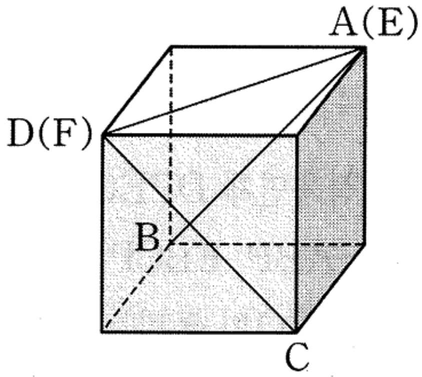
1) [정답] ⑤
주어진 전개도로 정육면체를 만들면 그림과 같다.



두 선분 AB,CD의 중점이 일치하도록 평행이동하면 직선 AB와 직선CD가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$이므로 $a=\frac{\pi}{2}$ 정삼각형 ADC에서 직선CD와 직선EF가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이므로 $b=\frac{\pi}{3}$

$\therefore a+b=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi$

2) [정답] ③
꼭짓점 A에서 두 모서리BE,CD에 내린 수선의 발을 각각M,N이라 하면 두 삼각형 ABE,ACD는 이등변삼각형이므로 두점 M,N은 각각 선분 BE,선분CD의 중점이다.

$\therefore \overline{BC}=\overline{MN}$

두 평면 ABE,ACD가 이루는 각의 크기가60°이므로 삼각형 AMN에서 $\angle MAN=60°$이고

$\overline{AM}=\overline{AN}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

따라서 삼각형 AMN은 정삼각형이므로

$\overline{MN}=2\sqrt{2}$

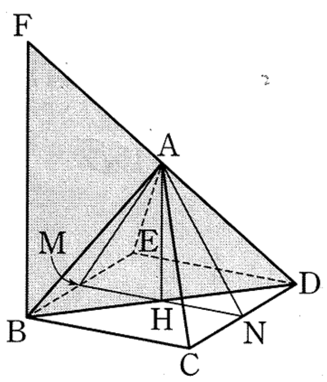
즉, $\overline{BC}=2\sqrt{2}$이므로 $\overline{BD}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+2^2}=2\sqrt{3}$

꼭짓점 A에서 밑면에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 AHD에서

$\overline{AH}=\sqrt{3^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$

$\overline{AH}:\overline{FB}=1:2$이므로

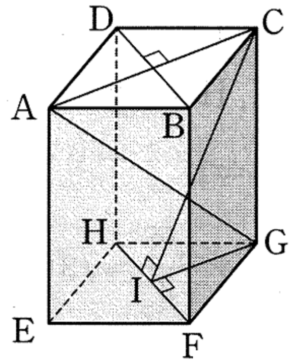
$\overline{FB}=2\overline{AH}=2\sqrt{6}$



따라서 삼각형 FBD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{FB}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2\sqrt{6}=6\sqrt{2}$

3) [정답] 15



$\overline{CG}$는 직사각형 ABCD와 수직이므로 $\overline{CG}\perp\overline{BD}$이고, 주어진 조건에서 $\overline{AG}\perp\overline{BD}$이므로 $\overline{CG}$와 $\overline{AG}$에 의하여 만들어진 평면 ACG는
$\overline{BD}$와 수직이다.
그러므로 평면 ACG위의 $\overline{AC}$는 $\overline{BD}$와 수직이다.
$\overline{AC}$와 $\overline{BD}$는 직사각형 ABCD의 수직인 두 대각선이므로 직사각형 ABCD는 정사각형이다.

$\therefore a=2$

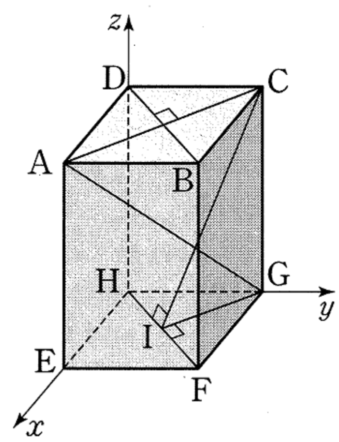
꼭짓점 C에서 선분 FH에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{IG}\perp\overline{FH}$이다.
밑면이 한 변의 길이가 2인 정사각형이므로

$\overline{IG}=\sqrt{2}$

$\therefore b^2=(\sqrt{2})^2+3^2=11$

$\therefore a^2+b^2=4+11=15$

다른풀이



그림과 같이 좌표공간을 설정하면 네 점 A, B, D, G의 좌표는
A$(a,\ 0,\ 3)$, B$(a,\ 2,\ 3)$, D$(0,\ 0,\ 3)$, G$(0,\ 2,\ 0)$

$\overrightarrow{AG}=(-a,\ 2,\ -3)$, $\overrightarrow{BD}=(-a,\ -2,\ 0)$이므로

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}=a^2-4=0$

$\therefore a=2$

꼭짓점 C에서 선분 FH에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{IG}\perp\overline{FH}$이다.
밑면이 한 변의 길이가 2인 정사각형이므로

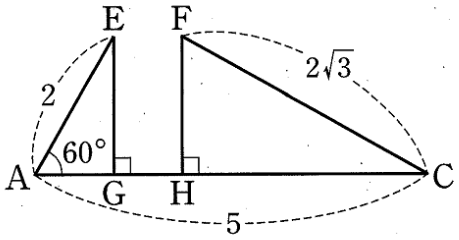
$\overline{IG}=\sqrt{2}$

$\therefore b^2=(\sqrt{2})^2+3^2=11$

$\therefore a^2+b^2=4+11=15$

4) [정답] ②

평면 ABE와 평면 ABDC가 이루는 각의 크기는 두 선분 AE, AC가 이루는 각의 크기와 같다.



직선 EF가 평면 ABDC와 평행하므로 두 점 E,F에서 평면 ABDC에 내린 수선의 발을 각각 G,H라 하면

$\overline{AG}=\overline{AE}\cos60^\circ=2\times\frac{1}{2}=1$

$\overline{EG}=\overline{FH}=\overline{AE}\sin60^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

직각삼각형 FCH에서

$\overline{CH}=\sqrt{\overline{FC}^2-\overline{FH}^2}=\sqrt{12-3}=3$

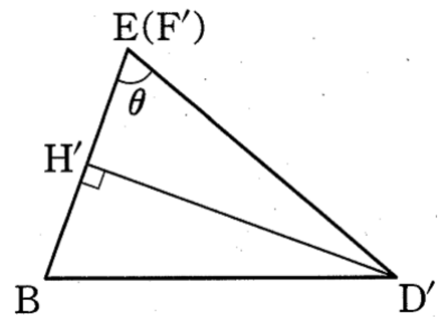
$\therefore \overline{EF}=\overline{GH}=5-1-3=1$

[그림2]에서 선분 FD를 두 점 E,F가 일치하도록 평행이동한 선분을 선분 F′D′이라 하면 삼각형 EBD′에서 $\angle \mathrm{BED'}=\theta$이고

$\overline{EB}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$\overline{ED'}=\overline{FD}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$

$\overline{BD'}=5-1=4$



즉, 삼각형 EBD′은 이등변삼각형이므로 그림과 같이 점D′에서 $\overline{EB}$에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$\overline{EH'}=\frac{1}{2}\overline{EB}=\sqrt{2}$

따라서 직각삼각형 EH′D′에서

$\cos\theta=\frac{\overline{EH'}}{\overline{ED'}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

5) [정답] ④

x절편,y절편이 각각 2,1인 직선 l의 방정식은 $\frac{x}{2}+y=1$, $z=0$

이므로 점P의 좌표를 $(2-2b,\ b,\ 0)$으로 놓을 수 있다.

$A(0,\ 0,\ 3)$,$B(5,\ 4,\ 0)$이고 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(2-2b)^2+b^2+(-3)^2=(2-2b-5)^2+(b-4)^2+(0-0)^2$

$5b^2-8b+13=5b^2+4b+25$

$12b=-12$

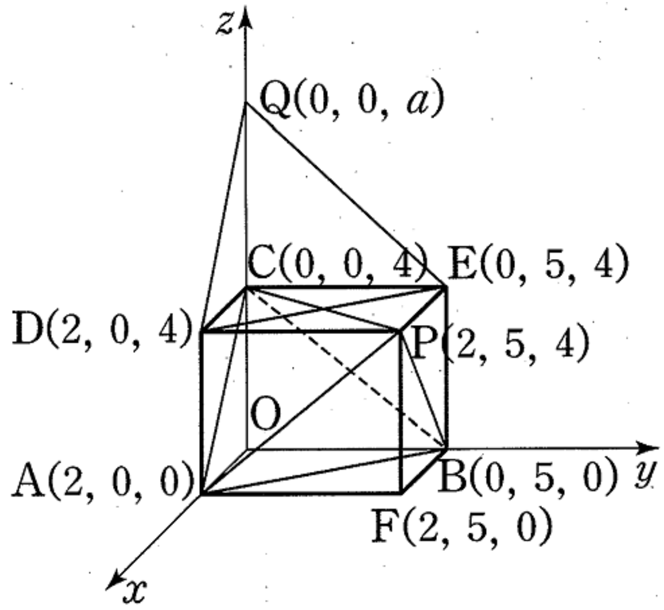
$\therefore b=-1$

따라서 점P의 좌표는 $(4,\ -1,\ 0)$이므로

$a+b+c=4+(-1)+0=3$

6) [정답] 12

점 $P(2,\ 5,\ 4)$에서 xy평면에 내린 수선의 발을 F라 하면 점 A, B, C와 점 D, E, F의 좌표는 그림과 같다.



사면체 QCDE의 부피는

$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times5\right)\times|a-4|=\frac{5|a-4|}{3}$

사면체 PABC의 부피는 직육면체 DPEC－AFBO의 부피에서 네사면체 OABC, DAPC, FABP, EBCP의 부피를 빼면 된다.

이때 직육면체 DPEC－AFBO의 부피는 $2\times5\times4=40$이고, 네 사면체 OABC, DAPC, FABP, EBCP의 부피는 모두 $\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times2\times5)\times4=\frac{20}{3}$이므로 사면체 PABC의 부피는

$40-4\times\frac{20}{3}=\frac{40}{3}$

$\frac{5|a-4|}{3}=\frac{40}{3}$ 에서 $|a-4|=8$

$\therefore a=12(\because a>0)$

7) [정답] ④

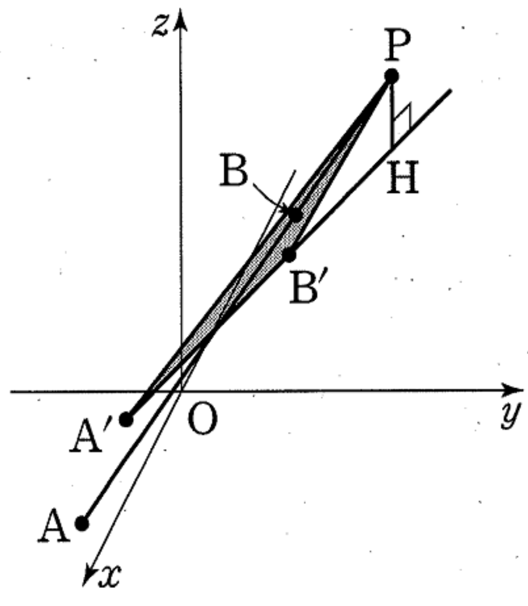
선분 AB를 3:1로 외분하는 점 P의 좌표는

$P\left(\frac{3\times(-1)-1\times7}{3-1},\ \frac{3\times4-1\times(-2)}{3-1},\ \frac{3\times5-1\times(-1)}{3-1}\right)$

즉,$P(-5,\ 7,\ 8)$

두 점 A,B에서 yz평면에 내린 수선의 발 A′, B′의 좌표는

$A'(0,\ -2,\ -1)$,$B'(0,\ 4,\ 5)$



점 P에서 yz평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 $H(0,\ 7,\ 8)$이고, 점H는 선분 A′B′의 연장선 위에 있다.

따라서 삼각형 PA′B′에서 밑변을 $\overline{A'B'}$이라 할 때, 높이는 $\overline{PH}$이므로 삼각형 PA′B′의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{A'B'}}\times\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{(4+2)^2+(5+1)^2}\times5$$
$$=\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times5=15\sqrt{2}$$

8) [정답] 14

두 점 $\mathrm{A}(3,\ -3,\ 5m)$, $\mathrm{B}(-3,\ 5,\ n+4)$를 이은 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점이 zx평면 위에 있으므로 내분점의 y좌표는 0이다.

즉, $\dfrac{5m-3n}{m+n}=0$이므로 $5m=3n$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-3-3)^2+(5+3)^2+(n+4-5m)^2}$

$=\sqrt{(-3-3)^2+(5+3)^2+(n+4-3n)^2}$

$=\sqrt{6^2+8^2(2n-4)^2}$

이므로 $n=2$일 때 선분 AB의 길이가 최소가 된다.

$n=2$를 ㉠에 대입하면 $5m=6$

$\therefore m=\dfrac{6}{5}$

따라서 $\alpha=\dfrac{6}{5}$, $\beta=2$이므로

$10\alpha+\beta=12+2=14$

9) [정답] ②

(i)구의 중심 $(a,\ 3,\ 1)$과 yz평면 사이의 거리는 $|a|$이므로 $|a|\le\sqrt{17}$ 이면 구는 yz평면과 만난다.

따라서 정수a는 0, ±1, ±2, ±3, ±4이다.

(ii)구의 중심 $(a,\ 3,\ 1)$과 z축 사이의 거리는 $\sqrt{a^2+9}$ 이므로 $\sqrt{a^2+9}>\sqrt{17}$ 이면 구는 z축과 만나지 않는다.

따라서 정수 a는 $\pm3, \pm4, \pm5$, $\cdots$이다.

(i),(ii)에서 구하는 정수 a는 $\pm3, \pm4$의4개이다.

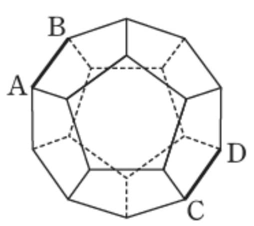
10) ③

[해설]

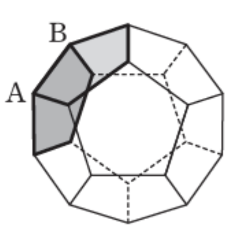
직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선은 정십이면체의 30개의 모서리를 연장한 직선 중에서 다음 각 경우에 해당하는 직선을 제외하면 된다.

(i) 직선 AB 자신과 직선 AB와 평행한 직선(아래 그림의 직선 CD)

: 2개

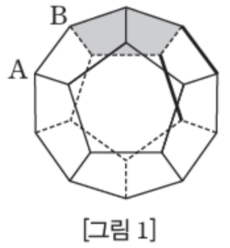


(ii) 직선 AB를 포함하는 두 면에 포함된 직선 중 직선 AB가 아닌 것: 8개

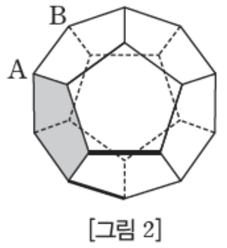


(iii) [그림 1]의 색칠한 면에 포함된 B를 제외한 4개의 꼭짓점을 각각 지나면서 색칠한 면에 포함되지 않는 직선은 모두 직선 AB와 한 점에서 만나므로 제외한다. 마찬가지로 [그림 2]의 색칠한 면에 포함된 A를 제외한 4개의 꼭짓점을 각각 지나면서 색칠한 면에 포함되지 않는 직선도 제외한다.

