2012경찰대 해설

1. 답⑤

준 식을 변형하면 $xy+yz+zx=0$ 이므로 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2=2$ 이다. 양변을 6제곱하면 64이다.

2. 답④

집합 $A\cup B$는 $A-B$, $A\cap B$, $B-A$의 세 부분으로 나눠지는데 $A-B=\{1,3,5\}$이므로 나머지 3개가 미포함, $A\cap B$, $B-A$의 3개를 선택하는 경우의 수는 $3^3=27$이다.

3. 답④

일차방정식을 정리하면 $(a^2-1)x=a+1$ 이므로 불능인 경우에 $a=1$이다. 근과 계수와의 관계를 이용하면 $\alpha^2+\beta^2=17$이다

4. 답②

25의 배수가 되려면 끝의 두 자리가 25, 50, 75 중 하나로 끝나야 한다. 각각의 경우에 대한 경우의 수는 16, 20, 16으로 합은 52이다.

5. 답①

로피탈의 정리를 이용하면 $\lim_{x\to 0}(3-2x)f'(3x-x^2)=\frac{1}{3}$이다.

이를 정리하면 $f'(0)=\frac{1}{9}$이다.

6. 답③

준 식 $=\left(\dfrac{\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}}{2e^{-\frac{\pi}{3}i}}\right)^{13}=\dfrac{\sqrt{2}}{2^7}e^{-\frac{5}{12}\pi i}$ 이므로

$\therefore |x|+|y|=\dfrac{\sqrt{2}}{2^7}\times(\cos 75^\circ+\sin 75^\circ)=\dfrac{\sqrt{3}}{2^7}$

7. 답②

양 변에 밑이 15인 로그를 취하고 $\log_{15}x=t$라고 치환하면

준 식 : $t^2-2t+\frac{1}{2}=0$, 두 근이 모두 양수이므로 실근이다.

두 근 $x=\alpha,\ \beta$ 라고 하면 근과 계수와의 관계에서

$t_1+t_2=\log_{15}\alpha\beta=2.\ \therefore \alpha\beta=15^2$

8. 답①

구하고자 하는 것을 B라고 놓고 $(A-A^{-1})B$를 계산하면

$A^{2^{14}}-\left(A^{2^{14}}\right)^{-1}$ 을 얻는다. 그런데 $A^2+A+E=O$ 이므로

$A^3=E$ 이다. 이용해서 정리하면 $(A-A^{-1})B=A-A^{-1}$이고

$A-A^{-1}$은 역행렬을 가지므로 $B=E$ 이다.

9. 답③

미분가능성을 이용하여 미정계수를 결정하면 $a=3,\ b=-2$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k}{n}\right)=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx+\frac{1}{2}\int_1^2 f(x)dx=\frac{3}{2}$$

10. 답④

$f(x)=-(x+1)^2(x-1)$과 같이 인수분해되므로 쉽게 개형을 확인 가능하다. $3x+4y=k$로 놓으면 직선과 $f(x)$가 접할 때 k의 최댓값을 얻는다. $-1\leq x\leq 1$에서 접점은 $\left(\frac{1}{2},\frac{9}{8}\right)$ 이므로 $k\leq 6$ 이다.

11. 답②

$6<\alpha+\beta<8,\ 5<\alpha\beta<12$ 이므로 근과 계수와의 관계에서 $6a<b<8a,\ 5a<3c<12a$이다. a,b,c는 한 자리 자연수이므로 첫 식에서 $a=1,\ b=7$을 얻고, 두 번째 식에서 $c=3$을 얻는다. $\therefore a+2b+3c=24$

12. 답②

$1=\sum_{x=1}^{90}P(X=x)=\sum_{x=1}^{90}\frac{a}{2}(1+\cos 2x^\circ)$이고, 코사인은 $\frac{\pi}{4}$에 대하여 점대칭 함수이므로 코사인 항은 모두 지워지고 $x=90$인 경우 하나만 남는다. $\therefore 89a=2$ 임을 알 수 있다.

$P(30\leq x\leq 60)$도 $30\sim 44$와 $46\sim 60$이 대칭이므로 사라지고, $x=45$역시 코사인 값은 0이다. 이상 계산하면 $P=\frac{31}{89}$이다.

