수능 수학
핵심을
스피드 하게

저자 이 기 준
임 병 주

orbibooks.com

책소개

수능 수학 핵심을 스피드하게(수핵스)교재는 크게 Part 1과 Part 2로 나누어집니다.

“Part 1”은 실전에서 이용할 수 있는 정말 필요한 핵심 43가지의 Point로 이루어져 있으며, “Part 2”은 문제 전반에 걸쳐 필요한 실전 도구를 훈련하는 교재로 기본 Point와 심화 Point로 나누어 집니다.

Part 1과 Part 2는 독립적으로 공부하는 것이 아니라, Part 1을 학습하면서 동시에 Part 2를 통해 필요한 도구를 훈련해 가는 것으로 책의 두 파트를 동시에 공부해야 좋은 시너지 효과를 낼 수 있도록 구성하였습니다.

Part 1. 본문편

“Part 1 – 본문편” 은 미적분2 19가지 Point, 기하와 벡터 10가지 Point, 확률과 통계 14가지 Point로 총 핵심 포인트 43가지로 이루어져 있습니다.

기출문제를 풀면서 가져야 하는 최소한의 도구를 바탕으로 실전에서 어떻게 문제를 일관되게 해결할지에 대한 내용이 기출문제(수능, 평가원, 교육청, 사관학교)를 바탕으로 훈련할 수 있는 파트입니다.

이 실전 Point들을 바탕으로 지금까지 출제되었던 수능, 평가원, 교육청, 사관학교를 가리지 않고 기출문제에 적용 훈련하면서 기출에 녹아 있는 Code를 학습할 것입니다. 또한 아직 기출에서 출제되지 않은, 앞으로 출제될 수 있는 유형의 문제들에 대한 포인트도 정리하였습니다.

그리고 몇몇 Point를 학습하시면서 심화 내용이나 실전 현장에서 가져야할 행동영역을 [Eureka Point]에서 학습하실 수 있습니다. 또한 실전 현장에서 어려운 문제들 및 호흡이 긴 문제들의 경우에는 [Algorithm]에서 정리하여 체화하기 쉽도록 구성하였습니다.
그리고 문제에서 실전에서 유용한 [Tip]등을 통해 실전에서 어떻게 푸는 것이 도움이 될 지에 대한 현실적인 방안들도 생각할 수 있게 구성하였습니다.

ORBIBOOKS.COM

Part 2. 도구편

"Part 2- 도구편(Appendix)"은 미적분2, 기하와 벡터, 확률과 통계를 개별적으로 나누어서 다루는 것이 아니라 문제 해결에 필요한 ① 실전 도구, ② 특정 Killer로 출제 되는 테마별 문항, ③ 빠른 풀이 이 3가지를 훈련할 수 있도록 단원에 구애없이 구성하였습니다.

Part 2는 기본 파트와 심화 파트로 나누어져 구성되어 있습니다.
기본 파트에서는 미정계수와 관계식, 보조선 그리기, 최대와 최소, 함수, 접선, 중복조합의 심층적 이해 등 수능 수학에서 빠뜨릴 수 없는 중요한 문제들을 해결할 수 있는 도구를 배웁니다. 심화 파트에서는 벡터방정식과 벡터의 층 이론, 미적분의 근본 정리와 변화율, 함수의 극한 Speed 풀이(난짱극), 평면 구면상의 점을 표현하는 방법(구면 좌표계)와 같이 조금은 어려울 수 있는 도구들을 배워 수학적 사고를 심화시킬 수 있는 내용과 빠른 풀이를 훈련하여 시간 단축에 필요한 내용들을 학습할 수 있습니다.

많은 공부는 필요 없습니다. 해야 할 공부만 하면 됩니다.
수학은 대학을 가는데 있어서 더 이상 가장 중요한 과목은 아닙니다.
더욱 더 빠르고, 간결하며 정확하게 수능 수학을 대비해야 합니다.

저희 책 수능 수학 핵심을 스피드하게(수핵스)는 이러한 면에서 가장 완벽한 책이라고 자부할 수 있습니다.
주변의 수 많은 저자들과의 만남과 그들의 저서를 통해서 제가 느낀 점과 저자분들의 조언을 통해 지금 이 책이 탄생하였습니다.