(ii) 와 중복된 경우를 제외한 직선(아래 그림의 굵은 선) : 4개

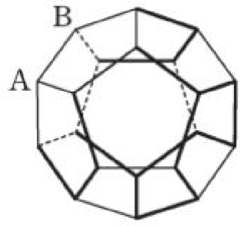


[그림 1]



[그림 2]

(i), (ii), (iii)의 경우를 제외한 모든 직선은 직선 AB와 평행하지 않고 만나지 않으므로 꼬인 위치에 있다.(아래 그림의 굵은 선)



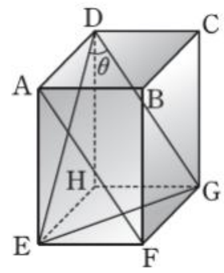
따라서 구하는 직선의 개수는

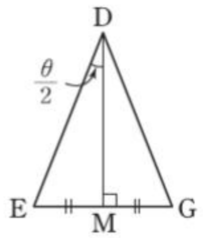
$30-2-8-4=16$

11) ⑤

[해설]

$\overline{AF}//\overline{DG}$이므로 직선$AF$와 직선 DE가 이루는 예각의 크기는 직선 DG와 직선 DE가 이루는 예각의 크기와 같다.





이때 삼각형 $\overline{DE}=\overline{DG}=\sqrt{13}$, $\overline{EG}=2\sqrt{2}$인 이등변삼각형이다. 선분 EG의 중점을 M이라 하면 직각삼각형 DEM에서

$\angle EDM=\dfrac{\theta}{2}$

$\overline{DM}=\sqrt{\overline{DE}^2-\overline{EM}^2}=\sqrt{13-2}=\sqrt{11}$

이므로

$\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\overline{DM}}{\overline{DE}}=\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{13}}$

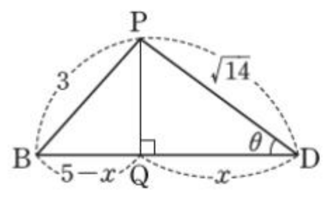
따라서

$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{11}{13}$

12) 23

[해설]

사각형 $ABCD$에서 두 점 A, C가 직선 BD에 대하여 대칭이고 사각뿔 $P-ABCD$에서 $\overline{PA}=\overline{PC}$이므로 점 P에서 평면 $ABCD$ 위에 내린 수선의 발을 Q라 하면 점 Q는 직선 BD 위에 있고, 직선 PD와 평면 $ABCD$가 이루는 예각의 크기 θ는 $\angle PDQ$의 크기와 같다.



이때 $\overline{AB}=3$, $\overline{AD}=4$, $\angle BAD=90°$이므로 $\overline{BD}=5$이고, $\overline{DQ}=x$라 하면 $\overline{BQ}=5-x$이다.

삼각형 PBD에서 $\overline{PQ}\perp\overline{BD}$이므로

$3^2-(5-x)^2=(\sqrt{14})^2-x^2$

$10x-30=0$

$x=3$

따라서 $\cos^2\theta=\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right)^2=\frac{9}{14}$ 이므로

$p+q=14+9=23$

13) 15

[해설]

{출제 의도}

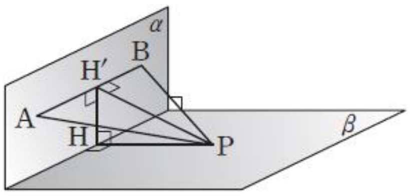
삼수선의 정리를 이용하여 직각삼각형을 찾고 피타고라스 정리를 이용하여 선분의 길이를 구한 후, 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다

{풀이}

그림과 같이 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H, 점 H에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H'이라 하면

$\overline{PH}\perp\alpha$, $\overline{HH'}\perp\overline{AB}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여



$\overline{PH'}\perp\overline{AB}$

한편, 점 A와 평면 β 사이의 거리가 2이고 직선 AB가 평면 β와 평행하므로

$\overline{HH'}=2$

또 점 P와 평면 α 사이의 거리가 4이므로

$\overline{PH}=4$

이때 삼각형 $PH'H$가 $\angle PHH'=90°$인 직각삼각형이므로

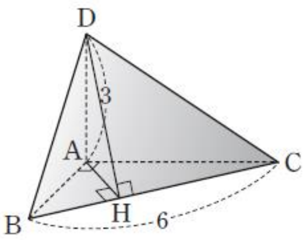
$\overline{PH'}=\sqrt{\overline{PH}^2+\overline{HH'}^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

따라서 삼각형 PAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PH'}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times2\sqrt{5}=15$

14) ③

[해설]



점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 BCD의 넓이가 12이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{DH}=\frac{1}{2}\times6\times\overline{DH}=12$

에서 $\overline{\text{오}}=4$

이때 삼각형 DAH는 $\angle DAH=90°$인 직각삼각형이므로

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{DH}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

한편, $\overline{AD}\perp$(평면 ABC), $\overline{DH}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

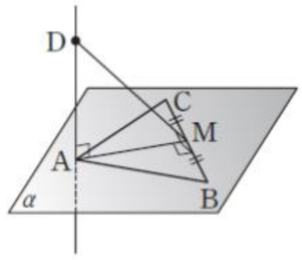
$\overline{AH}\perp\overline{BC}$이다.

따라서 사면체 $DABC$의 부피는

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\times\triangle ABC\times\overline{AD}&=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}\right)\times\overline{AD}\\&=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times\sqrt{7}\times3\\&=3\sqrt{7}\end{aligned}$$

15) ④

[해설]



선분 BC의 중점을 M이라 하면 삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{AM}\perp\overline{BC}$이다.

이때 $\overline{AD}\perp\alpha$, $\overline{AM}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{DM}\perp\overline{BC}$

이고, 점 D와 직선 BC 사이의 거리가 8이므로 $\overline{DM}=8$이다.

한편, 삼각형 DAM은 $\angle DAM=90°$인 직각삼각형이므로

$\overline{AM}=\sqrt{\overline{DM}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{64-37}=3\sqrt{3}$

정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 a라 하면

$\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a=3\sqrt{3}$

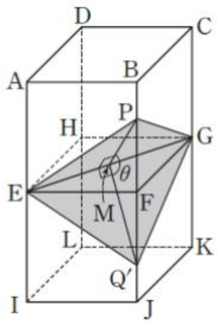
이므로 $a=6$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times36=9\sqrt{3}$

16) ⑤

[해설]



그림과 같이 정육면체 $ABCD-EFGH$와 한 면을 공유하는 정육면체 $EFGH-IJKL$에서 선분 FJ를 $2:1$로 내분하는 점을 Q'이라 하면 두 평면 QCA와 $Q'GE$가 서로 평행하므로 두 평면 PEG와 QCA가 이루는 예각의 크기는 두 평면 PEG와 $Q'GE$가 이루는 예각의 크기와 같다.

이때 선분 EG의 중점을 M이라 하면 두 삼각형 PEG, $Q'GE$가 모두 이등변삼각형이므로

$\overline{PM}\perp\overline{EG}$, $\overline{Q'M}\perp\overline{EG}$

따라서 두 평면 PEG와 $Q'GE$가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\theta=\angle PMQ'$

한편, 주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 $6a$라 하면

$\overline{PF}=\frac{2}{3}\overline{BF}=\frac{2}{3}\times6a=4a$

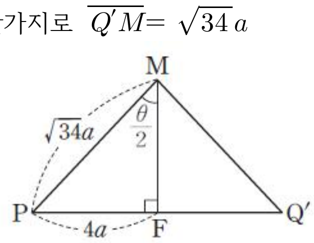
삼각형 PEG에서

$\overline{PE}=\overline{PG}=\sqrt{(6a)62+(4a)^2}=2\sqrt{13}a$, $\overline{EG}=6\sqrt{2}a$

이므로

$$\begin{aligned}\overline{PM}&=\sqrt{\overline{PE}^2-\overline{EM}^2}\\&=\sqrt{\overline{PE}^2-\left(\frac{1}{2}\overline{EG}\right)^2}\\&=\sqrt{(2\sqrt{13a})^2-(3\sqrt{2}a)^2}\\&=\sqrt{52a^2-18a^2}=\sqrt{34}a\end{aligned}$$

마찬가지로 $\overline{Q'M}=\sqrt{34}a$



이때 $\overline{MF} \perp \overline{PQ}$이고 $\angle PMF = \frac{\theta}{2}$이므로

$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{4a}{\sqrt{34}\,a} = \frac{4}{\sqrt{34}}$

$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$

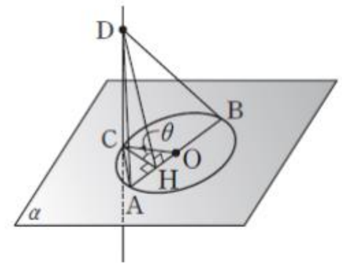
17) 31

[해설]

점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{CD} \perp \alpha$, $\overline{CH} \perp \overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{DH} \perp \overline{AB}$



따라서 평면 DAB와 평면 α가 이루는 예각의 크기 θ는

$\theta = \angle DHC$

한편, 선분 AB의 중점을 O라 하면 삼각형 AOC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로 $\overline{CH} = \sqrt{3}$

직각삼각형 DCH에서

$\overline{DH} = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{CH}^2} = \sqrt{25+3} = 2\sqrt{7}$

따라서 $\cos\theta = \frac{\overline{CH}}{\overline{DH}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$이므로

$\cos^2\theta = \frac{3}{28}$에서

$p+q = 28+3 = 31$

18) 162

[해설]

{출제 의도}

두 평면이 이루는 각의 크기를 이용하여 정사영의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

$\sin(\angle ABC) = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

이므로 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin(\angle ABC)$

$= \frac{1}{2} \times 9 \times 12 \times \frac{\sqrt{6}}{3} = 18\sqrt{6}$

한편, $\overline{AP} \perp$(평면 BCD)이고 $\overline{AQ} \perp \overline{BC}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PQ} \perp \overline{BC}$이다.

따라서 두 평면 ABC, BCD가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\theta = \angle AQP$이다.

이때 삼각형 BCP는 삼각형 ABC의 평면 BCD 위로의 정사영이므로 삼각형 BCP의 넓이 k는

$k = S\cos\theta$

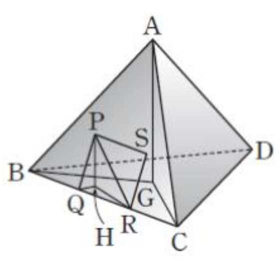
$= 18\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{6}$

$= 9\sqrt{2}$

따라서 $k^2 = 162$

19) ①

[해설]



점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 G라 하면 점 G는 삼각형 BCD의 무게중심이므로

$\triangle GBC = \frac{1}{3}\triangle BCD = \frac{1}{3}\triangle ABC$

따라서 평면 ABC와 평면 BCD가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 삼각형 ABC의 평면 BCD 위로의 정사영이 삼각형 GBC이므로

$\cos\theta = \frac{\triangle GBC}{\triangle ABC} = \frac{1}{3}$

이때 점 P에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 PR의 평면 BCD위로의 정사영이 선분 HR이다.

한편, $\overline{PQ} \perp \overline{BC}$, $\overline{PH} \perp$(평면 BCD)이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{HQ} \perp \overline{BC}$

즉, $\theta = \angle PQH$이므로 직각삼각형 PQH에서

$\overline{QH} = \overline{PQ}cos\theta = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

따라서 삼각형 HQR에서

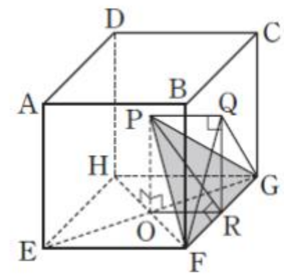
$\overline{QR} = 1$, $\overline{QH} = \frac{1}{3}$, $\angle HQR = 90°$

이므로

$\overline{HR} = \sqrt{\overline{QH}^2 + \overline{QR}^2} = \sqrt{\frac{1}{9}+1} = \frac{\sqrt{10}}{3}$

20) 52

[해설]



그림과 같이 점 P에서 평면 $BFGC$에 내린 수선의 발을 Q, 직선 FG에 내린 수선의 발을 R라 하면, 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{QR} \perp \overline{FG}$이다.

이때 삼각형 PFG의 평면 $BFGC$ 위로의 정사영이 삼각형 QFG이므로

$\triangle QFG = \frac{1}{2} \times \overline{FG} \times \overline{QR} = \frac{1}{2} \times 4 \times \overline{QR} = 6$

에서 $\overline{QR} = 3$

한편, 사각형 $PORQ$가 직사각형이므로

$\overline{PQ} = \overline{OR} = \frac{1}{2}\overline{EF} = 2$

직각삼각형 PRQ에서

$\overline{PR} = \sqrt{\overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2}$

$= \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

이므로 삼각형 PFG의 넓이 S는

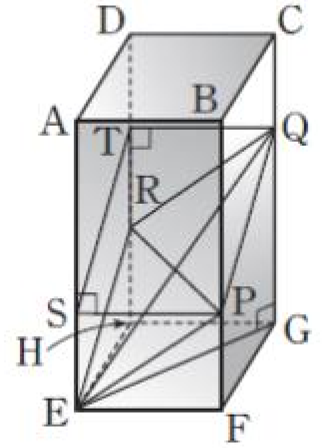
$S = \frac{1}{2} \times \overline{PR} \times FG$

$= \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times 4 = 2\sqrt{13}$

따라서 $S^2 = 52$

21) ④

[해설]



평면 EPQ와 선분 DH가 만나는 점을 R라 하면 $\overline{EP}//\overline{QR}$, $\overline{PQ}//\overline{ER}$, $\overline{EP}=\overline{PQ}$이므로 사각형 $EPQR$는 마름모이고, 점 R는 선분 DH를 $2:1$로 내분하는 점이다.

$\overline{AB}=3a$라 하면

$\overline{PR}=\overline{FH}=3\sqrt{2}a$

삼각형 EGQ에서

$\overline{EG}=3\sqrt{2}a$, $\overline{GQ}=4a$,, $\angle EGQ=90°$이므로

$\overline{EQ}=\sqrt{\overline{EG}^2+\overline{GQ}^2}$

$=\sqrt{18a^2+16a^2}=\sqrt{34}a$

이때 사각형 $EPQR$는 마름모이므로 그 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{PR}\times\overline{EQ}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}a\times\sqrt{34}a$

$=3\sqrt{17}a^2$

한편, 두 점 P, Q에서 평면 $AEHD$에 내린 수선의 발을 각각 S, T라 하면 사각형 $EPQR$의 평면 $AEHD$ 위로의 정사영이 사각형 $ERTS$이고 사각형 $ERTS$의 넓이는

$\overline{SE}\times\overline{EH}=2a\times3a=6a^2$

따라서

$\cos\theta=\frac{6a^2}{3\sqrt{17}a^2}=\frac{2}{\sqrt{17}}$

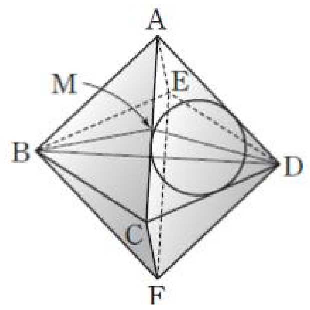
이므로

$\cos^2\theta=\frac{4}{17}$

22) ①

[해설]

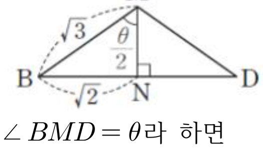
두 평면 ABC와 DEF가 서로 평행하므로 평면 ABC와 평면 DEF가 이루는 각의 크기는 평면 ACD와 평면 ABC가 이루는 각의 크기와 같다.



그림과 같이 선분 AC의 중점을 M이라 하면 두 삼각형 ABC, ACD가 모두 정삼각형이므로

$\overline{BM}\perp\overline{AC}$, $\overline{DM}\perp\overline{AC}$

삼각형 MBD가 $\overline{MB}=\overline{MD}=\sqrt{3}$, $\overline{BD}=2\sqrt{2}$인 이등변삼각형이므로 점 M에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 N이라 하면 점 N은 선분 BD의 중점이다.