13. 답①

A_n과 A_{n+1} 사이의 각은 항상 60°이고 $\overline{OA_n}=\left(\frac{3}{4}\right)^n$이므로 코사인 제 2법칙으로 일반항을 구할 수 있다. 계산하면

$\overline{A_nA_{n+1}}=\frac{\sqrt{13}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n$을 얻고, 따라서 문제의 값은 $\frac{3\sqrt{13}}{4}$

14. 답④

$$\boxed{\begin{aligned} a_2 &= -1-3a_1 \\ a_3 &= \ \ 2-3a_2 \\ a_4 &= -3-3a_3 \\ &\ \vdots \\ a_{2011} &= 2010-3a_{2010} \end{aligned}}$$

$\sum_{n=1}^{2011}a_n=S$ 라고 정의한 뒤 좌측의 식을 변변 더하면 다음을 얻는다.

$$S-a_1=1005-3(S-a_{2011})$$

그런데 $3a_{2011}=-(2011+a_{2012})$이므로 이를 대입해서 정리하면

$4S=-1006+a_1-a_{2012}$ 이고, 문제에 따라 $a_1-a_{2012}=2$이다. 그러므로 $S=-251$ 이다.

15. 답③

참가자가 n명일 때 기준을 만족시킨 사람을 x명이라고 하면 $0.935n\leq x\leq 0.945n$이 성립한다. $x=n$ 일 수는 없으므로 $x=n-1$인 경우에 n이 존재한다면 최솟값이 된다. 이 경우 부등식을 풀면 $15.385<n<18.182$(근삿값)이고 최소 $n=16$이다.

16. 답②

ㄱ. 자명하다.

ㄴ. ㄱ과 더불어 $a\cdot 10^q<5^n<(a+1)\cdot 10^q$ 또한 성립함을 알 수 있다. 양 변을 곱하면 $a^2 10^{p+q}<10^n<(a+1)^2 10^{p+q}$이고, $p+q<n$이므로 양 변을 10^{p+q}로 나누면 ㄴ이 참이다.

ㄷ. ㄴ의 결과에 $a=7$을 대입하면 r이 존재하지 않으므로 모순

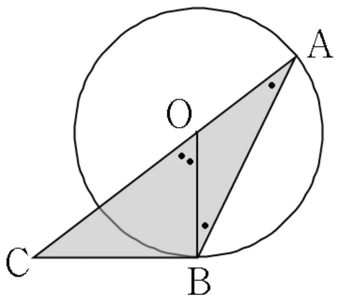
종합하면 ㄱ,ㄴ이 참이다.

17. 답36 - 보기에 없음*풀이 마지막에 첨부(25번뒤)

18. 답④

0부터 3^n-1까지의 수를 3진법으로 나타내면 n개의 칸 각각에 0,1,2를 채우는 모든 경우의 수가 나온다. 그러므로 각 칸마다 0, 1, 2가 각각 3^{n-1}번씩 사용된다. 문제에서는 $n=4$인 경우이므로 $\frac{27\times 3}{3}+\frac{27\times 3}{9}+\frac{27\times 3}{3}+\frac{27\times 3}{1}=40$ 을 얻는다.

19. 답⑤



오른쪽 그림에서 $\angle OAB = \theta$라고 하면 $\sin(\angle BOA) = \sin 2\theta$이다.
ACB의 넓이$= COB + OAB$ 이므로

$COB = \frac{9}{2} \times \tan 2\theta = \frac{18\sqrt{2}}{7}$

$OAB = \frac{9}{2} \times \sin 2\theta = 2\sqrt{2}$,

$\therefore ACB = \frac{32\sqrt{2}}{7}$이다.

20. 답④

주어진 식의 좌변만 보면 $x \geq 0$에서 기울기의 최솟값이 $x=0$일 때 -10이다. 그러므로 $a=-9$로 하고 b를 잘 조절하면 두 양의 실근을 갖도록 할 수 있다. 그런데 $a=-9$이면 두 근의 합이 일정하므로 중근을 가질 때가 $\alpha^2+\beta^2$이 최소가 되는 때이다. 중근은 $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$이므로 $p=-9$, $q=\frac{1}{2}$에서 $pq=-\frac{9}{2}$ 이다.