기존의 책과는 다른 내용과 방식으로 이 책을 증명하도록 하겠습니다.
간결하면서도 알차면서도 그 이상의 내용까지 담은 수핵스로 2019학년도 대학수학능력시험을 대박나시길 기원합니다.

저자소개

이기준(울산대학교 의예과) | 임병주(한양대학교(서울) 공과대학)

서평

이해원 (오르비 역대 최고의 베스트셀러 저자)

안녕하세요. 오르비 역대 최대 베스트셀러&스테디셀러 저자 이해원입니다.

이 서평은 제가 처음으로 쓰는 서평이며 그만큼 추천하는 책이기도 합니다.

먼저, 수핵스는 수능에 가장 필요한 부분만을 스피드하게 대비할 수 있도록 잘 요약한 책이라고 볼 수 있습니다. 요즘과 같은 수능 시험에 100점을 받기는 참 어렵지만, 96점은 꽤 많이 받아가는 현실에서 96점까지 받는 것은 이 교재를 활용하면 정말 빠르게 달성할 수 있다고 생각합니다. 물론, 이 책을 더 잘 활용하여 100점을 받을 수도 있을 것입니다.

책의 저자는 한 때 저에게서 수학을 배웠고 수능과 수리논술 등 모든 면에서 가장 훌륭한 학생 중 하나였습니다. 메이저 의대를 진학하여 지금도 대학에서 훌륭한 성적을 거두고 있다는 점에서 오르비의 검증되지 않은 많은 저자와는 명백히 차이점을 갖고 있습니다. 제가 누구인지 알기에 그만큼 추천 드리고 싶은 책입니다.

제가 확신할 수 있는 것은, 실력과 대학 모든 것이 검증된 저자에게 '가장 효율적인 방법을 배울 수 있다.'라는 것입니다. 정확한 방법론이나 근거도 없이 교과서만 강조하는 무책임한 수많은 책들과는 명백히 다르며 현실적으로 수능에서 가장 빠르게 점수를 올리는 방법을 담은 책이라 보면 됩니다.

이 책은 과정에도 충실하였습니다. 종종 어떤 책들은 양이 많은 것에 비해 과정이 불분명한 경우도 많은데, 그런 점을 비추어 볼 때 이 책은 충분한 정당성과 명쾌함을 확보하였다고 생각합니다. 이는 드러나 있는 기출 분석 방법뿐만 아니라 새롭게 출제되는 문제에까지도 좋은 영향을 주게 될 것입니다.

길게 설명 드릴 필요는 없을 것 같습니다. 저는 책 제목 그대로는 물론, 이를 잘 활용한다면 저자가 요구하는 것 이상을 뽑아낼 수 있을 것이라 확신합니다. 여러 번 반복해서 이 책의 모든 것을 완벽하게 공부하길 권합니다.

ORBIBO OKS.COM

이덕영 (포카칩, 대학생 실모의 원조)

이 책의 저자는 책을 처음 집필하지만, 다년간의 수험 기간 및 학생 지도 경험을 토대로 효율적으로 대학수학능력 시험을 대비할 수 있는 내용들로 책을 구성하였습니다.

보통 이 책의 저자에 대해서 너무 내용이 과하지 않을까 하는 편견을 가질 수 있지만, 책을 펼쳐보면 정말 이정도로 충분할까 싶을 정도로 핵심적인 내용 위주로 간결하게 담겨 있음을 확인할 수 있습니다. 몇 개의 문제를 제외하고는 전반적으로 쉽게 출제되는 지금의 수능 기조에서는 이 책에서 다루는 내용을 잘 이해하고 자기 것으로 만드는 것만으로도 수능 시험을 대비하기에 충분할 것으로 보이며 부족한 부분들은 스스로 추가적인 문제를 해결해나가는 것으로 보충할 수 있을 것입니다.

