)g(x)$ 는 양함수인 것이기에 풀어야 합니다.

$x=p$, $x=q$ 의 좌/우에서 함수의 변화 패턴 $\rightarrow (f(x)g(x))' = 0$ 에서의 함수변화를

관찰해야 한다는 것이다.

+ 생략도 가능합니다. $x=a, b, c, d, e$ 에서의 함수의 증감변화 (미분계수 부호 등)를

확인하면 됩니다!

잘 보일 지는 모르겠지만,

이해가 좀 되시나요?

극대/극소만 나오면 미분해서 =0 만 머릿속에 있는 학생은 아마 조금은 어려웠을 것이라 생각이 듭니다.

'개념을 얼마나 깊이 공부해야 하나'는

제가 완벽한 기준을 제시드리긴 힘들겠지만,

최소한 교과서에 서술되어있는 내용을 '모두' 알고있어야 한다고 생각합니다.

여기서 '안다' 라는 것은 시험에 자주 써먹는 내용만을 부분적으로 알고 있는 것이 아니라

모든 내용을 알고있어야 하며 직관적인 이해와 더불어 교과서에 서술되어 있다면, 수학적으로 증명 및 확인까지 해야한다는 것입니다.

그렇게 개념공부를 접근해야, 문제를 풀 때에도 배운 개념을 활용하여 문제를 풀 수 있게 됩니다.

문제를 풀 때, 내가 어떠한 풀이를 써내려가는 과정에서

필요한 수학적 지식을 근거있게 사용할 수 있게 되며,

궁극적으로 킬러문제를 풀기위해 갖춰야할 생각하는 능력을 키울 수 있게 됩니다.

센과 같은 굉장히 많은 유형문제를 풀고

해설지를 보고 해설지의 생각을 단순 암기식으로 공부했던 학생은,

그 것이 본인의 생각으로 바뀌기 위해 또 다른 여러 문제들로 검증

해야 하고, 그 과정에서 문제가 조금만 바뀌어도

풀 수 없는 상태가 되는 것입니다.

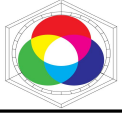
그래서 이번 개념은 아는데 문제를 못 푼다.

라는 얘기가 나오는 것이구요.

다르게 공부해야 합니다.

불편하더라도, 그냥 알고있던 내용을 다시 수학적으로 점검하고, 그

내용을 바탕으로 문제에 적용하는 연습이 꼭 필요합니다.



그래서 더더욱 유명 강사분들의 실전개념 수업을 듣기 전 혹은 병행하여 ‘스스로’ 개념을 다시 증명하고 확인하며 문제를 푸는 작업을 하셔야 합니다.

이 과정을 수월하게 도와주는 대표적인 책이
‘수학의 명작’, ‘한완수’ 라고 생각합니다
(절대 책 홍보 아님)

우연하게 서점에서 보고 너무 놀랐던 책입니다...

제대로 된 개념학습과 문제-개념의 간극을 없애줄 수 있는 책이죠.

만약 개념공부를 어느정도 하고 실전개념 강의를 듣는 학생이라면

이 책을 같이 병행하여 개념학습을 제대로 한 번 더 하시고,
실려있는 기출문제를 저자가 하라는대로 풀면 아마 실력상승은 보장
되지 않을까 싶습니다.

오늘의 칼럼은 여기까지입니다.

항상 가볍게 쓰려고 해도
알려드릴 내용이 너무 많아 글이 길어지게 됩니다.

긴 글 읽어주셔서 감사합니다.

지금은 문 이과 모두 미적분 공부에 힘쓰는 분들이 많기 때문에
미적분 위주의 설명을 드렸고,

추 후 칼럼들에선 문과는 수2 ,
이과는 기백까지 공부하는데 도움이 되도록 써보겠습니다

우리가 결국 해결해야하는 킬러문제를 정복하기 위해선
아직 갈 길이 멉니다.

이러한 제대로 된 기본개념학습에, 올바른 문제풀이와 분석 및 정리가
필요합니다.

다음 칼럼은 실전개념의 학습의 중요성과
제대로 기출문제를 푸는 방법에 대해 자세히 써보겠습니다.

미리 좋아요 감사합니다.