21. 답①

문제의 집합에 속한 점 (x,y)는
$4x^2-2ax+a \leqq y \leqq -4x^2+3a$를 만족하므로 이러한 점이 하나라도 존재하면 문제의 조건을 만족한다.
$\therefore 4x^2-2ax+a \leqq -4x^2+3a$ 가 해를 가질 조건과 동치이다.
이차방정식의 판별식을 이용하면 $a \leqq -16$, $a \geqq 0$을 얻는다.

22. 답⑤

ㄱ. M의 원소인 두 자리 자연수가 있다고 가정하면 그 수의 각 자릿수는 5보다 작다.($\because 5! > 100$) 또한 $1 \sim 4$계승의 조합으로 만들 수 있는 두 자리 자연수는 12,25,26,30,48 인데 5개 모두 M의 조건에 맞지 않으므로 두 자리 자연수 중 M의 원소는 없다.
ㄴ. $7! > 1000$이므로 7이상의 수가 자릿수에 존재하면 모순.
ㄷ. 8이상의 자연수의 경우 $9!$에 비하여 자연수가 너무 크기 때문에 M의 조건이 성립할 수 없다.(예를 들어 $8 \times 9! < 10^7$)

23. 답③

a를 임의대로 정하여 1234라고 가정하자. 이 때 B에서 1234를 뽑았을 경우와 아닐 경우로 나눌 수 있다.
(1) 1234를 뽑은 경우(확률 1/5)

$p = \frac{n=4\text{인 교란순열}}{4!} = \frac{3}{8}$

(2) 다른 경우(확률 4/5)
a와 3개가 공통이고 하나가 다르다. 1235를 뽑았다고 해 보자.
5가 4자리에 있는 경우 > $n=3$인 교란순열 = 2
5가 다른 곳에 있는 경우 > $3 \times 3 = 9$
그러므로 $p = \frac{11}{4!} = \frac{11}{24}$

(1),(2)에서 전체 확률을 계산하면 $P = \frac{1}{5} \times \frac{3}{8} + \frac{4}{5} \times \frac{11}{24} = \frac{53}{120}$

24. 답①

접선을 $g(x)=ax+b$라 놓으면 $f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$을 만족한다. 근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha+\beta=0$이므로 이를 정리하면 $f(x)-g(x)=x^4-2\alpha^2x^2+\alpha^4$을 만족하고, 일차항이 존재하지 않으므로 $a=6$이다. 대입해서 정리하고 양변의 계수 비교를 통하여 $b=-\frac{5}{4}$, $\alpha^2=\frac{3}{2}$를 찾아낼 수 있다.

$\therefore g(x) = 6x - \frac{5}{4}$

25. ③

수직선상에서 $x_2=a$이고, $x_3=a-t(a-1)$, $x_4=x_3+t^2(a+1)$과 같이 진행되므로 x_n은 공비가 $-t$인 등비급수를 가진 수열이다.
$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = a - \frac{t(a-1)}{1+t}$이다. 이 값이 정수가 되는 t가 11개 존재하므로 $t=\frac{p}{q}(p<q)$라고 하면 $a-1$은 $p+q$의 배수가 된다.
이러한 (p,q)는 $(1,22),(2,21),\cdots,(11,12)$ 와 같은 11쌍이 있고 이외에 $(1,23),(2,22),\cdots,(11,13)$의 11쌍이 있다. 그러나 $p+q$를 25로 할 경우에는 $p<q$인 순서쌍이 12개가 만들어져서 조건에 맞지 않는다. $\therefore a-1=23$ or 24 , 모든 a의 합 = 49

<첨부>

17.

$y=4x^2+2px-9$를 원점에 대해 대칭 이동시킨 포물선은 $y=-4x^2+2px+9$이다. 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면 되므로 빼면 $\Delta y = 8x^2-18$, x축과 $\pm\frac{3}{2}$에서 만난다.

$\therefore S = \frac{8}{6} \times (3^3) = 36$