$\angle BMD=\theta$라 하면

$\angle BMN=\frac{\theta}{2}$, $\overline{MN}=\sqrt{\overline{MB}^2-\overline{BN}^2}=\sqrt{3-2}=1$

이므로 $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

따라서

$\cos\theta=\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)$

$=\cos\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}sin\frac{\theta}{2}$

$=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}$

$=\cos^2\frac{\theta}{2}-\left(1-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)$

$2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=-\frac{1}{3}$

이때 평면 ACD와 평면 ABC가 이루는 예각의 크기를 α라 하면

$\alpha=\pi-\theta$이므로

$\cos\alpha=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=\frac{1}{3}$

한편, 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ACD의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$3\times\frac{1}{2}\times2\times r=\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2$, $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$

즉, 내접원의 넓이는

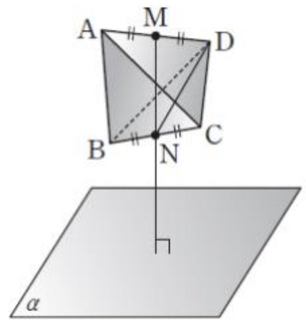
$\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{\pi}{3}$

따라서 삼각형 ACD의 내접원의 평면 DEF 위로의 정사영의 넓이는

$\frac{\pi}{3}\times\cos\alpha=\frac{\pi}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{\pi}{9}$

23) ③

[해설]



$\angle DNM=\theta$라 하면 점 M에서 평면 BCD에 내린 수선의 발이 선분 DN 위에 있으므로 직선 MN과 평면 BCD가 이루는 예각의 크기가 θ이다.

이때 삼각형 NDA가 $\overline{ND}=\overline{NA}$인 이등변삼각형이므로

$\angle NMD=90°$이다.

직각삼각형 NDM에서 $\overline{ND}=2\sqrt{3}$, $\overline{DM}=2$이므로

$\overline{MN}=\sqrt{\overline{ND}^2-\overline{DM}^2}=\sqrt{12-4}=2\sqrt{2}$

따라서 $\cos\theta=\frac{\overline{MN}}{\overline{ND}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

한편, 직선 MN과 평면 α가 서로 수직이므로 평면 BCD와 평면 α가 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\theta$이다.

이때 정삼각형 BCD의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=4\sqrt{3}$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$4\sqrt{3}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=4\sqrt{3}\times\sin\theta$

$=4\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}$

$= 4$

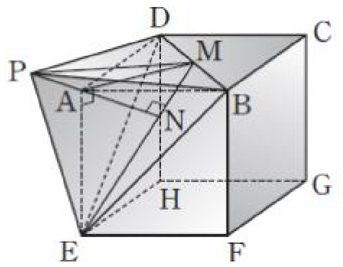
24) 200

[해설]

평면 PBD와 평면 BDE가 이루는 예각의 크기를 α, 평면 ABD와 평면 BDE가 이루는 예각의 크기를 β, 평면 PBD와 평면 ABD가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\theta = \alpha - \beta$

이고 평면 ABD와 평면 $EFGH$가 서로 평행하므로 θ는 평면 PBD와 평면 $EFGH$가 이루는 예각의 크기와 같다.



그림과 같이 선분 BD의 중점을 M이라 하면

$\overline{PM} \perp \overline{BD}$, $\overline{AM} \perp \overline{BD}$, $\overline{EM} \perp \overline{BD}$

이므로

$\alpha = \angle PME$, $\beta = \angle AME$

점 P에서 평면 BDE에 내린 수선의 발을 N이라 하면 점 N은 삼각형 BDE의 무게중심이므로 선분 EM을 $2:1$로 내분하는 점이다. 이때

$\overline{PM} = \overline{EM}$이므로

$\overline{PM} : \overline{MN} = 3:1$

직각삼각형 PNM에서

$\cos\alpha = \dfrac{\overline{MN}}{\overline{PM}} = \dfrac{1}{3}$이므로 $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

한편, 직각삼각형 AEM에서 $\overline{AE} = 2$, $\overline{AM} = \sqrt{2}$이므로

$\overline{EM} = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}$

즉, $\cos\beta = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{EM}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로

$\sin\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

이때

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \cos(\alpha - \beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{5}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

이고 삼각형 PBD의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{2})62 = 2\sqrt{3}$

이므로 구하는 정사영의 넓이 S는

$$\begin{aligned}S &= 2\sqrt{3} \times \cos\theta \\ &= 2\sqrt{3} \times \frac{5}{3\sqrt{3}} \\ &= \frac{10}{3}\end{aligned}$$

따라서

$60S = 60 \times \dfrac{10}{3} = 200$

25) ④

[해설]

{출제 의도}

좌표공간에서 대칭점의 좌표와 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{해설}

점 $P(2,\ 2,\ 3)$을 yz평면에 대하여 대칭이동시킨 점 Q의 좌표는 $Q(-2,\ 2,\ 3)$이다.

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= \sqrt{(-2-2)^2 + (2-2)^2 + (3-3)^2} \\ &= 4\end{aligned}$$

{다른 풀이}

점 P와 yz평면 사이의 거리가 점 P의 x좌표의 절댓값인 2이므로 두 점 P, Q사이의 거리는

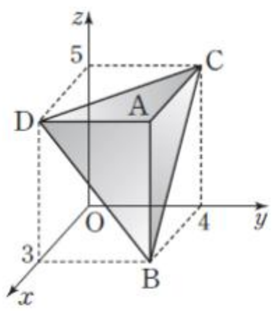
$2 \times 2 = 4$

26) ③

[해설]

점 $A(3,\ 4,\ 5)$에서 xy평면, yz평면, zx평면에 내린 수선의 발 B, C, D의 좌표는 각각

$B(3,\ 4,\ 0)$, $C(0,\ 4,\ 5)$, $D(3,\ 0,\ 5)$



따라서 사면체 $ABCD$의 부피는

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \times \triangle ACD \times \overline{AB} &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{AD}\right) \times \overline{AB} \\ &= \frac{1}{3} \times 6 \times 5 = 10\end{aligned}$$

27) ④

[해설]

점 $A(k,\ -1,\ 2k)$를 xy평면에 대하여 대칭이동시킨 점 B의 좌표는 $B(k,\ -1,\ -2k)$

z축에 대하여 대칭이동시킨 점 C의 좌표는 $C(-k,\ 1,\ 2k)$

이때 삼각형 ABC는 $\angle BAC = 90°$인 직각삼각형이고

$\overline{AB} = \sqrt{(k-k)^2 + (-1-1)^2 + (2k+2k)^2} = 4|k|$

$\overline{AC} = \sqrt{(k+k)^2 + (-1-1)^2 + (2k-2k)^2} = 2\sqrt{k^2+1}$

이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} &= \frac{1}{2} \times 4|k| \times 2\sqrt{k^2+1|} \\ &== 4|k|\sqrt{k^2+1}\end{aligned}$$

즉, $4|k|\sqrt{k^2+1} = 8\sqrt{5}$에서

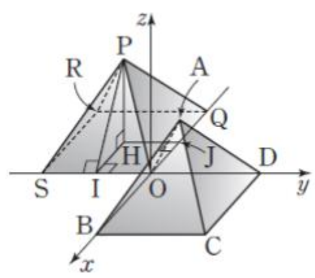
$k^4 + k^2 - 20 = 0$

$(k^2+5)(k^2-4) = 0$

이때 $k^2 > 0$이므로 $k^2 = 4$

28) 20

[해설]



그림과 같이 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H, 점 H에서 y축에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PI} \perp \overline{OS}$이다.

따라서 점 I는 선분 OS의 중점이므로 점 I의 좌표는

$I(0,\ -1,\ 0)$

마찬가지로 점 H에서 x축에 내린 수선의 발을 J라 하면 점 J는 선분 OQ의 중점이므로 점 J의 좌표는

$J(-1,\ 0,\ 0)$

따라서 점 H의 좌표는 $H(-1,\ -1,\ 0)$

한편, 삼각형 PIH에서

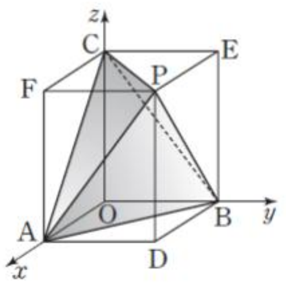
$\overline{PI} = \sqrt{3}$, $\overline{IH} = 1$, $\angle PHI = 90°$이므로

$\overline{PH} = \sqrt{\overline{PI}^2 - \overline{IH}^2} = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$

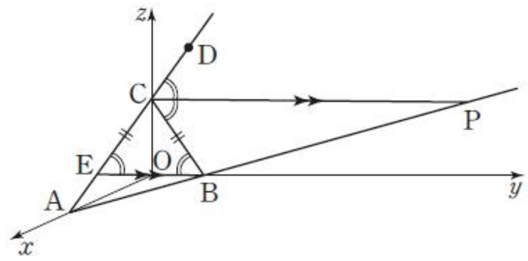
즉, 점 P의 좌표는$P(-1,\ -1,\ \sqrt{2})$

이때 점 C의 좌표는 $C(2,\ 2,\ 0)$이므로 두 점 C, P사이의 거리 d는

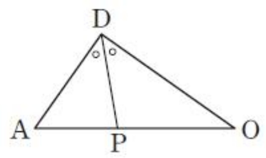
$d=\sqrt{(2+1)^2+(2+1)^2+(0-\sqrt{2})^2}$
$\quad=\sqrt{9+9+2}$
$\quad=2\sqrt{5}$
따라서
$d^2=(2\sqrt{5})^2=20$
29) ③
[해설]



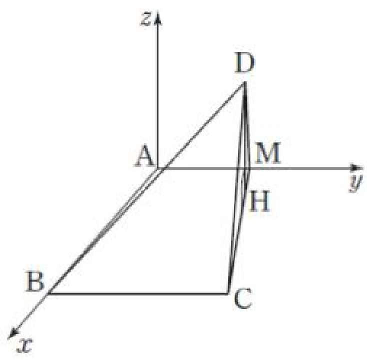
점 P는 그림과 같이 세 선분 OA, OB, OC를 세 모서리로 하는 직육면체의 한 꼭짓점이므로 점 P의 좌표는
$P(2,\ 3,\ 4)$
직육면체의 나머지 꼭짓점들을 그림과 같이 D, E, F라 하면 사면체$PABC$의 부피는 직육면체 $FPEC-ADBO$의 부피에서 네 사면체 $PADB$, $BPEC$, $ACFP$, $CABO$의 부피를 뺀 것이다.
이때 직육면체 $FPEC-ADBO$의 부피는
$2\times3\times4=24$
이고, 네 사면체 $PADB$, $BPEC$, $ACFP$, $CABO$의 부피는 모두
$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times3\times4=4$
따라서 구하는 사면체 $PABC$의 부피는
$24-4\times4=8$
30) ④
[해설]
{출제 의도}
좌표공간에 주어진 선분의 내분점의 좌표를 구할 수 있는지, x축 위에 있는 점의 좌표의 특징을 알고 있는지를 묻는 문제이다.
{풀이}
두 점 $A(2,\ a,\ -2)$, $B(5,\ -3,\ b)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{2\times5+1\times2}{2+1}, \frac{2\times(-3)+1\times a}{2+1}, \frac{2\times b+1\times(-2)}{2+1}\right)$
즉, $\left(4, \frac{a-6}{3}, \frac{2b-2}{3}\right)$
이 점이 x축 위에 있으므로
$\frac{a-6}{3}=0,\ \frac{2b-2}{3}=0$
따라서 $a=6,\ b=1$이므로 $a+b=6+1=7$
31) ④
[해설]
좌표공간의 점 $A(2k,\ k,\ -k)$를 xy평면에 대하여 대칭이동시킨 점 B의 좌표는
$B(2k,\ k,\ k)$
y축에 대하여 대칭이동시킨 점 C의 좌표는
$C(-2k,\ k,\ k)$
따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는
$\left(\frac{2k+2k-2k}{3}, \frac{k+k+k}{3}, \frac{-k+k+k}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{2k}{3}, k, \frac{k}{3}\right)$
이므로 $a=\frac{2k}{3}\ 3, b=k,\ c=\frac{k}{3}$
이때 $a+b+c=8$이므로
$\frac{2k}{3}+k+\frac{k}{3}=8$
$2k=8$
따라서 $k=4$
32) ①
[해설]



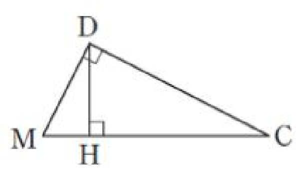
그림과 같이 점 B를 지나고 직선 CP에 평행한 직선이 직선 AC와 만나는 점을 E라 하면
$\angle CEB=\angle DCP=\angle BCP=\angle CBE$
이므로 $\overline{CE}=\overline{CB}$이다.
이때 $\overline{BE}\ /\ /\ \overline{PC}$에서
$\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{AC}:\overline{CE}=\overline{AC}:\overline{CB}$
이고
$\overline{AC}=\sqrt{19+0+8}=3\sqrt{3}$, $\overline{CB}=\sqrt{0+4+8}=2\sqrt{3}$
이므로 $\overline{AP}:\overline{PB}=3:2$이다.
즉, 점 P는 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점이므로 점 P의 좌표는
$P\left(\frac{3\times0-2\times\sqrt{19}}{3-2}, \frac{3\times2-2\times0}{3-2}, \frac{3\times0-2\times0}{3-2}\right)$
즉, $P(-2\sqrt{10},\ 6,\ 0)$
따라서
$\overline{OP}=\sqrt{(-2\sqrt{19})^2+6^2+0^2}$
$\quad=\sqrt{112}=4\sqrt{7}$
33) 125
[해설]



주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 k라 하면
$\overline{AD}=k$, $\overline{DO}=\sqrt{2}k$
이므로 $\overline{AD}:\overline{DO}=1:\sqrt{2}$이다.
이때 선분 DP가 $\angle ADO$의 이등분선이므로$\overline{AP}:\overline{PO}=1:\sqrt{2}$이다.
즉, 점 P는 선분 AO를 $1:\sqrt{2}$로 내분하는 점이므로 점 P의 z좌표는
$\frac{1\times0+\sqrt{2}\times5}{1+\sqrt{2}}=5\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=10-5\sqrt{2}$
따라서 $p=10,\ q=-5$이므로
$p^2+q^2=100+25=125$
34) ⑤
[해설]



그림과 같이 점 A가 원점, 점 B의 좌표가 $B(10,\ 0,\ 0)$, 점 M의 좌표가 $M(0,\ 5,\ 0)$이 되도록 좌표공간을 설정하자.
점 D에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 CM 위에 있다.



이때 $\triangle DMH \backsim \triangle CDH \backsim \triangle CMD$이고 $\overline{DM}=5$, $\overline{CD}=10$에서

$\overline{CD}=2\overline{DM}$ 이므로

$\overline{CH}=2\overline{DH}=2\times2\overline{MH}=4\overline{MH}$

따라서 점 H는 선분 MC를 $1:4$로 내분하는 점이다.