한편, 또 하나 눈여겨볼 점은 이 책의 수학적 완성도 및 시험에 대한 태도는 저자가 왜 의대생인지를 여지없이 보여주는 책이라고 생각합니다. 단순히 수학 공부를 하는 것을 넘어서서, 저자가 주어진 시험을 어떠한 관점으로 대비하는지를 배운다면, 책을 보는 3개월이 아닌 대학교 이후 계속해서 만나는 시험들에도 영향을 많이 받을 수 있으리라 확신하며, 그 점이 이 책이 갖는 중요한 지점인 것 같습니다.

따라서 책을 볼 때에는 수학적인 내용도 중요하지만, 저자의 생각과 태도가 드러나는 부분들도 유심히 읽어보며 필요한 부분을 반드시 스스로의 것으로 만들기를 권합니다.

1. 평면곡선

평면곡선은 두 가지 파트로 나누어집니다.
첫 번째 파트는 이차곡선(포물선, 타원, 쌍곡선)의 정의를 이용한 문제를 해결하는 파트이고, 두 번째는 평면곡선의 접선으로 음함수의 미분법과 매개변수의 미분법을 이용하여 접선의 방정식을 세우는 파트입니다.
두 번째 파트는 Part 2 교재의 Appendix Point 5- 접선에서 다루고
Part 1 교재에서는 평면곡선의 접선을 따로 다루지 않도록 하겠습니다.
평면곡선 문제를 해결하는 데 있어서 가장 핵심 포인트는 정의를 이용하는 것입니다. 문제를 풀 때, 의식적으로 "무조건" 먼저 해야 할 일은

'이차곡선의 정의 그림을 완성 한다'

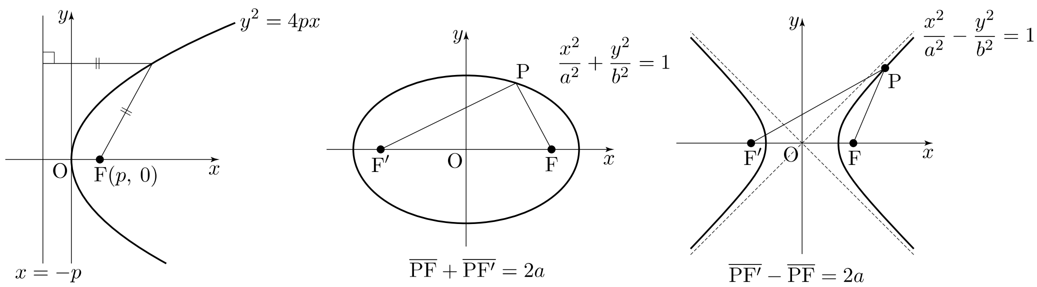
입니다.

간혹, 2013년 대학수학능력시험 수학 가형 18번 문제[23]에서처럼 초점 공식($\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{p}$)을 이용하여 풀면 빠르게 풀 수 있는데 이에 혹하여, 이차곡선에서 공식을 이용해서 문제를 푸는 것이 '주'가 되어서는 안 됩니다.
정의를 이용한 정석 풀이를 '우선적'으로 하고, 특수한 공식을 이용한 풀이는 '부차적' 으로 해야 합니다.
정의를 이용한 풀이+ 공식을 이용한 풀이[24]를 잘 병용할 수 있다면, 이차곡선 문제를 빠르게 해결할 수 있습니다.

(1) 포물선
초점 $\mathrm{F}(p, 0)$에서 포물선 위의 점까지의 거리는 포물선 위의 점에서 준선까지의 거리와 같다.
(2) 타원
타원 위의 점에서 두 초점 사이의 거리의 합은 장축의 길이($2a$)와 같다.
(3) 쌍곡선
쌍곡선 위의 점에서 두 초점 사이의 거리의 차[25]는 주축의 길이($2a$)와 같다.

23) Point 1- 예제 4번 문제를 참고하도록 합시다.
24) 공식을 이용한 풀이는 Point 3에서 배웁니다.
25) '차'는 절댓값임을 주의하자.

