

일차변환의 이해(심화편)

1. 벡터의 정의

벡터의 정의는 ‘크기와 방향을 가진 물리량’입니다. 그러나 이 정의는 과연 타당할까요? 다음의 예로 생각해 봅시다.

상자 A,B 에 각각 과일 x,y 개가 들어 있다. 물리량 $V=(x,y)$ 로 정의할 때, V 는 벡터인가?

V 가 크기와 방향을 가졌다는 것은 분명합니다. 그러나 직관상 V 를 벡터로 인정하기에는 미심쩍을 것입니다. 실제로도 V 는 벡터가 아닙니다. 그 이유는 V 는 변환 f 에 의해 적절히 변환되지 않기 때문입니다. 예를 들어 좌표상의 점 $P(1,0)$ 이 있을 때, 이 점은 90° 회전변환 f 에 의해 $P'(0,1)$ 로 변환됩니다. 그러나 위에서 정의한 V 는 어떠한 f 에 대해서도 변환되지 않는 것이 분명합니다. 90° 회전변환의 행렬이 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 와 같이 표현되므로 단순히 $V=(x,y)$ 를 대입하여 $V'=(-y,x)$ 를 얻어내면 된다고 할 수 있으나, 이는 일차변환의 또 다른 의미를 잘 이해하지 못했기 때문에 나올 수 있는 반응입니다.

2. 일차변환의 이해

일차변환 f 는 점 P 를 P' 로 옮기는 것이라고 할 수 있습니다. 이는 일차변환의 일차적인 의미이며, 많은 문제들에서 충분히 다루고 있는 내용입니다. 그런데 일차변환을 점이 아니라 좌표축을 옮기는 것이라고 생각해 볼 수도 있습니다.

평면에서 임의의 벡터 \vec{X} 는 서로 다른 두 벡터의 일차결합으로 나타낼 수 있기 때문에, 항상 $X=aA+bB$ 의 꼴로 나타낼 수 있습니다. 이렇게 나타낸 뒤, 두 벡터 A 와 B 를 새로운 두 단위벡터로 보는 것입니다(크기가 1이 아니라도). 그렇다면 이러한 관점에서 제 문제를 해석해 봅시다.

3. 예제 풀이

중심이 $(1,1)$ 이고 반지름이 $\sqrt{2}$ 인 원 위에 서로 다른 임의의 두 점 P, Q 가 존재한다. 일차변환 f 에 의해 P 는 Q 로, Q 는 원점으로 옮겨질 때 다음 중 항상 옳은 것은? [4점]

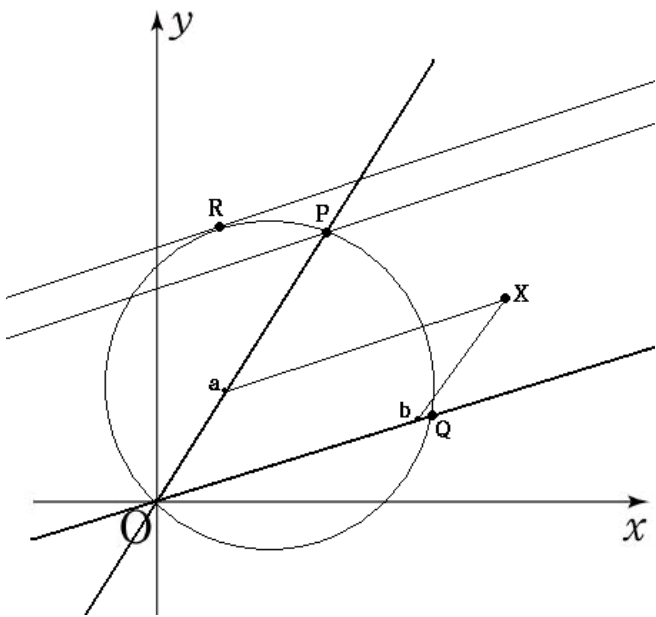
ㄱ. f 를 나타내는 행렬 A 에 대하여 $A^n = O$ 인 최소의 자연수 n 은 2이다.

ㄴ. 원 위의 점 중 f 에 의해 Q 로 옮겨지는 점은 항상 2개 존재한다.

ㄷ. P 의 좌표가 $(2,2)$ 일 때, \overline{OQ} 와 원으로 둘러싸인 두 부분 중 작은 부분의 호의 길이를 l 이라 하면 “ f 에 의해 선분 \overline{OQ} 이외의 점으로 옮겨지는 원 위의 점들의 집합이 만드는 도형의 길이” = l 이다.

조건에 따르면 $f(P)=Q, f(Q)=O$ 을 만족합니다. 그러므로 임의의 점 $X=aP+bQ$ 에 대해 $f(X)=aQ$ 를 만족합니다. 이로부터 임의의 점은 직선 OQ 위로 옮겨진다는 것을 알 수 있습니다. 또한 $f(f(X))=O$ 이므로 $A^2=O$ 가 되어 ㄱ이 참임을 쉽게 알 수 있습니다.

이제 아래 그림을 봅시다. 어떤 점 X 에서 OQ 에 평행한 직선을 그었을 때 OP 와 만나는 점, OP 에 평행한 직선을 그었을 때 OQ 와 만나는 점으로부터 PQ 좌표계에서의 X 의 좌표를 읽을 수 있습니다. 이는 $X=aP+bQ$ 로 표현될 때, (a,b) 가 됨이 이제 보일 것입니다.



그러므로 X 가 P 를 지나고 OQ 에 평행한 직선보다 아래쪽에 위치하는 경우, a 는 1보다 작은 값을 가지게 되고, OQ 보다 위쪽에 존재하는 경우 a 는 0보다 큰 값을 가지게 됩니다. ㄴ의 경우에는 $a=1$ 인 원 위의 X 가 언제나 2개인지 묻는 선지인데, 보통의 경우에는 성립하지만 특별히 $P=Q$ 인 경우에는 $X=Q$ 인 점 하나밖에 존재하지 않음을 알 수 있습니다. 그러므로 ㄴ은 거짓입니다.

마지막으로, ㄷ의 조건에 따라 P 가 $(2,2)$ 이면, P 는 직선 $y=x$ 위에 존재합니다. 이제 임의의 Q 를 잡으면, f 에 의해 \overline{OQ} 이외의 점으로 옮겨지는 점을 묻고 있으므로 $a > 1$ 또는 $a < 0$ 인 원 위의 점의 집합을 말하는 것입니다. 이에 따라 평행선을 P 에서 하나, Q 에서 하나씩 그으면 두 평행선 사이에 위치하는 호가 바로 \overline{OQ} 로 옮겨지는 점들이고 이외의 점들이 $a > 1$ 또는 $a < 0$ 을 만족하는 점이 됩니다. 그러므로 이러한 호의 길이는 $2l$ 이 되어 ㄷ은 거짓입니다.

이 자료를 통하여 일차변환의 이해에 한 걸음 더 다가설 수 있기를 기원합니다.