두 점 M, C의 좌표가 각각 $M(0,\ 5,\ 0)$, $C(10,\ 10,\ 0)$이므로 점 H의 좌표는

$H\left(\dfrac{1\times10+4\times0}{1+4}, \dfrac{1\times10+4\times5}{1+4}, \dfrac{1\times0+4\times0}{1+4}\right)$

즉, $H(2,\ 6,\ 0)$

한편, 삼각형 DMC에서

$\overline{CM}=\sqrt{25+100}=5\sqrt{5}$

이고 $\overline{DH}\times\overline{CM}=\overline{DM}\times\overline{CD}$이므로

$\overline{DH}\times5\sqrt{5}=5\times10$

$\overline{DH}=2\sqrt{5}$

따라서 점 D의 좌표는 $D(2,\ 6,\ 2\sqrt{5})$이므로

$\overline{BD}=\sqrt{(2-10)^2+(6-0)^2+(2\sqrt{5}-0)^2}$

$=\sqrt{64+36+20}$

$2\sqrt{30}$

35) ②

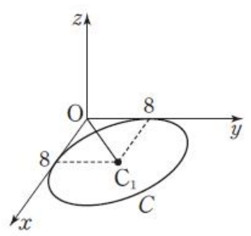
[해설]

{출제 의도}

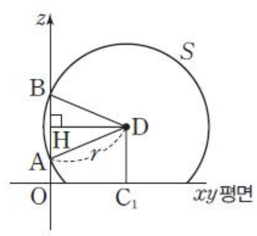
구와 xy평면이 만나서 생기는 원의 넓이와 구와 z축이 만나서 생기는 선분의 길이를 이용하여 구의 반지름의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원을 C라 하면 원 C의 넓이가 64π이므로 원 C의 반지름의 길이는 8이다. 이때 구 S가 x축, y축에 각각 접하므로 [그림 1]과 같이 원 C의 중심을 C_1이라 하면 점 C_1의 좌표는 $C_1(8,\ 8,\ 0)$이고 원점 O에 대하여 $\overline{OC_1}=8\sqrt{2}$이다.



[그림 1]



[그림 2]

한편, [그림 2]와 같이 구 S가 z축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하면 $\overline{AB}=8$

구 S의 중심을 D, 점 D에서 z축에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 H는 선분 AB의 중점이다.

또 점 D에서 xy평면에 내린 수선의 발이 원 C의 중심 C_1이므로 사각형 $DHOC_1$은 직사각형이다.

이때 직각삼각형 DHA에서

$\overline{DH}=\overline{OC_1}=8\sqrt{2}$, $\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\times8=4$

따라서 구 S의 반지름의 길이를 r라 하면

$r=\sqrt{\overline{DH}^2+\overline{AH}^2}=\sqrt{128+16}=\sqrt{144}=12$

36) ②

[해설]

$x^2+y^2+z^2-2kx+6y-4z+8=0$에서

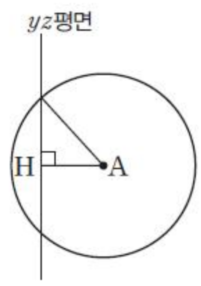
$(x-k)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=k^2+5$

이므로 구 S의 중심 A의 좌표는 $A(k,\ -3,\ 2)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{k^2+5}$이다.

점 A에서 yz평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $H(0,\ -3,\ 2)$이므로

$\overline{AH}=k$

이고 점 H는 원 C의 중심이다.



원 C의 반지름의 길이를 r라 하면

$r=\sqrt{(k^2+5)-k^2}=\sqrt{5}$

이므로 원 C를 밑면으로 하고 점 A를 꼭짓점으로 하는 원뿔의 부피는

$\dfrac{1}{3}\times5\pi\times k=\dfrac{5}{3}k\pi$

이때 원뿔의 부피가 $\dfrac{10\pi}{3}$ 이므로 $\dfrac{5}{3}k\pi=\dfrac{10\pi}{3}$

따라서

$k=2$

{다른 풀이}

$x^2+y^2+z^2-2kx+6y-4z+8=0$에 $x=0$을 대입하면

$y^2+z^2+6y-4z+8=0$에서

$(y+3)^2+(z-2)^2=5$이므로

원 C의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이다.

한편, $x^2+y^2+z^2-2kx+6y-4z+8=0$에서

$(x-k)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=k^2+5$이므로 구 S의 중심 $A(k,\ -3,\ 2)$와 yz평면 사이의 거리는 k이다.

따라서 원 C를 밑면으로 하고 점 A를 꼭짓점으로 하는 원뿔의 부피는

$\dfrac{1}{3}\times5\pi\times k=\dfrac{5}{3}k\pi$

이때 원뿔의 부피가 $\dfrac{10\pi}{3}$ 이므로 $\dfrac{5}{3}k\pi=\dfrac{10\pi}{3}$

따라서

$k=2$

37) 39

[해설]

좌표공간에서 xy평면에 접하는 구의 반지름의 길이는 중심의 z좌표의 절댓값과 같다.

따라서 점 $A(3,\ -2,\ 4)$를 중심으로 하고 xy평면에 접하는 구의 방정식은

$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=16$ ……㉠

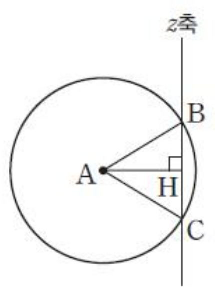
㉠에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$(z-4)^2=3$이므로 $z=4+\sqrt{3}$ 또는 $z=4-\sqrt{3}$

따라서 주어진 구가 z축과 만나는 두 점 B, C의 좌표는

$B(0,\ 0,\ 4+\sqrt{3})$, $C(0,\ 0,\ 4-\sqrt{3})$ 또는 $B(0,\ 0,\ 4-\sqrt{3})$, $C(0,\ 0,\ 4+\sqrt{3})$이므로

$\overline{BC}=2\sqrt{3}$



이때 그림과 같이 구의 중심 A에서 z축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H가 선분 BC의 중점이므로

$\overline{BH}=\sqrt{3}$

또 $\overline{AB}=4$이므로 직각삼각형 ABH에서

$\overline{AH}=\sqrt{16-3}=\sqrt{13}$

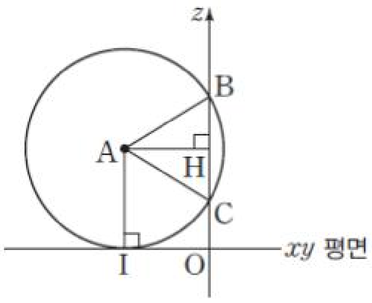
따라서 삼각형 ABC의 넓이 S는

$S=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\sqrt{13}=\sqrt{39}$

이므로 $S^2=39$

{다른 풀이}

그림과 같이 구의 중심 A에서 z축에 내린 수선의 발을 H, 구가 xy평면에 접하는 점을 I라 하자.



점 I의 좌표가 $I(3,\ -2,\ 0)$이므로 $\overline{AI}=4$, $\overline{IO}=\sqrt{13}$

이때 $\overline{AB}=\overline{AI}$이므로 $\overline{AB}=4$이고

$\overline{AH}=\overline{IO}$이므로 $\overline{AH}=\sqrt{13}$

직각삼각형 AHB에서

$\overline{BH}=\sqrt{16-13}=\sqrt{3}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}$$
$$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{13}$$
$$=\sqrt{39}$$

이므로 $S^2=39$

38) ④

[해설]

$S_1: x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+2=0$,에서

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$

$S_2: x^2+y^2+z^2-4y-4z+6=0$에서

$x^2+(y-2)^2+(z-2)^2=2$

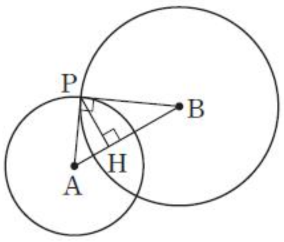
따라서 두 구 S_1, S_2의 중심을 각각 A, B라 하면 두 점 A, B의 좌표는

$A(1,\ 1,\ 1)$, $B(0,\ 2,\ 2)$

이고, 두 구의 중심 사이의 거리는

$\overline{AB}=\sqrt{(0-1)^2N+(2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{3}$

한편, 두 구 S_1, S_2의 반지름의 길이는 각각 1, $\sqrt{2}$이므로 두 구의 중심을 지나는 한 평면으로 자른 단면은 그림과 같다.



두 구가 만나서 생기는 원 위의 한 점을 P라 하면

$\overline{PA}=1$, $\overline{PB}=\sqrt{2}$, $\overline{AB}=\sqrt{3}$에서

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=\overline{AB}^2$

이므로 삼각형 PAB는 $\angle APB=90°$인 직각삼각형이다.

점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PH}\times\overline{AB}$에서

$$\overline{PH}=\frac{\overline{PA}\times\overline{PB}}{\overline{AB}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

이때 선분 PH의 길이는 두 구가 만나서 생기는 원의 반지름의 길이와 같다.

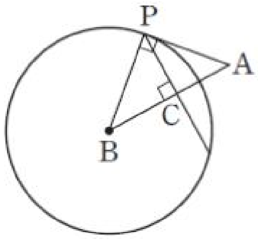
따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi\times\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{2\pi}{3}$$

39) 79

[해설]

구 $S: (x+1)^2+y^2+(z-2)^2=9$의 중심을 B라 하면 점 B의 좌표는 $B(-1,\ 0,\ 2)$이고 두 점 A, B를 지나는 한 평면으로 자른 단면은 그림과 같다.



$\overline{AB}=\sqrt{(2+1)^2+(\sqrt{6}-0)^2+(3-2)^2}=4$, $\overline{PB}=3$

이고 $\angle APB=90°$이므로

$\overline{PA}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

이때 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 C라 하면 점 P가 나타내는 도형은 점 C를 중심으로 하고 선분 PC를 반지름으로 하는 원이다.

한편, 직각삼각형 PBA에서

$\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{AB}$

이므로

$$\overline{PC}=\frac{\overline{PA}\times\overline{PB}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{7}\times 3}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{4}$$

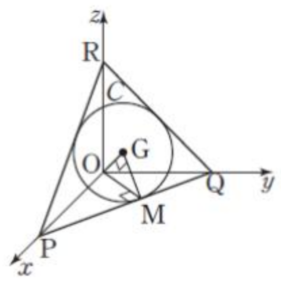
따라서 점 P가 나타내는 도형의 넓이는

$$\pi\times\left(\frac{3\sqrt{7}}{4}\right)^2=\frac{63}{16}\pi$$

이므로 $p+q=16+63=79$

40) ③

[해설]



그림과 같이 원점 O에서 평면 PQR에 내린 수선의 발을 G, 직선 PQ에 내린 수선의 발을 M이라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{GM}\perp\overline{PQ}$이다. 이때 점 M은 선분 PQ의 중점이므로 점 G는 삼각형 PQR의 중선 RM위에 있다. 마찬가지로 점 G는 삼각형 PQR의 다른 중선 위에도 있으므로 삼각형 PQR의 무게중심이고, 이때 삼각형 PQR는 정삼각형이므로 점 G는 내접원 C의 중심이다.

점 G의 좌표는

$$G\left(\frac{3+0+0}{3},\frac{0+3+0}{3},\frac{0+0+3}{3}\right),\ \text{즉 } G(1,\ 1,\ 1)$$

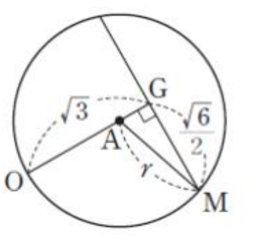
이므로 $\overline{OG}=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

점 M의 좌표는 $M\left(\frac{3+0}{2},\frac{0+3}{2},\frac{0+0}{2}\right)$ 즉 $M\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},0\right)$

이므로 $\overline{GM}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

한편, 직선 OG가 원 C를 포함하는 평면에 수직이므로 구 S의 중심을 A라 하면 직선 OG는 점 A를 지난다.

따라서 구 S를 세 점 O, G, M을 포함하는 평면으로 자른 단면은 그림과 같다.



구 S의 반지름의 길이를 r라 하면 직각삼각형 AMG에서

$\overline{AM}=r$, $\overline{GM}=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $\overline{AG}=\sqrt{3}-r$, $\angle AGM=90°$이므로

$$r^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+(\sqrt{3}-r)^2$$

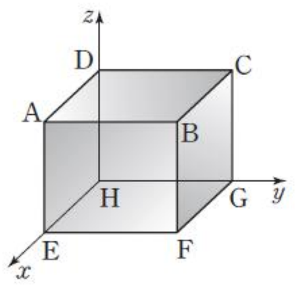
$2\sqrt{3}\,r=\dfrac{9}{2},\ r=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

따라서 구 S의 겉넓이는

$4\pi\times\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2=\dfrac{27\pi}{4}$

41) ②

[해설]



점 H는 원점, 세 점 E, G, D의 좌표는 각각

$E(a,\ 0,\ 0)$, $G(0,\ b,\ 0)$, $D(0,\ 0,\ c)$이다.

네 점 A, C, D, H를 지나는 구의 중심이 점 P이므로

$\overline{PA}=\overline{PC}=\overline{PD}=\overline{PH}$

$P(3,\ 5,\ 4)$이고 네 점 A, C, D, H의 좌표는 각각

$A(a,\ 0,\ c)$, $C(0,\ b,\ c)$, $D(0,\ 0,\ c)$, $H(0,\ 0,\ 0)$

이므로

$\overline{PA}^2=(a-3)^2+5^2+(c-4)^2$ ……㉠

$\overline{PC}^2=3^2+(b-5)^2+(c-4)^2$ ……㉡

$\overline{PD}^2=3^2+5^2+(c-4)^2$ ……㉢

$\overline{PH}^2=3^2+5^2+4^2$ ……㉣

㉠=㉢에서 $(a-3)^2=3^2$

$a>0$이므로 $a=6$

㉡=㉢에서 $(b-5)^2=5^2$

$b>0$이므로 $b=10$

㉢=㉣에서 $(c-4)^2=4^2$

$c>0$이므로 $c=8$

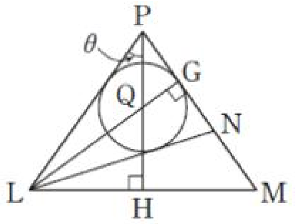
따라서

$a+b+c=6+10+8=24$

42) ①

[해설]

세 선분 AO, BC , EF의 중점을 각각 L, M, N이라 하고 세 점 P, L, M을 지나는 평면으로 주어진 사각뿔을 자른 단면은 그림과 같다.



점 P에서 선분 LM에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 PLM이 $\overline{PL}=\overline{PM}=3\sqrt{3}$, $\overline{LM}=6$인 이등변삼각형이므로 점 H는 선분 LM의 중점이고 $\overline{LH}=3$이다.

따라서 직각삼각형 PLH에서

$\overline{PH}=\sqrt{27-9}=3\sqrt{2}$

이므로 $\angle LPH=\theta$라 하면

$\cos\theta=\dfrac{\overline{PH}}{\overline{PL}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

이때 $\overline{PN}=\dfrac{2}{3}\overline{PM}=\dfrac{2}{3}\times3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$이므로 선분 PN의 중점을 G라 하면 $\overline{PG}=\sqrt{3}$이고

$$\begin{aligned}\cos(\angle LPG)&=\cos2\theta=\cos(\theta+\theta)\\&=\cos\theta\cos\theta-\sin\theta\sin\theta\\&=\cos^2\theta-\sin^2\theta\\&=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)=2\cos^2\theta-1\\&=2\times\frac{2}{3}-1=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

인데 $\dfrac{\overline{PG}}{\overline{PL}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$이므로 $\overline{LG}\perp\overline{PN}$이다.

따라서 삼각형 PLN은 $\overline{LP}=\overline{LN}$인 이등변삼각형이므로 선분 LG는 $\angle PLN$의 이등분선이고, 선분 PH는 $\angle LPN$의 이등분선이므로 두 선분 LG, PH의 교점이 삼각형 PLN의 내접원의 중심이고, 즉 구하는 구의 중심 Q이다.