Point 1 이차곡선 정의 그림의 완성



[이차 곡선의 정의 그림]

이차곡선 정의 그림을 완성한 후 어떤 길이의 값을 구하라는 경우가 많습니다.
이때, 가장 중요한 것이 길이를 변수로 잡아야 한다는 것입니다.
(길이를 변수로 잡을 것 인지, 좌표를 변수로 잡을 것인지는 Eureka Point 1에서 다루겠습니다.)

길이를 변수로 잡고 관계식을 세워, 방정식을 풀면 됩니다.
관계식을 만들 때 정의를 이용하여 한 문자에 대한 식을 세우고,
1) 피타고라스의 정리, 2) 도형의 닮음 성질, 3) 각도사이의 관계(특수 각)를 이용하여 관계식을 세웁니다.

Point 이차곡선 정의 그림의 완성

1. 정의 그림을 완성하여 이차곡선의 정의를 활용한다.
2. 구하고자 하는 부분과 연관된 길이를 변수로 잡아 관계식을 세워야 한다.
   ① 피타고라스의 정리를 이용해서 관계식을 세운다.
   ② 도형의 닮음 성질을 이용해서 관계식을 세운다.
   ③ 각도 사이의 관계 (특수 각, 정다각형) 을 이용해서 관계식을 세운다.

*주의 1: 한 문자에 대한 관계식을 세웠을 때, 양변이 같아지는 결과가 나오면 관계식을 잘못 세웠음을 인지해야 한다. 최대한 정의를 이용해서 식을 다시 세워야 한다.
*주의 2: 정의를 이용한 풀이를 "우선적"으로 하고, 특수한 공식을 이용한 풀이는 "부차적"으로 해야 한다.

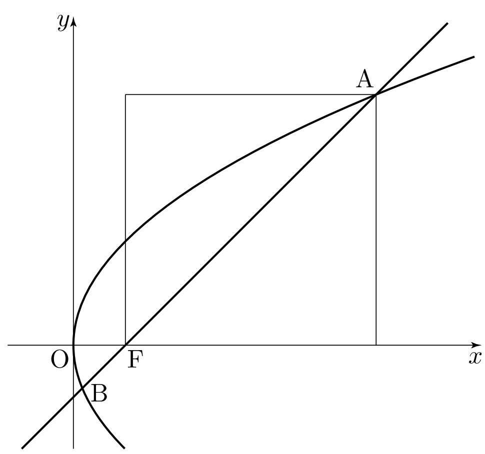
Eureka Point ① 변수잡기 : 길이를 변수로 vs 좌표를 변수로

이차곡선 문제에서 길이를 변수로 잡지 않고, 좌표를 변수로 잡아 말리는 경우가 많은데, 길이를 변수로 잡으면 쉽게 풀리는 문제를 좌표를 변수로 잡아서 문제를 풀었다든지, 아니면 그 반대의 경우입니다. 다음 아래의 기출 문제를 좌표로 푸는 풀이와 길이를 변수로 잡는 풀이로 해결해보도록 합시다.

예제 2013학년도 9월 모의평가 수학 가형 26번

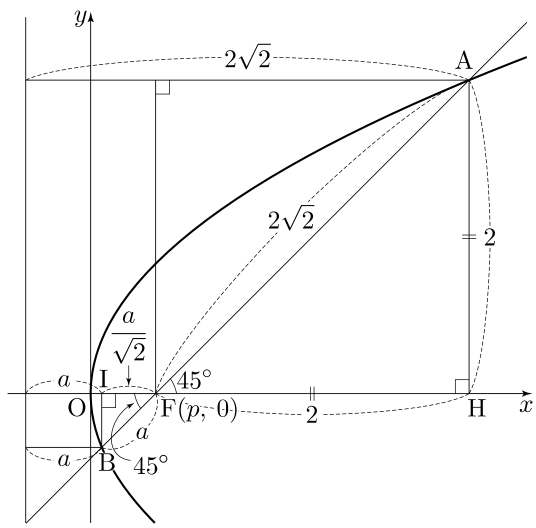
그림과 같이 좌표평면에서 꼭짓점이 원점 O 이고, 초점이 F 인 포물선과 점 F 를 지나고 기울기가 1인 직선이 만나는 두 점을 각각 A, B 라 하자. 선분 AF 를 대각선으로 하는 정사각형의 한 변의 길이가 2일 때, 선분 AB 의 길이는 $a+b\sqrt{2}$ 이다. a^2+b^2 의 값을 구하시오.