이때 삼각형 PQG에서 $\angle QPG=\theta$, $\overline{PG}=\sqrt{3}$이므로

$\cos\theta=\dfrac{\overline{PG}}{\overline{PQ}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$에서

$\overline{PQ}=\overline{PG}\times\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$\overline{QH}=\overline{PH}-\overline{PQ}=3\sqrt{2}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 이고, 점 Q에서 xy평면에 내린 수선의 발인 점 H의 좌표는 $H(3,\ 3,\ 0)$이므로 점 Q의 좌표는

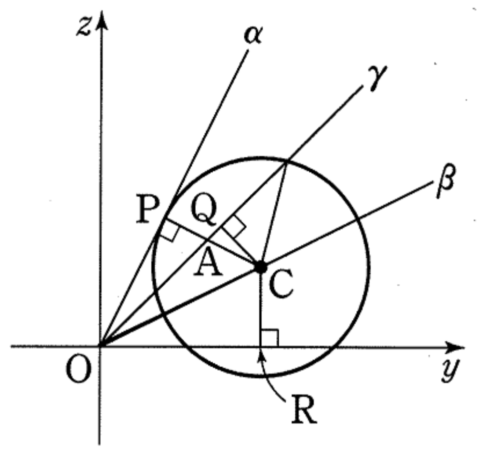
$Q\left(3,\ 3,\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

따라서

$abc=3\times3\times\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{27\sqrt{2}}{2}$

43) [정답] ③

구C를 yz평면으로 자른 단면은 그림과 같다.



구의 중심 에서 평면 γ, xy평면에$\mathrm{C}(0,\ 2\sqrt{5},\ \sqrt{5})$ 내린 수선의 발을 각각 Q,R라 하자. 점C에서 평면 α, x축에 내린 수선의 발은 각각

점 P, 원점 O이다.

삼각형 COR에서 $\overline{\mathrm{OR}}=2\sqrt{5}$,$\overline{\mathrm{CR}}=\sqrt{5}$이므로

$\overline{\mathrm{CO}}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2}=5$

삼각형 CPO에서 $\overline{\mathrm{CP}}=3$, $\overline{\mathrm{CO}}=5$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=4$

$\angle\mathrm{COP}=\theta$라 하면 점A와 두 평면 α, β 사이의 거리가 서로 같으므로 $\angle\mathrm{COQ}=\dfrac{\theta}{2}$

$\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{OP}}}{\overline{\mathrm{CO}}}=\dfrac{4}{5}$ 이므로

$\sin\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{4}{5}}{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

$\cos\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{4}{5}}{2}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

$\therefore\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{CO}}\sin\dfrac{\theta}{2}=5\times\dfrac{\sqrt{10}}{10}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

따라서 평면 γ에 의하여 잘린 구의 단면의 반지름의 길이는

$\sqrt{3^2-\overline{\mathrm{CQ}}^2}=\sqrt{9-\dfrac{10}{4}}=\sqrt{\dfrac{13}{2}}$

이므로 단면인 원의 넓이 S는

$S = \frac{13}{2}\pi$

한편, 평면β와xy평면이 이루는 예각의 크기는 θ'이라 하면

$\cos\theta' = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin\theta' = \frac{\sqrt{5}}{5}$

평면 γ와xy평면이 이루는 예각의 크기는 $\frac{\theta}{2}+\theta'$이므로

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\theta}{2}+\theta'\right) &= \cos\frac{\theta}{2}\cos\theta' - \sin\frac{\theta}{2}\sin\theta' \\ &= \frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{5}}{5} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

따라서 구하는 정사영의 넓이 S'은

$S' = S\cos\left(\frac{\theta}{2}+\theta'\right) = \frac{13}{2}\pi\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{13\sqrt{2}}{4}\pi$

44) 3

사각형 $ABFD$는 정사각형이므로 $\overline{AB}//\overline{DF}$이다

따라서 $\theta_1 = 0$이다

사각형 $ACFE$는 정사각형이므로 $\overline{AC}//\overline{EF}$이다

따라서 두 직선 AB와 EF가 이루는 각의 크기는 두 직선 AB와 AC가 이루는 각의 크기와 같고 삼각형 ABC는 정삼각형이므로 $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$이다

사각형 $BCDE$는 정사각형이므로 $\overline{BE}//\overline{CD}$이다

따라서 두 직선 AB와 CD가 이루는 각의 크기는 두 직선 AB와 BE가 이루는 각의 크기와 같고 삼각형 ABE는 정삼각형이므로 $\theta_3 = \frac{\pi}{3}$이다

즉 $\theta_1+\theta_2+\theta_3 = \frac{2}{3}\pi$이므로

$\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) = \cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$

■ [힌트]

꼬인 위치에 있는 두 직선이 이루는 각의 크기는 어느 한 직선을 평행이동하여 두 직선이 만날 때 이루는 각의 크기이다

45) 3

직선 BC와 평행한 직선은 직선 ED이므로

$a = 1$

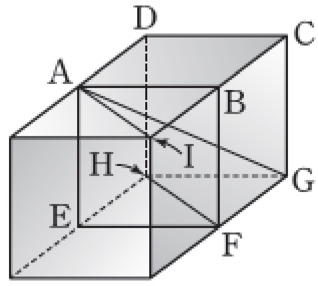
직선 BC와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 AD, AE이므로

$b = 2$

따라서 $a+b = 1+2 = 3$

46) 5

그림과 같이 정육면체 $ABCD-EFGH$와 같은 크기의 정육면체를 정사각형 $AEFB$에 이어 붙이면 직선 HF와 직선 AI는 서로 평행하므로 두 직선 AG와 FH가 이루는 각의 크기는 두 직선 AG와 AI가 이루는 각의 크기와 같다



정육면체 $ABCD-EFGH$의 한 모서리의 길이를 a라 하면

$\overline{AG} = \sqrt{3}a$, $\overline{AI} = \sqrt{2}a$, $\overline{IG} = \sqrt{5}a$

이므로

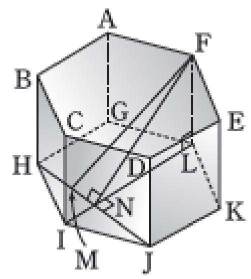
$(\sqrt{5}a)^2 = (\sqrt{3}a)^2 + (\sqrt{2}a)^2$

즉 $\overline{IG}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{AI}^2$이 성립한다

따라서 $\angle IAG = \frac{\pi}{2}$이므로

$\cos\theta = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

47) 3



정육각기둥이므로

$\overline{FL}\perp$ 평면 $GHIJKL$

밑변은 정육각형이므로 선분 HJ의 중점을 N이라 하면

$\overline{LN}\perp\overline{HJ}$

에서 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{FN}\perp\overline{HJ}$

밑변은 한 변의 길이가 인 정육각형이므로

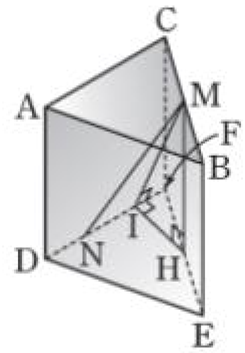
$\overline{IN} = 2$, $\overline{LN} = 6$이고 직각삼각형 FNL에서

$$\begin{aligned}\overline{FN} &= \sqrt{\overline{FL}^2 + \overline{LN}^2} \\ &= \sqrt{4^2+6^2} \\ &= 2\sqrt{13}\end{aligned}$$

또한 $\overline{HN} = 2\sqrt{3}$에서 $\overline{MN} = \sqrt{3}$이므로 직각삼각형 FMN에서

$$\begin{aligned}\overline{FM} &= \sqrt{\overline{FN}^2 + \overline{MN}^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{13})^2 + (\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{55}\end{aligned}$$

48) 1



점 M에서 평면 DEF에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{MH}\perp$ 평면 DEF

점 H에서 선분 DF에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{HI}\perp\overline{DF}$

에서 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{MI}\perp\overline{DF}$

$\overline{FH}=3$이므로 $\overline{HI}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $\overline{FI}=\dfrac{3}{2}$

직각삼각형 MHI에서 $\overline{MH}=6$이므로

$$\overline{MI}=\sqrt{\overline{MH}^2+\overline{HI}^2}$$
$$=\sqrt{6^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{171}}{2}$$

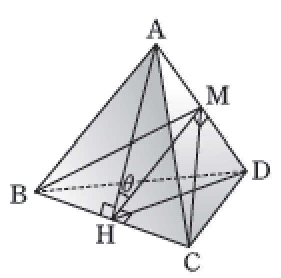
또한

$$\overline{IN}=6-\overline{DN}-\overline{FI}$$
$$=6-2-\frac{3}{2}$$
$$=\frac{5}{2}$$

이므로 직각삼각형 MNI에서

$$\overline{MN}=\sqrt{\overline{MI}^2+\overline{IN}^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{171}}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{196}{4}}$$
$$=7$$

49) 2



점 A에서 모서리 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$

이때 삼각형 AHD는 이등변삼각형이므로

$\overline{HM}\perp\overline{AD}$

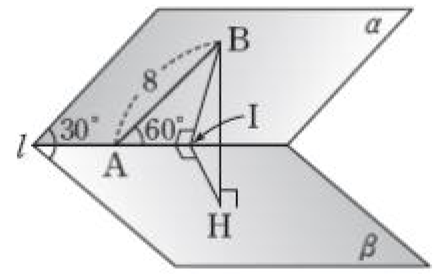
또한 삼각형 BCM도 이등변삼각형이고 삼각형 ABC는 정삼각형이므로

$\overline{HM}\perp\overline{BC}$, $\overline{AH}\perp\overline{BC}$

따라서 $\angle AHM=\theta$이고 삼각형 AHM은 직각삼각형이므로

$$\tan\theta=\frac{\overline{AM}}{\overline{HM}}=\frac{\overline{AM}}{\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{AM}^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

50) 2



점 B에서 교선 l에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{BH}\perp\beta$, $\overline{BI}\perp l$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{HI}\perp l$

따라서 $\angle BIH=30^\circ$

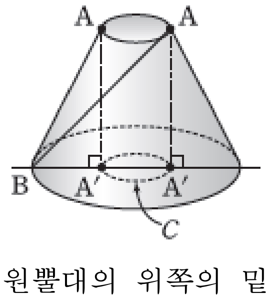
이때 $\overline{AB}=8$이므로

$$\overline{BI}=8\sin 60^\circ$$
$$=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=4\sqrt{3}$$

따라서 삼각형 BIH에서

$$\overline{BH}=\overline{BI}\sin 30^\circ$$
$$=4\sqrt{3}\,sin 30^\circ$$
$$=4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3}$$

51) 3



원뿔대의 위쪽의 밑면의 둘레 위의 한 점 A의 아래쪽 밑면으로의 정사영은 그림과 같이 반지름의 길이가 인 원 C의 둘레 위에 있다

따라서 선분 AB의 정사영의 길이가 최대 또는 최소일 때는 점 B와 원 C의 중심을 지나는 직선이 원 C와 만나는 두 점에 점 A의 아래쪽 밑면으로의 정사영 A'이 있을 때이다

즉 정사영의 길이가 최대일 때 $\overline{A'B}=3+1=4$이므로

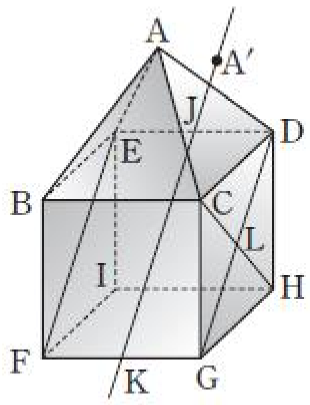
$\tan\theta_1 = \frac{4}{4} = 1$

정사영의 길이가 최소일 때 $\overline{A'B} = 3-1 = 2$이므로

$\tan\theta_2 = \frac{4}{2} = 2$

따라서 $\tan\theta_1 + \tan\theta_2 = 1+2 = 3$

52) 5



모서리 ED의 중점을 J 모서리 FG의 중점을 K라 하면 점 A의 평면 $EFGD$ 위로의 정사영은 직선 JK 위에 있고 그 점을 A'이라 하자

또한 점 C의 평면 $EFGD$ 위로의 정사영은 두 선분 CH DG의 교점을 L이므로 삼각형 ACD의 평면 $EFGD$ 위로의 정사영은 삼각형 $A'LD$이다

이때

삼각형 $A'LD$의 넓이

$= \frac{1}{2} \times \overline{LD} \times$ 점 A'과 직선 LD 사이의 거리

$= \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 1$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

삼각형 ACD의 넓이 $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}$

이므로

$$\cos\theta = \frac{(\text{삼각형 } A'LD\text{의 넓이})}{(\text{삼각형 } ACD\text{의 넓이})} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

53) 4

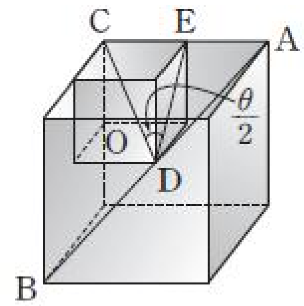
여섯 개의 점 B, C, D, E, G, H는 직선 AF 위에 있지 않으므로 직선 AF를 반드시 포함하고 여섯 개의 점을 지나는 평면은 최대 개이다

이 중에서 점 B와 E를 포함하는 두 평면 AEF와 AFB, 점 D와 G를 포함하는 두 평면 AFD와 AFG는 서로 같은 평면이므로 구하는 서로 다른 평면의 개수는

$6-2 = 4$

54) 1

그림과 같이 작은 정육면체를 큰 정육면체 안으로 평행이동하면 점 D는 선분 AB의 중점이 되고 점 E는 선분 AC의 중점이다



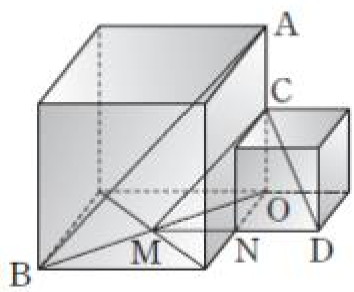
따라서 두 직선 AB와 CD가 이루는 예각의 크기는 $\angle CDA$이고

$\overline{AD} = \overline{CD} = \sqrt{3}$, $\overline{BC} = 2\sqrt{2}$

이므로

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CD}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

다른 풀이



그림과 같이 큰 정육면체의 아래쪽 밑면의 두 대각선의 교점을 M이라 하고 선분 MD와 큰 정육면체의 모서리의 교점을 N이라 하자

점 M과 점 C는 각각 선분 BO와 선분 AO의 중점이므로 $\overline{AB} // \overline{CM}$이다

직선 AB와 직선 CD가 이루는 예각의 크기는 선분 CM과 선분 CD가 이루는 예각의 크기와 같고 삼각형 CMD는 $\overline{CM} = \overline{CD} = \sqrt{3}$, $\overline{MD} = 2$인 이등변 삼각형이므로

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CD}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

55) 3

구와 평면 α가 점 P에서 접하므로

$\overline{OP} \perp \alpha$

또한 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PH} \perp l$

에서 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{OH} \perp l$

따라서 점 Q가 점 H와 일치할 때 선분 OQ의 길이

가 최소가 된다

이때 $\overline{OP}=3$, $\overline{PH}=4$이므로

$\overline{OH}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

따라서 $\overline{OQ}\geq\overline{OH}=5$이므로 선분 OQ의 길이의 최솟값은 이다

56) 3

정사각형 $BCDE$의 두 대각선의 교점을 O라 하면 삼각형 ABC의 평면 $BCDE$ 위로의 정사영 K는 삼각형 OBC이다

이때 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$

이고 삼각형 OBC의 넓이는

$\frac{1}{4}\times 2^2=1$

이므로 두 평면 ABC와 $BCDE$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{(\text{삼각형 } OBC\text{의 넓이})}{(\text{삼각형 } ABC\text{의 넓이})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

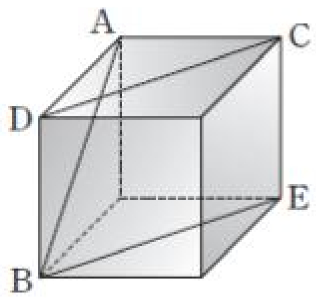
따라서 평면 $BCDE$와 평면 CFD가 이루는 각의 크기도 θ이므로 도형 K의 평면 CFD 위로의 정사영의 넓이는

$$1\times\cos\theta=1\times\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

57) 1

주어진 정육면체의 전개도에 의해 만들어지는 정육면체는 그림과 같다



이때 직선 CD와 BE는 서로 평행하므로 두 직선 AB와 CD가 이루는 각의 크기는 두 직선 AB와 BE가 이루는 각의 크기와 같다

그런데 삼각형 ABE는 정삼각형이므로

$\cos\theta=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

58) 3

$\overline{OC}\perp\alpha$, $\overline{CP}\perp l$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{OP}\perp l$

따라서 $\overline{CP}\perp l$, $\overline{OP}\perp l$이므로

$l\perp$ 평면 OCP

이때 $\overline{CP}=2\sqrt{3}$, $\overline{OP}=4$이므로

$\overline{OC}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$

따라서

$$(\text{삼각형 } OCP\text{의 넓이})=\frac{1}{2}\times\overline{CP}\times\overline{OC}$$

$$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2$$

$$=2\sqrt{3}$$

또한 사면체 $OCPQ$의 부피가 이므로

$\frac{1}{3}\times(\text{삼각형 } OCP\text{의 넓이})\times\overline{PQ}$

$\frac{1}{3}\times 2\sqrt{3}\times\overline{PQ}=6$

에서

$\overline{PQ}=3\sqrt{3}$

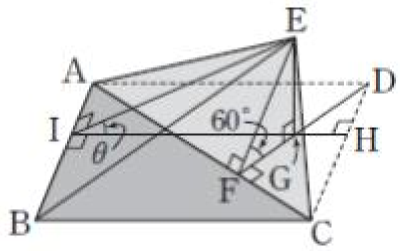
따라서

$$\overline{OQ}=\sqrt{\overline{OP}^2+\overline{PQ}^2}$$

$$=\sqrt{4^2+(3\sqrt{3})^2}$$

$$=\sqrt{43}$$

59) 5



선분 AC 위에 $\overline{AC}\perp\overline{DF}$, $\overline{AC}\perp\overline{EF}$를 만족시키는 점을 F라 하면

$\angle EFD=60^\circ$

또한

$\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{CD}=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{EF}$

$4\times 2=2\sqrt{5}\times\overline{EF}$

즉 $\overline{EF}=\frac{4}{\sqrt{5}}$이므로 $\overline{DF}=\frac{4}{\sqrt{5}}$이다

또한 점 E에서 평면 $ABCD$에 내린 수선의 발 G는 선분 DF 위에 있고

$$\overline{FG}=\overline{EF}\cos 60^\circ$$

$$=\frac{4}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$\overline{GD}=\overline{DF}-\overline{FG}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

그리고 점 G에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{DF}:\overline{CD}=\overline{DH}:\overline{GD}$

$\frac{4}{\sqrt{5}}:2=\overline{DH}:\frac{2}{\sqrt{5}}$

$2\overline{DH}=\frac{8}{5}$

즉 $\overline{DH}=\frac{4}{5}$

$$\overline{GH}=\sqrt{\overline{GD}^2-\overline{DH}^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2-\left(\frac{4}{5}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{4}{5}-\frac{16}{25}}$$
$$=\frac{2}{5}$$

또한 점 E에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AB}\perp\overline{GI}$

따라서 $\angle EIG=\theta$이므로

$$\tan\theta=\frac{\overline{EG}}{\overline{IG}}$$
$$=\frac{\frac{4}{\sqrt{5}}\times\sin 60^\circ}{4-\frac{2}{5}}$$
$$=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}}{\frac{18}{5}}$$
$$=\frac{\sqrt{15}}{9}$$

60) 4

원에 내접하는 정삼각형의 넓이가 $\sqrt{3}$이므로 한 변의 길이를 a라 하면

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times a^2=\sqrt{3}$$

$a^2=4$

즉 $a=2$

따라서 $\overline{AB}=2$이므로 삼각형 ABC의 넓이가 최대가 되기 위해서는 점 C가 아래쪽 밑면의 둘레의 있을 때이다

이때 한 변의 길이가 인 정삼각형의 높이는

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$$

이므로 점 C에서 변 AB까지의 거리는

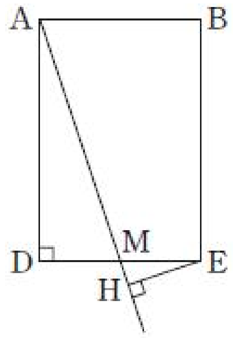
$$\sqrt{4^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{19}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{19}=\sqrt{19}$$

61) 5

선분 AF의 중점을 N이라 하면 삼각형 CDE에서 $\overline{CE}//\overline{MN}$이므로 직선 CE는 평면 AMF와 만나지 않는다 따라서 $\overline{CE}//$(평면AMF) 참

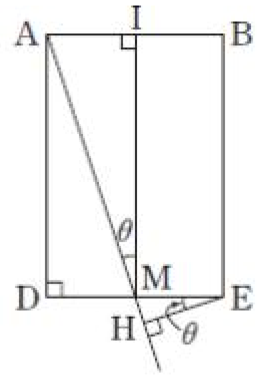


$$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{DM}^2}$$
$$=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

점 E에서 직선 AM에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle AMD=\angle EMH$이므로

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{EM}}{\overline{EH}}$$
$$\frac{\sqrt{10}}{3}=\frac{1}{\overline{EH}}$$

따라서 $\overline{EH}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 참



선분 AB의 중점을 I라 하고 두 평면 CMF와 AMF가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\theta=\angle AMI=\angle MEH$

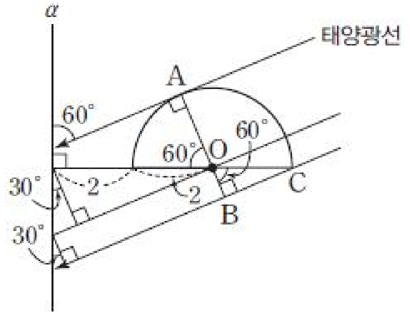
이므로 직각삼각형 MHE에서

$$\cos\theta=\frac{\frac{3\sqrt{10}}{10}}{1}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$ 참

따라서 옳은 것은 이다

62) 2

반구의 밑면의 중심을 지나고 두 평면 α,β에 모두 수직이 평면으로 자른 단면은 그림과 같다



이때 $\overline{OA}$에 해당하는 부분에 의하여 평면 α에 생기는 그림자의 넓이를 S_1 $\overline{OC}$에 해당하는 부ㄷ에 의하

여 평면 α에 생기는 그림자의 넓이를 S_2라 하자

$S_1\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\times\pi\times 2^2$

$\frac{\sqrt{3}}{2}S_1 = 2\pi$

즉 $S_1 = \frac{4}{\sqrt{3}}\pi = \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$

또한

$S_2\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\times\pi\times 2^2\times\cos 60^\circ$

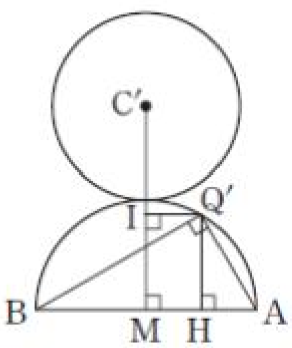
즉 $S_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

따라서 평면 α에 생긴 반구의 그림자의 넓이는

$S_1 + S_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi + \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

$= 2\sqrt{3}\pi$

63) 3



점 Q의 평면 α 위로의 정사영 Q'은 밑면의 둘레에 있고 선분 BQ의 평면 α 위로의 정사영의 길이가 $2\sqrt{3}$이므로

$\overline{BQ'} = 2\sqrt{3}$

또한 $\angle AQ'B = \frac{\pi}{2}$, $\overline{AB} = 4$이므로

$\overline{AQ'} = \sqrt{\overline{AB}^2 - (\overline{BQ'})^2}$

$= \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2}$

$= 2$

따라서 점 Q'에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AB}\times\overline{Q'H} = \overline{AQ'}\times\overline{BQ'}$

$4\times\overline{Q'H} = 2\times 2\sqrt{3}$

즉 $\overline{Q'H} = \sqrt{3}$이므로

$\overline{AH} = 1$

또한 구와 평면 α의 접점을 C'이라 하면

$\overline{C'M} = 2+\sqrt{3}$

이므로 점 Q'에서 선분 $C'M$에 내린 수선의 발을 I에 대하여

$\overline{C'I} = \overline{C'M} - \overline{IM} = (2+\sqrt{3}) - \sqrt{3} = 2$

$\overline{Q'I} = \overline{AM} - \overline{AH} = 2-1 = 1$

따라서 $\overline{C'Q'} = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$

$4\times\overline{Q'H} = 2\times 2\sqrt{3}$

즉 $\overline{Q'H} = \sqrt{3}$이므로

$\overline{AH} = 1$

또한 구와 평면 α의 접점을 C'이라 하면

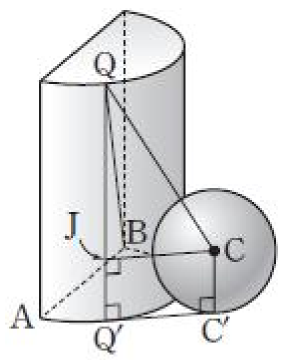
$\overline{C'M} = 2+\sqrt{3}$

이므로 점 Q'에서 선분 $C'M$에 내린 수선의 발을 I에 대하여

$\overline{C'I} = \overline{C'M} - \overline{IM} = (2+\sqrt{3}) - \sqrt{3} = 2$

$\overline{Q'I} = \overline{AM} - \overline{AH} = 2-1 = 1$

따라서 $\overline{C'Q'} = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$



즉 점 C에서 선분 QQ'에 내린 수선의 발을 J라 하면

$\overline{CJ} = \sqrt{5}$이고

$\overline{QJ} = 5\sqrt{3} - \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

이므로

$\overline{CQ} = \sqrt{\overline{CJ}^2 + \overline{QJ}^2}$

$= \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (4\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{53}$

64) 10

$\overline{AE}$는 z축에 평행하고 두 점 A, E의 z좌표가 각각 $1, -1$이므로 정육면체의 한 모서리의 길이는

$1-(-1) = 2$

따라서 점 G의 x좌표 y좌표 z좌표는 각각 점 E의 x좌표보다 만큼 작고 y좌표보다 만큼 크며 z좌표와는 같으므로 $G(0, 3, -1)$

따라서 $a=0, b=3, c=-1$이므로

$a^2+b^2+c^2 = 0+9+1 = 10$

65) 2

$\overline{AB} = \sqrt{(-1-1)^2+(t-2)^2+(4-t)^2}$

$= \sqrt{2t^2-12t+24}$

$= \sqrt{2(t-3)^2+6}$

따라서 $t=3$일 때 선분 AB의 최솟값은 $\sqrt{6}$이다

■ [힌트]

두 점 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리는

$\overline{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

66) 5
점 $A(2,-1,3)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는 $B(-2,1,-3)$이므로

$\overline{BC}=\sqrt{(3+2)^2+(2-1)^2+(1+3)^2}$
$=\sqrt{25+1+16}$
$=\sqrt{42}$

67) 3
$\overline{AB}=\overline{BC}$에서
$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$
$(3-3)^2+(0-3)^2+(3-0)^2$
$=(0-3)^2+(2-0)^2+(a-3)^2$
$(a-3)^2=5$
$a-3=-\sqrt{5}$ 또는 $a-3=\sqrt{5}$
즉 $a=3-\sqrt{5}$ 또는 $a=3+\sqrt{5}$
따라서 모든 a의 값의 합은
$(3-\sqrt{5})+(3+\sqrt{5})=6$

68) 2
세 점 $A(2,a,2), B(2,-1,a), C(3,1,a+2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 z좌표는
$\frac{2+a+(a+2)}{3}=\frac{2a+4}{3}$
그런데 무게중심이 xy평면 위에 있으므로
$\frac{2a+4}{3}=0$
즉 $a=-2$이므로 $A(2,-2,2)$ $B(2,-1,-2)$이다
따라서
$\overline{AB}=\sqrt{(2-2)^2+(-1+2)^2+(-2-2)^2}$
$=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$

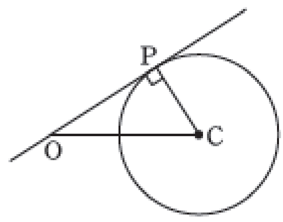
■ [힌트]

xy평면 위에 있는 점은 z좌표가 0이다
삼각형 ABC에 대하여 $A(x_1,y_1,z_1), B(x_2,y_2,z_2), C(x_3,y_3,z_3)$일 때 무게중심 G의 좌표는
$G=\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$이다

69) 2
점 $A(2,-1,3)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $B(2,1,-3)$이므로 AB를 $2:1$로 외분하는 점은
$\left(\frac{2\times2-1\times2}{2-1}, \frac{2\times1-1\times(-1)}{2-1}, \frac{2\times(-3)-1\times3}{2-1}\right)$
즉 $(2,3,-9)$이다
따라서 $a=2, b=3, c=-9$이므로
$a+b+c=2+3+(-9)=-4$

70) 1
$\overline{AC}=\sqrt{(-1)^2+0^2+(2\sqrt{2})^2}=3$
$\overline{BC}=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(2\sqrt{2})^2}=4$
따라서 $\overline{AC}:\overline{BC}=3:4$이므로 $\angle ACB$를 이등분하는 직선이 변 AB와 만나는 점 D는 변 AB를 $3:4$로 내분하는 점이다
$D\left(\frac{3\times2+4\times1}{3+4}, \frac{3\times2+4\times0}{3+4}, \frac{3\times0+4\times0}{3+4}\right)$
즉 $D\left(\frac{10}{7}, \frac{6}{7}, 0\right)$이다
따라서 $a=\frac{10}{7}, b=\frac{6}{7}, c=0$이므로
$a+b+c=\frac{10}{7}+\frac{6}{7}+0=\frac{16}{7}$

71) 1



$x^2+y^2+z^2+4x-4y+4z+11=0$에서
$(x+2)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=1$
따라서 주어진 구의 중심은 $C(-2,2,-2)$이고 반지름의 길이는 이다
이때 원점 O와 중심 $C(-2,2,-2)$ 사이의 거리는
$\overline{OC}=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-2)^2}=2\sqrt{3}$
또한 구의 중심 C와 접점 P 사이의 거리는 구의 반지름의 길이 과 같으므로
$\overline{CP}=1$
이고 $\angle OPC=90^\circ$이므로
$\overline{OP}=\sqrt{\overline{OC}^2-\overline{CP}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{11}$

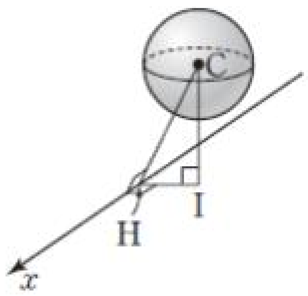
■ [힌트]

구의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$의 꼴로 변형하여 구의 중심과 반지름의 길이를 찾는다
중심이 C인 구 위의 점 P에서 구에 접하는 직선 l에 대하여 $\overline{CP}\perp l$이다

72) 50
중심이 $(0,0,a)$이고 반지름의 길이가 인 구의 방정식은
$x^2+y^2+(z-a)^2=5^2$
이 xy평면과 마나서 생기는 도형은 $z=0$일 때이므로
$x^2+y^2=25-a^2$
은 반지름의 길이가 $2a$인 원이므로
$25-a^2=(2a)^2=4a^2$
$5a^2=25$
$a^2=5$