(단, a, b는 정수이다.)



풀이 1) 길이를 변수로 잡아서 푸는 풀이 – $\overline{\mathrm{FB}}=a$

이차곡선에서 가장 먼저 해야 할 일은 무조건 정의 그림을 이용해서 문제를 풀어갈 생각을 해야 합니다. 포물선에서 정의 성질을 이용하기 위해 정의 그림을 완성하면 다음과 같습니다.



정의 그림을 완성 한 후 우리가 구하고자 하는 답은 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{FB}}=2\sqrt{2}+\overline{\mathrm{FB}}$ 이므로, $\overline{\mathrm{FB}}$ 의 길이만 구하면 됩니다. 따라서 구하고자 하는 길이 $\overline{\mathrm{FB}}=a$라고 길이를 변수로 둔 후 문제의 조건을 이용하여 관계식을 세워야 합니다.

발문의 조건에 따르면, 정사각형이라고 했으므로, $\angle\mathrm{AFH}=45^{\circ}$ 입니다.
따라서 맞꼭지각에 의하여 $\angle\mathrm{BFI}=45^{\circ}$ 입니다. 특수각을 이용하여

$\overline{\mathrm{FI}}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ 이므로, $a+\dfrac{a}{\sqrt{2}}+2=2\sqrt{2}$ 입니다. 이를 정리해서 a의 값을 구하면

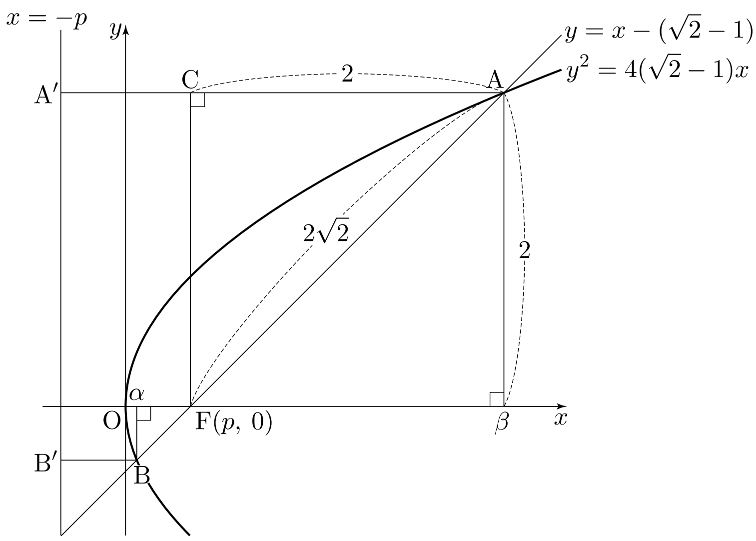
$a=-8+6\sqrt{2}$ 입니다.

구하고자 하는 답은 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}=2\sqrt{2}+(-8+6\sqrt{2})=8\sqrt{2}-8$ 입니다.

$a^2+b^2=128$ 입니다.

답 : 128

풀이 2) 좌표를 변수로 잡아서 푸는 풀이



[그림]

[그림]과 같이 포물선의 방정식을 $y^2=4px$라 하면, 초점은 $\mathrm{F}(p, 0)$입니다.

문제에서 정사각형의 한 변의 길이가 2이므로, $\overline{\mathrm{AF}}=2\sqrt{2}$ 이고,

$\overline{\mathrm{CA'}}=2\sqrt{2}-2=2p$이므로, $p=\sqrt{2}-1$입니다.