따라서 $10a^2=10\times5=50$

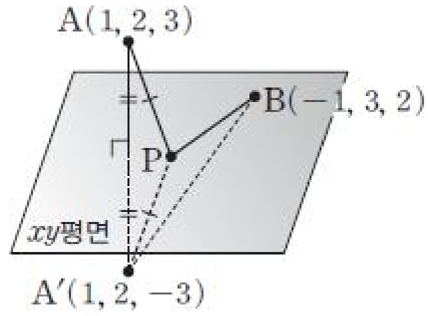
73) 5
$x^2+y^2+z^2-4x-2y-6z+13=0$에서
$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=1$
이므로 구의 중심을 C라고 하면 $C(2,1,3)$이고 반지름의 길이는 이다
따라서 구의 중심 C를 지나는 평면 α와 구가 만나서 생기는 단면은 반지름의 길이가 인 원이므로 넓이는 π이다



또한 구의 중심 $C(2,1,3)$에서 x축에 내린 수선의 발을 H, xy평면에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HI}\perp(x\text{축})$
즉 평면 α와 xy평면이 이루는 각의 크기는 $\angle CHI$이다
이때 $H(2,0,0)$, $I(2,1,0)$이므로
$$\overline{CH}=\sqrt{(2-2)^2+1^2+3^2}$$
$$=\sqrt{10}$$
$$\overline{HI}=1$$
따라서
$$\cos(\angle CHI)=\frac{\overline{HI}}{\overline{CH}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{10}}$$
$$\frac{\sqrt{10}}{10}$$
이므로 구하는 정사영의 넓이는
$$\pi\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{10}\pi$$

74) 5
점 $A(2,3,-1)$에서 x축에 내린 수선의 발 P의 좌표는 $P(2,0,0)$
점 $A(2,3,-1)$을 zx평면에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $Q(2,-3,-1)$
따라서 $\overline{PQ}=\sqrt{(2-2)^2+3^2+1^2}$
$=\sqrt{10}$

75) 30



점 $A(1,2,3)$을 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면 $A'(1,2,-3)$
따라서
$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$$
$$\geq\overline{A'B}$$
$$=\sqrt{(1+1)^2+(2-3)^2+(-3-2)^2}$$
$$=\sqrt{30}$$
따라서 $m=\sqrt{30}$이므로
$m^2=(\sqrt{30})^2=30$

76) 2
점 $A(1,1,1)$에서 yz평면에 내린 수선의 발 B의 좌표는 $B(0,1,1)$
점 $A(1,1,1)$에서 z축에 내린 수선의 발 C의 좌표는 $C(0,0,1)$
따라서 세 점 $A(1,1,1)$, $B(0,1,1)$, $C(0,0,1)$을 지나는 구의 방정식이
$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz=0$
이므로
$a+b+c=-3$
$b+c=-2$
$c=-1$
에서 $b=-1$
에서 $a=-1$
따라서 $abc=-1\times(-1)\times(-1)=-1$

77) 1
두 점 $A(2,a,b)$, $B(-4,2,1)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는
$$\left(\frac{2\times(-4)+1\times2}{2+1},\frac{2\times2+1\times a}{2+1},\frac{2\times1+1\times b}{2+1}\right)$$
즉 $\left(-2,\frac{a+4}{3},\frac{b+2}{3}\right)$이다
또한 $x^2+y^2+z^2+cx+4y-4z=0$에서
$$\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{c^2}{4}+8$$
이므로 구의 중심의 좌표는
$$\left(-\frac{c}{2},-2,2\right)$$
이 서로 일치해야 하므로

$-2=-\frac{c}{2}, \frac{a+4}{3}=-2, \frac{b+2}{3}=2$

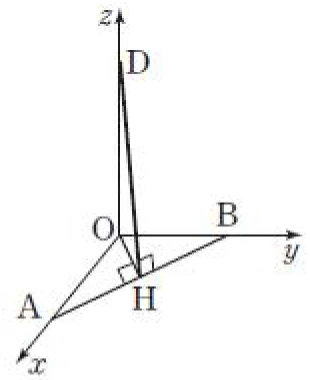
따라서 $a=-10, b=4, c=4$이므로

$a+b+c=-10+4+4=-2$

78) 3

점 $D(0,0,4)$에서 xy평면에 내린 수선의 발은 원점 O이고 원점 O에서 두 점 $A(2,0,0), B(0,2,0)$을 잇는 선 분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{DH}\perp\overline{AB}$



따라서 점 C가 점 H의 위치에 있을 때 두 점 C, D 사이의 거리가 최소가 된다

이때 점 H는 선분 AB의 중점이므로

$H\left(\frac{2}{2}, \frac{2}{2}, 0\right)$ 즉 $H(1,1,0)$이다

따라서 두 점 C, D 사이의 거리의 최솟값은

$\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}=3\sqrt{2}$

79) 4

$P(a,b,0), Q(0,b,0), R(0,0,c)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서

$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$

$(a-1)^2+(-2)^2+(-2)^2=(a-2)^2+1^2+(-4)^2$

$-2a+9=-4a+21$

$2a=12$

즉 $a=6$

$\overline{QA}=\overline{QB}$에서

$\overline{QA}^2=\overline{QB}^2$

$(-1)^2+(b-2)^2+(-2)^2=(-2)^2+(b+1)^2+(-4)^2$

$-4a+9=2b+21$

$6b=-12$

즉 $b=-2$

$\overline{RA}=\overline{RB}$에서

$\overline{RA}^2=\overline{RB}^2$

$(-1)^2+(-2)^2+(c-2)^2=(-2)^2+1^2+(c-4)^2$

$-4c+9=-8c+21$

$4c=12$

즉 $c=3$

따라서 세 점 $P(6,0,0), Q(0,-2,0), R(0,0,3)$과 원점 O를 꼭짓점으로 하는 사면체의 부피 V는

$V=\frac{1}{3}\times\triangle OPQ\times\overline{OR}$

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times6\times2\right)\times3$

$=6$

80) 4

$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$에서

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$

이므로 중심은 $(1,2,3)$이고 반지름의 길이는 이다

이때 구의 중심 $(1,2,3)$에서

x축까지의 거리는

$\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

y축까지의 거리는

$\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

이고 반지름의 길이 보다 크므로 x축 y축과 구가 만날 수는 없다

즉 구 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$와 z축이 만나는 점의 z좌표는 $x=y=0$일 때

$(-1)^2+(-2)^2+(z-3)^2=9$

$(z-3)^2=4$

$z-3=-2$ 또는 $z-3=2$

$z=1$ 또는 $z=5$

따라서 구하는 두 점 사이의 거리는

$5-1=4$

81) 2

구 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=13$과 xy평면이 만나서 생기는 도형은 $z=0$일 때이므로

$(x-a)^2+(y-b)^2=13-c^2$

  에서 a, b, c는 자연수이고 xy평면에서 x축 y축과 접해야 하므로

$a=b=\sqrt{13-c^2}$

또한 사면체 $OABC$의 부피가 이므로

$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times a\times b\right)\times c=2$

$abc=a^2c=12$

그런데 에서 $a^2=13-c^2$이므로

$(13-c^2)c=12$

$c^3-13c+12=0$

$(c-1)(c-3)(c+4)=0$

즉 $c=1$ 또는 $c=3$

그런데 a, b, c는 자연수이므로

  에서 $c=3$이고 $a=b=2$

따라서 원점 O와 구의 중심 (a,b,c) 사이의 거리는

$\sqrt{2^2+2^2+3^2}=\sqrt{17}$

82) 4

$P(a, b, 0), Q(0, b, 0), R(0, 0, c)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서

$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$

$(a-1)^2+(-2)^2+(-2)^2=(a-2)^2+1^2+(-4)^2$

$-2a+9=-4a+21$

$2a=12$

즉 $a=6$

$\overline{QA}=\overline{QB}$에서

$\overline{QA}^2=\overline{QB}^2$

$(-1)^2+(b-2)^2+(-2)^2=(-2)^2+(b+1)^2+(-4)^2$

$-4a+9=2b+21$

$6b=-12$

즉 $b=-2$

$\overline{RA}=\overline{RB}$에서

$\overline{RA}^2=\overline{RB}^2$

$(-1)^2+(-2)^2+(c-2)^2=(-2)^2+1^2+(c-4)^2$

$-4c+9=-8c+21$

$4c=12$

즉 $c=3$

따라서 세 점 $P(6, 0, 0), Q(0, -2, 0), R(0, 0, 3)$과 원점 O를 꼭짓점으로 하는 사면체의 부피 V는

$$V=\frac{1}{3}\times\triangle OPQ\times\overline{OR}$$
$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 6\times 2\right)\times 3$$
$$=6$$

83) 3

조건 가 에 의하여

$A(x, y, a), B(x, y, b)$

로 놓을 수 있고 삼각형 OAB의 무게중심의 x, y의 좌표가 각각 이므로

$$\frac{0+x+x}{3}=2, \frac{0+y+y}{3}=2$$

즉 $x=3, y=3$

삼각형 OAB의 무게중심의 z좌표가 이므로

$$\frac{0+a+b}{3}=4$$

$a+b=12$

따라서 점 $A(3, 3, a)$에서 xy평면에 내린 수선의 발을 A'이라 하면 $A'(3, 3, 0)$이고 원점 O와 직선 AB 사이의 거리는 $\overline{OA'}$과 같으므로

$\overline{OA'}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

조건 다 에 의하여

$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OA'}=\frac{1}{2}\times(b-a)\times 3\sqrt{2}=12\sqrt{2}$$

$b-a=8$

에 의하여

$$b^2-a^2=(b-a)(b+a)$$
$$=8\times 12$$
$$=96$$

84) 3

$\overline{OP_1}=\sqrt{2^2+5^2+4^2}=3\sqrt{5}$

이므로 정사각형 $OP_1P_2P_3$의 넓이는

$(3\sqrt{5})^2=45$ 참

정사각형 $OP_1P_2P_3$의 두 대각선의 중점은 일치하므로

$P_3(a, b, c)$라 하면

선분 OP_2의 중점은

$$\left(\frac{0+(-4)}{2}, \frac{0+5}{2}, \frac{c+7}{2}\right) \text{ 즉} \left(-2, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

선분 P_1P_3의 중점은

$$\left(\frac{a+2}{2}, \frac{b+5}{2}, \frac{c+4}{2}\right)$$

이므로

$$\frac{a+2}{2}=-2, \frac{b+5}{2}=\frac{5}{2}, \frac{c+4}{2}=\frac{7}{2}$$

따라서 $a=-6, b=0, c=3$이므로

$P_3=(-6, 0, 3)$ 참

세 점 $P_1(2, 5, 4), P_2(-4, 5, 7), P_3(-6, 0, 3)$의 xy평면 위로의 정사영은 각각

$Q_1(2, 5, 0), Q_2(-4, 5, 0), Q_3(-6, 0, 0)$이므로 직선 Q_1Q_2는 x축과 평행하고 점 Q_3은 x축 위에 있고

$\overline{Q_1Q_2}=\overline{OQ_3}=6$

이므로 사각형 $OQ_1Q_2Q_3$은 평행사변형이다

따라서 정사각형 $OP_1P_2P_3$의 xy평면 위로의 정사영이 평행사변형 $OQ_1Q_2Q_3$이므로 그 넓이는

$6\times 5=30$ 거짓

따라서 옳은 것은 이다

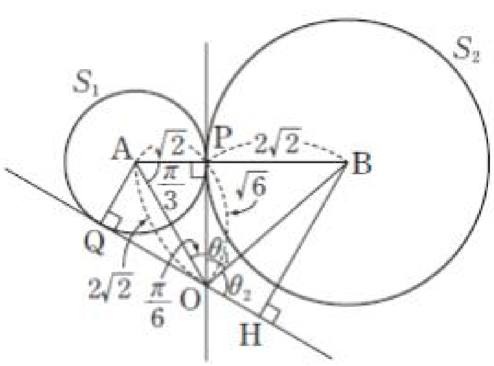
85) 1

$\overline{OA}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$이고 $\angle APO=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\angle OAP=\frac{\pi}{3}, \angle AOP=\frac{\pi}{6}$$

또한

$$\overline{OP}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AP}^2}$$
$$=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}$$
$$=\sqrt{6}$$
$$\overline{OB}=\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}$$
$$=\sqrt{14}$$



점 B에서 직선 OQ에 내린 수선의 발을 H $\angle POB = \theta_1$, $\angle BOH = \theta_2$라 하고

점 A, B, P, Q, O를 지나는 평면으로 자른 단면은 위의 그림과 같다

$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \theta_1 + \theta_2 = \pi$이므로

$\theta_2 = \frac{2}{3}\pi - \theta_1$

$$\begin{aligned}\overline{BH} &= \overline{OB}\sin\theta_2 \\ &= \sqrt{14}\, sin\left(\frac{2}{3}\pi - \theta_1\right) \\ &= \sqrt{14}\left(\sin\frac{2}{3}\pi\cos\theta_1 - \cos\frac{2}{3}\pi\sin\theta_1\right) \\ &= \sqrt{14}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} - \left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{\overline{BP}}{\overline{OB}}\right\} \\ &= \sqrt{14}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{14}} + \frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{14}}\right) \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

따라서 점 B에서 직선 OQ까지의 거리는 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$이다

다른 풀이

점 A에서 직선 BH에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\angle BAI = \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$

따라서

$\overline{BI} = 3\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

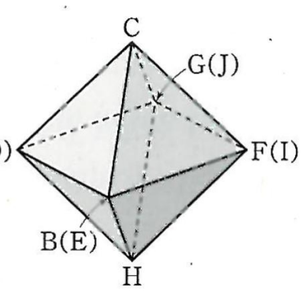
이므로

$$\begin{aligned}\overline{BH} &= \overline{BI} + \overline{IH} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

86) 답 ⑤

[해설] 주어진 전개도로 정팔면체를 만들면 점 A와 D, 점 G와 J, 점 B와 E, 점 F와 I가 겹쳐져서 그림과 같이 된다.

ㄱ. 사각형 $AHFC$는 정사각형이므로 직선 AC와 직선 FH는 평행하다. (참)

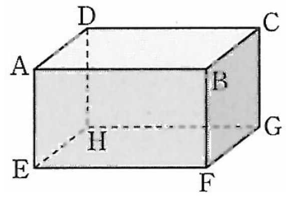


ㄴ. 평면 ABC와 직선 BH는 한 점 B에서 만나고, 직선 AC는 점 B를 지나지 않는 평면 ABC 위의 직선이므로 직선 AC와 직선 BH는 꼬인 위치에 있다. (참)

ㄷ. 직선 AC와 직선 FH가 평행하므로 직선 FH를 포함하고 직선 AC를 포함하지 않는 평면 FGH는 직선 AC와 평행하다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

87) 답 ④



[해설] 그림과 같은 직육면체 $ABCD-EFGH$ 에서 직선 AB와 평행한 직선은 세 직선 DC, EF, HG이므로 $a=3$, 직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선은 네 직선 DH, CG, EH, FG이므로 $b=4$

따라서 $a+b=3+4=7$

88) 답 ③

[해설] $\overline{CG} // \overline{BF}$ 이므로 직선 MF와 직선 CG가 이루는 예각의 크기는 직선 MF와 직선 BF가 이루는 예각의 크기와 같다. 즉, 직각삼각형 mfb에서 $\angle MFB = \alpha$이고, $\overline{BF} = 2k$라고 하면 $\overline{MF} = \sqrt{5}k$이므로 $\cos^2\alpha = \left(\frac{2k}{\sqrt{5}k}\right)^2 = \frac{4}{5}$

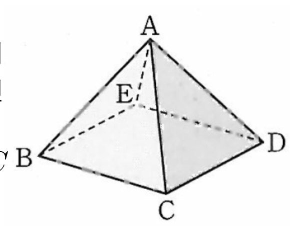
한편, $\overline{CF} // \overline{DE}$이므로 직선 BD와 직선 CF가 이루는 예각의 크기는 직선 BD와 직선 DE가 이루는 예각의 크기와 같다. 즉, 삼각형 DEB에서 $\angle BDE = \beta$이고, 삼각형 DEB는 정삼각형이므로 $\cos^2\beta = \cos^2\frac{\pi}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

따라서, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \frac{4}{5} + \frac{1}{4} = \frac{21}{20}$

89) 답 ⑤

[해설]

그림과 같은 정사각뿔 $A-BCDE$에서

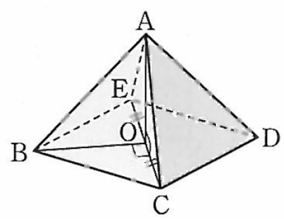


$\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$이므로 직선 AB와 직선 DE가 이루는 각의 크기 α는 직선 AB와 직선 BC가 이루는 예각의 크기와 같다.