이 때, $\begin{cases} y^2=4(\sqrt{2}-1)x \\ y=x-(\sqrt{2}-1) \end{cases}$ 의 교점의 x좌표를 각각 $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$라 하면,

구하고자 하는 답은 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}=(\beta+p)+(\alpha+p)=2p+(\alpha+\beta)$이므로,

포물선의 방정식과 직선의 방정식을 연립해서 정리하면

$x^2-6(\sqrt{2}-1)x+(3-2\sqrt{2})=0$의 두 근이 α, β이므로,

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $\alpha+\beta=6\sqrt{2}-6$입니다.

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}=2p+(\alpha+\beta)&=2(\sqrt{2}-1)+(6\sqrt{2}-6)\\&=8\sqrt{2}-8\end{aligned}$$

따라서, $a=8$, $b=-8$이므로, $a^2+b^2=128$입니다.

답 : 128

이 문제를 해결할 때 1) 길이를 변수로 잡아서 풀 든, 2) 좌표를 변수로 잡아서 풀 든 둘 다 좋은 풀이입니다. 다만, 대부분의 문제는 좌표를 변수로 잡아서 푸는 풀이보다는 길이를 변수로 잡아서 푸는 것이 더 깔끔하게 정리가 됩니다.

따라서 문제를 풀 때, 길이를 변수로 잡는다는 생각을 '우선적'으로 하시고, 구하고자 하는 길이와 관련 있는 부분을 변수로 잡은 뒤,

(1) 피타고라스의 정리,

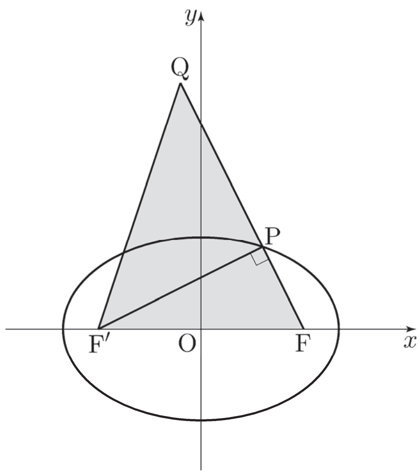
(2) 닮음의 성질,

(3) 각도 사이의 관계 (특수각, 정다각형)의 성질

이 세 가지를 적절히 이용합시다.

예제 1 2015학년도 대학수학능력시험 수학 가형 27번

타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F'이라 하자. 이 타원 위의 점 P를 $\angle \mathrm{FPF'}=\frac{\pi}{2}$가 되도록 제 1사분면에서 잡고, 선분 FP의 연장선 위에 y좌표가 양수인 점 Q를 $\overline{\mathrm{FQ}}=6$이 되도록 잡는다. 삼각형 QF'F의 넓이를 구하시오.



가장 먼저 정의 그림을 떠올립시다.
타원의 정의그림이 이미 완성되어 있으므로,
$\overline{\mathrm{FP}}+\overline{\mathrm{F'P}}=6$이라는 식을 세울 수가 있습니다.

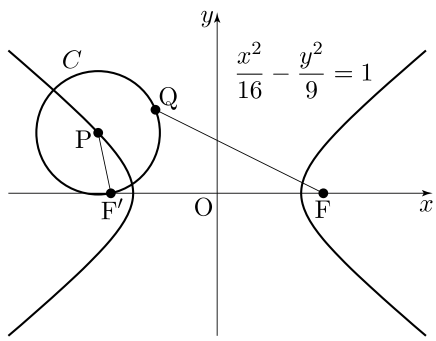
$\overline{\mathrm{FF'}}=2\sqrt{5}$ 이므로 $\overline{\mathrm{FP}}=a$라 하면, $\overline{\mathrm{F'P}}=6-a$입니다.

따라서 직각삼각형 $\triangle \mathrm{PFF'}$에서 피타고라스 정리에 따라서 $a^2+(6-a)^2=20$이 되고,
$a=2$입니다.
따라서 $\overline{\mathrm{PF'}}=4$($\because \overline{\mathrm{PF}}<\overline{\mathrm{PF'}}$)가 되고,
삼각형 $\triangle \mathrm{QF'F}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 6\times 4=12$입니다.