즉, $\angle ABC = \alpha$이고, 이때 삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$\sin^2\alpha = \sin^2\frac{\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

또 다음 그림과 같이 선분 CE의 중점을 O라고 하자.



삼각형 AEC가 이등변삼각형이므로

$\overline{AO} \perp \overline{CE}$ ……㉠

삼각형 BCE가 이등변삼각형이므로

$\overline{BO} \perp \overline{CE}$ ……㉡

㉠, ㉡에 의하여 직선 CE가 평면 ABO와 수직이므로 $\overline{BO} \perp \overline{AB}$이다.

즉, $\beta = \frac{\pi}{2}$이므로

$\sin^2\beta = \sin^2\frac{\pi}{2} = 1^2 = 1$

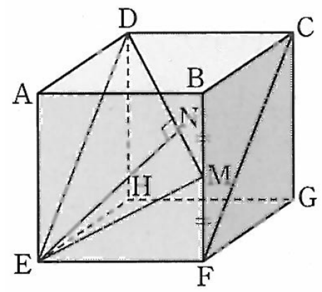
따라서 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\dfrac{3}{4}+1=\dfrac{7}{4}$

90) 답 3

[해설] 직선 CF는 직선 DE와 평행하므로 두 직선 DM, CF가 이루는 예각의 크기는 두 직선 DM, DE가 이루는 예각의 크기와 같다. 따라서 $\theta=\angle EDM$이다.

이때 정육면체의 한 모서리의 길이가 2이므로 삼각형 DEM에서 $\overline{DE}=2\sqrt{2}$, $\overline{EM}=\sqrt{5}$, $\overline{DM}=3$이다.

위 그림과 같이 삼각형 DEM의 꼭짓점 E에서 선분 DM에



내린 수선의 발을 N이라 하고 $\overline{DN}=x$라고 하면

$\overline{MN}=3-x$이고

$\overline{\mathrm{EN}}^2=\overline{\mathrm{DE}}^2-\overline{\mathrm{DN}}^2=\overline{\mathrm{EM}}^2-\overline{\mathrm{MN}}^2$이므로

$(2\sqrt{2})^2-x^2=(\sqrt{5})^2-(3-x)^2$

$8-x^2=5-9+6x-x^2$

$6x=12$

$x=2$

따라서 $\cos\theta=\cos(\angle EDM)=\dfrac{\overline{DN}}{\overline{DE}}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

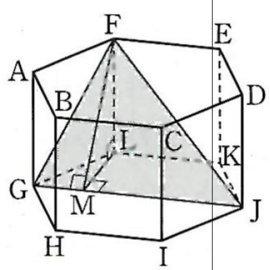
이므로 $\cos^2\theta=\dfrac{1}{2}$

그러므로 $p+q=2+1=3$

91) 답 ②

[해설] 점 F에서 직선 GJ에 내린 수선의 발을 M이라고 하면 점 F에서 평면 $GHIJKL$에 내린 수선의 발이 L이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{LM}\perp\overline{GJ}$이다.

즉, $\overline{FM}\perp\overline{GJ}$, $\overline{LM}\perp\overline{GJ}$이므로 평면 FGJ와 평면 $GHIJKL$이 이루는 예각의 크기는 두 직선 FM, LM이 이루는 예각의 크기와 같다. 따라서 $\theta=\angle FML$이다.



한편, 정육각형 $GHIJKL$에서 $\overline{GJ}\perp\overline{LH}$이므로 점 M은 선분 GJ와 선분 LH의 교점, 즉 선분 LH의 중점이다. 이때 정육각기둥의 한 모서리의 길이를 $2k$라고 하면

$\angle LGM=\dfrac{\pi}{3}$이므로

$\overline{LM}=\overline{LG}\sin\dfrac{\pi}{3}=2k\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\,k$

또 삼각형 FML은 직각삼각형이고 $\overline{FL}=2k$이므로

$\overline{FM}=\sqrt{\overline{FL}^2+\overline{LM}^2}=\sqrt{4k^2+3k^2}=\sqrt{7}\,k$

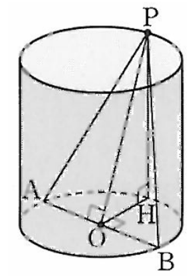
따라서 $\cos\theta=\cos(\angle FML)=\dfrac{\overline{LM}}{\overline{FM}}=\dfrac{\sqrt{3}\,k}{\sqrt{7}\,k}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

92) 답 ②

[해설] 그림과 같이 점 P에서 원기둥의 아래쪽에 있는 밑면에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

$\overline{PO}\perp\overline{AB}$, $\overline{PH}\perp$(평면 HAB)이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HO}\perp\overline{AB}$

즉, $\overline{PO}\perp\overline{AB}$, $\overline{HO}\perp\overline{AB}$이므로 두 평면 PAB와 HAB가 이루는 예각의 크기는 두 직선 PO와 HO가 이루는 예각의 크기와 같다. 따라서 $\theta=\angle POH$



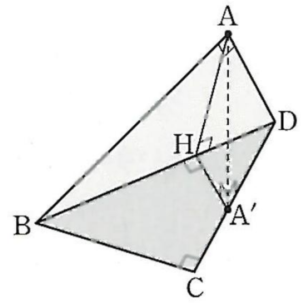
이때 삼각형 POH는 각 PHO가 직각인 직각삼각형이고 $\overline{HO}=1$, $\overline{PH}=2$이므로 $\overline{PO}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

따라서 $\cos\theta=\cos(\angle POH)=\dfrac{\overline{HO}}{\overline{PO}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

93) 답 241

[해설] 점 A에서 직선 BD에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발이 A'이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{A'H}\perp\overline{BD}$이다.

즉, $\overline{AH}\perp\overline{BD}$, $\overline{A'H}\perp\overline{BD}$이므로 평면 ABD와 평면BCD가 이루는 예각의 크기는 두 직선 $AH, A'H$가 이루는 예각의 크기와 같다. 따라서 평면 ABD와 평면 BCD가 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면 $\theta=\angle AHA'$이다.



한편, $\overline{BD}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2}=25$이고, 삼각형 ABD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times25\times\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\times20\times15$이므로 $\overline{AH}=\dfrac{20\times15}{25}=12$

직각삼각형 AHD에서 $\overline{DH}=\sqrt{15^2-12^2}=9$ 이고,

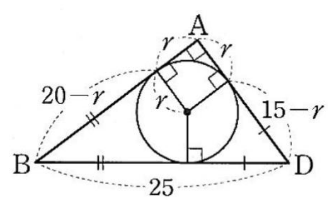
$\triangle DA'H$과 $\triangle DBC$가 닮음이고 $\overline{A'H}:\overline{BC}=\overline{DH}:\overline{DC}$이므로

$\overline{A'H}=\dfrac{\overline{BC}\times\overline{DH}}{\overline{DC}}=\dfrac{15\times9}{20}=\dfrac{27}{4}$

이때 삼각형 AHA'은 각 $AA'H$가 직각인 직각삼각형이므로

$\cos\theta=\dfrac{\overline{A'H}}{\overline{AH}}=\dfrac{\frac{27}{4}}{12}=\dfrac{9}{16}$

또 삼각형 ABD의 내접원의 반지름의 길이를 r이라고 하면 오른쪽 그림에서 $(20-r)+(15-r)=25$이므로 $r=5$



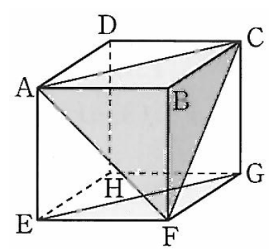
삼각형 ABD의 내접원의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이를 S라고 하면

$S=25\pi\times\cos\theta=25\pi\times\dfrac{9}{16}=\dfrac{225}{16}\pi$

따라서 $p+q=16+225=241$

94) 답 ②

[해설] 두 점 A, C에서 평면 $EFGH$에 내린 수선의 발이 각각 E, G이므로 삼각형 AFC의 평면 $EFGH$ 위로의 정사영이 삼각형 EFG이다.



$\overline{AB}=a$라고 하면 삼각형 AFC는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}\,a$인 정삼각형이므로

$\triangle AFC = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2}a)^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$

또 삼각형 EFG는 빗변이 아닌 한 변의 길이가 a인 직각이등변삼각형이므로 $\triangle EFG = \dfrac{1}{2}a^2$

이때 $\triangle EFG = \triangle AFC \times \cos\theta$이므로

$\cos\theta = \dfrac{\triangle EFG}{\triangle AFC} = \dfrac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

95) 답 11

[해설] 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 한 평면을 결정한다. 삼각기둥의 꼭짓점 6개 중에서 서로 다른 3개를 택하는 경우의 수는

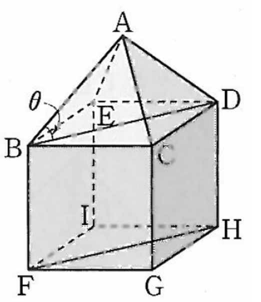
${}_6C_3 = \dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$

하지만 세 평면 $ADEB$, $BEFC$, $ADFC$에서 각각 서로 다른 세 점을 선택하는 경우는 각각 4가지씩인데 이 4가지가 결정하는 평면은 모두 같은 평면이다.

따라서 주어진 삼각기둥의 각 꼭짓점으로 결정되는 서로 다른 평면의 개수는 $20-3\times3=11$

96) 답 ③

[해설]



그림과 같은 입체도형에서 $\overline{FH}//\overline{BD}$이므로 직선 AB와 직선 FH가 이루는 예각의 크기는 직선 AB와 직선 BD가 이루는 예각의 크기와 같다.

즉, $\angle ABD=\theta$이다.

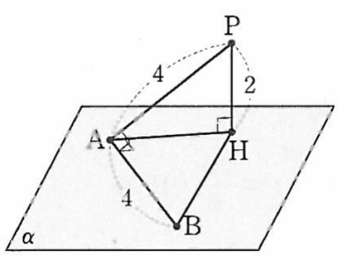
이때 삼각형 ABD에서 $\overline{AB}=\overline{AD}=1$이고, $\overline{BD}=\sqrt{2}$이므로 삼각형 ABD는 $\angle BAD=\dfrac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이다.

따라서 $\angle ABD=\dfrac{\pi}{4}$이므로

$\cos\theta = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

97) 답 ⑤

[해설]



그림과 같이 선분 PH는 평면 α에 수직이므로 $\overline{PH}\perp\overline{AH}$

따라서 삼각형 PAH는 각 PHA가 직각인 직각삼각형이므로

$\overline{AH}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

또 $\overline{PA}\perp\overline{AB}$, $\overline{PH}\perp\alpha$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AH}\perp\overline{AB}$

따라서 삼각형 ABH는 각 HAB가 직각인 직각삼각형이므로

$\overline{BH}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

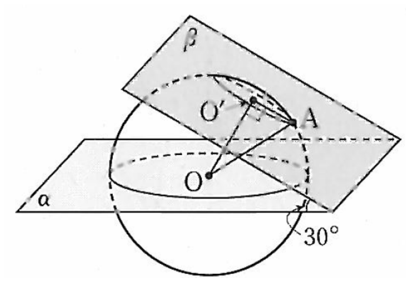
98) 답 ②

[해설] 평면 β와 구의 교선은 원이므로 이 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 넓이는 πr^2이다.

이 원의 평면 α위로의 정사영의 넓이가 $2\sqrt{3}\pi$이고 두 평면이 이루는 예각의 크기가 30°이므로

$2\sqrt{3}\pi = \pi r^2 \times \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi r^2$에서 $r=2$

그림과 같이 평면 β와 구의 교선인 원의 중심을 O'이라 하고, 원 위의 임의의 점을 A라고 하자.



직선 OO'이 평면 β에 수직이므로 $\overline{OO'}\perp\overline{O'A}$

따라서 삼각형 OAO'은 각 $OO'A$가 직각인 직각삼각형이고, $\overline{OA}=5$, $\overline{O'A}=r=2$이므로

$\overline{OO'}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$

즉, 구의 중심 O와 평면 β 사이의 거리는 $\sqrt{21}$이다.

99) 답 ③

[해설] ㄱ. 직선 l이 평면 β와 한 점 P에서 만난다고 가정하자. 점 P에서 두 평면 α, β의 교선에 내린 수선의 발을 H라고 하면 직선 PH가 평면 α에 수직이므로 직선 PH와 직선 l이 일치한다. 따라서 직선 l이 평면 β에 포함되고 이것은 평면 β가 직선 l을 포함하지 않는다는 가정에 모순이다. 따라서 직선 l이 평면 β와 만나지 않으므로 $l//\beta$이다. (참)

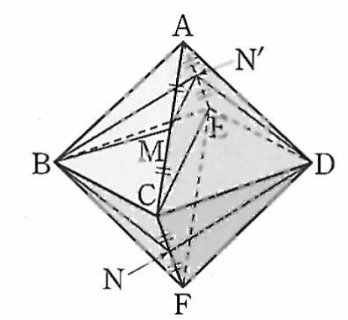
ㄴ. 평면 β와 수직인 직선 m이 평면 α위에 있으면 직선 l과 수직임이 자명하다. 만일 직선 m이 평면 α 위에 있지 않으면 평면 α와 평행하다. 이때 직선 m을 평면 α에 포함되도록 평행이동한 직선을 m'이라고 하면 $l\perp m'$이므로 $l\perp m$이다. 따라서 평면 β와 수직인 직선 m은 직선 l과 수직이다. (참)

ㄷ. [반례] 두 평면 α, β의 교선은 평면 α위에 있으므로 직선 l과 수직이다. 하지만 평면 β에 포함되므로 평면 β와 수직이 아니다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

100) 답 ④

[해설] 그림과 같이 선분 AE의 중점을 N'이라고 하자.



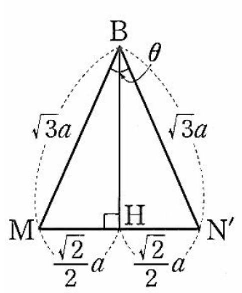
이때 $\overline{BN}=\overline{ND}=\overline{DN'}=\overline{N'B}$이므로 사각형 $BNDN'$은 마름모이다. 따라서 $\overline{BN'}//\overline{DN}$

또 삼각형 ACE에서 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의하여 $\overline{MN'}=\dfrac{1}{2}\overline{CE}$

정팔면체의 한 모서리의 길이를 $2a$라고 하면 다음 그림과 같이 삼각형 BMN'은 $\overline{BM}=\overline{BN'}=\sqrt{3}a$,

$\overline{MN'}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}a=\sqrt{2}a$

인 이등변삼각형이고 점 B에서 선분 MN'에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\overline{MH}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$



이때 직선 BM과 직선 DN이 이루는 예각의 크기는 직선 BM과 직선 BN'이 이루는 예각의 크기와 같으므로 $\theta = \angle MBN'$이다.

따라서 $\angle MBH = \frac{\theta}{2}$이고

$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{6}}{6}$이므로

$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - 2\times\frac{1}{6} = \frac{2}{3}$