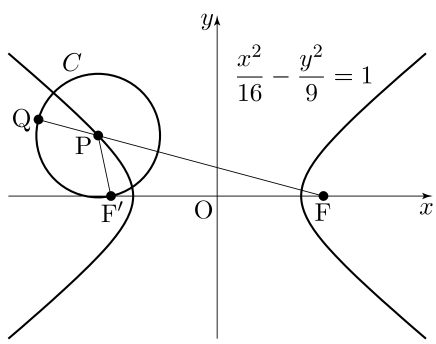
답 : 12

예제 2 2017학년도 6월 모의평가 수학 가형 18번

그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점을 F, F'이라 하고, 이 쌍곡선 위의 점 P를 중심으로 하고 선분 PF'을 반지름으로 하는 원을 C라 하자. 원 C 위를 움직이는 점 Q에 대하여 선분 FQ의 길이의 최댓값이 14일 때, 원 C의 넓이는? (단, $\overline{\mathrm{PF}'}<\overline{\mathrm{PF}}$)



정의 그림을 완성하기 위해 $\overline{\mathrm{FP}}$를 이어야 합니다.



[그림]

[그림]과 같이 쌍곡선의 정의에 따라서 $\overline{\mathrm{FP}}-\overline{\mathrm{F'P}}=8$이 되고,

원의 반지름 $\overline{\mathrm{PF}'}=r$이라 하면, 위 그림과 같을 때, $\overline{\mathrm{FQ}}$가 최대가 되므로,

$\overline{\mathrm{FQ}}=\overline{\mathrm{FP}}+r=14$ ·········(1)가 됩니다. $\overline{\mathrm{FP}}-\overline{\mathrm{F'P}}=\overline{\mathrm{FP}}-r=8$ ·········(2) 이므로,

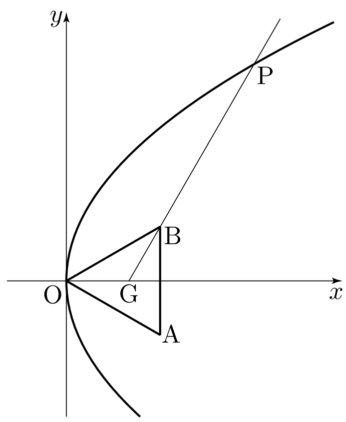
두 식을 연립하면 $r=3$이 되므로 답은 9π

답 : 9π

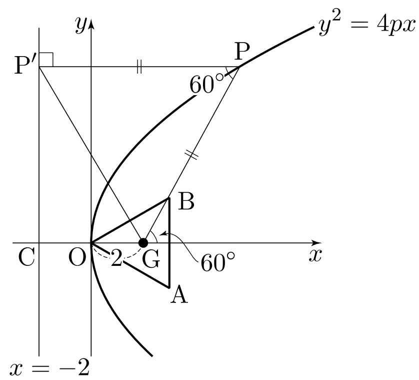
예제 3 2012학년도 6월 모의평가 수학 가형 29번

그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형 OAB의 무게중심 G가 x축 위에 있다. 꼭짓점이 O이고 초점이 G인 포물선과 직선 GB가 제 1사분면에서 만나는 점을 P라 할 때, 선분 GP의 길이를 구하시오.

(단, O는 원점이다.)



포물선 정의 그림을 완성하면 다음과 같습니다.



준선 $x=-2$에 대하여, 점 P에서 $x=-2$에 내린 수선의 발을 P′이라 하고,

준선이 x축과 만나는 점을 C라 합시다. 포물선의 정의에 따라 $\overline{PP'}=\overline{GP}$와 같고,

직선 PG와 x축이 이루는 각은 60° 이므로 엇각의 성질에 따라서 $\angle P'PG=60^\circ$ 입니다.

$\overline{PP'}=\overline{GP}$ 이므로 삼각형 GPP′은 정삼각형이 되고,

삼각형 GCP′에서 $\angle P'GC=60^\circ$ 인 직각삼각형이므로 $\overline{GP'}\cos 60^\circ=4$ 이므로,

$\overline{GP'}=8$입니다. 따라서 $\overline{PP'}=\overline{GP}=\overline{GP'}$ 이므로 답은 8

답 : 8