최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 $x$에 대하여 집합 $S$를

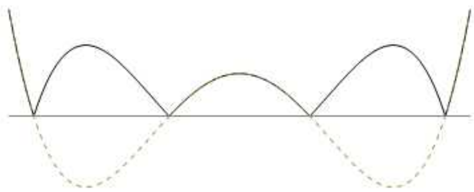
$$S=\{a\,|\,\text{함수 } |f(x)-t| \text{가 } x=a \text{에서 미분 가능하지 않다.}\}$$

라 하고, 집합 $S$의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오.

---

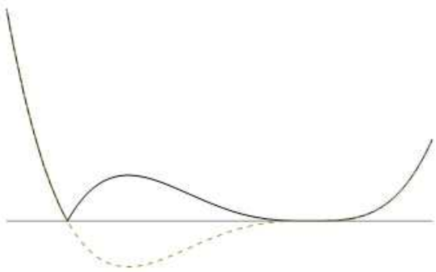
$S$라는 집합이 어떤 집합인지부터 그림으로 확인하는 것이 중요하겠지요.

$f_t(x)=|f(x)-t|$ 라는 함수는, 함수 $f(x)$의 그래프를 직선 $y=t$를 기준으로 윗쪽으로 꺾어 접어올린 함수와 같은 개형입니다. 정확히 말하자면, 그래프 $y=f(x)$를 $t$만큼 아래로 잡아 끌인 후, $x$-축을 기준으로 함수를 위로 접어올린 개형이 됩니다.



하지만 어차피 불연속점의 개수만 중요하기 때문에 둘을 구분하는 것은 의미가 없으며, 따라서 설명할 때 둘을 섞어서 말하겠습니다.

이때 접히는 부분 - 즉, $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 지점들 - 이 뾰족한 지점이 되려면, 아래 그림에서 보다시피 그 만나는 지점에서 $y=f(x)$의 기울기가 0이 아니어야 하지요.



이런 간단한 관찰로부터, 우리는 S가 다음과 같은 집합임을 알 수 있습니다.

$$S=\{x\,|\,f(x)=0, f'(x)\neq 0\}$$

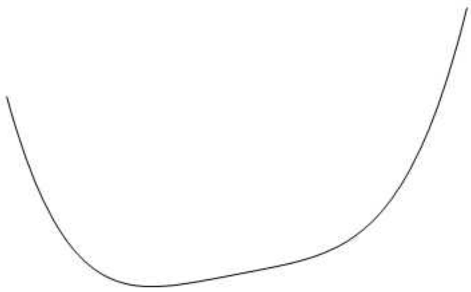
혹은 이를 $g(t)$에 대한 표현으로 바꾸면,

$$g(t) = (f(x) = t \text{ 이지만 } f'(x) \neq 0\text{을 만족하는 } x\text{의 개수})$$

라고 적을 수 있습니다.

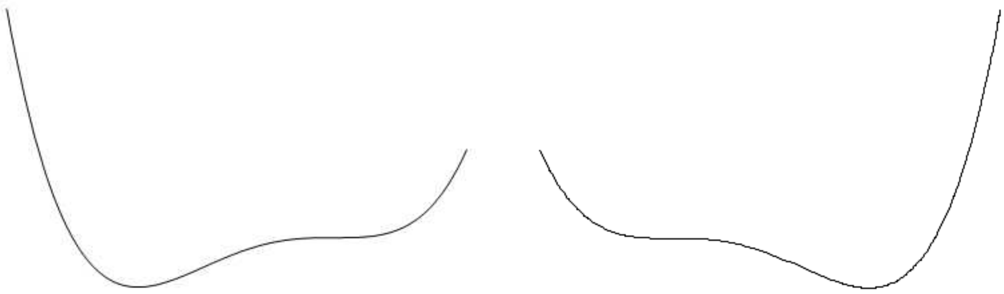
한편, $f(x)$는 사차함수이므로, $f'(x)$의 근의 종류와 $f(x)$의 극대극소를 조사함으로써 다음과 같이 네 가지 그래프 개형 중 하나에 속한다는 것을 알 수 있습니다.

$\boxed{\text{경우 1}}$ $f'(x) = 0$가 단 하나의 실근만을 갖거나 삼중근을 갖는 경우, $y = f(x)$의 개형은



와 같이 되며, 이 경우 함수의 최소값에 해당하는 $t$값 한 군데서만 $g(t)$가 불연속이 됩니다.

$\boxed{\text{경우 2}}$ $f'(x) = 0$이 하나의 중근과 하나의 근을 가지는 경우, $y = f(x)$의 개형은



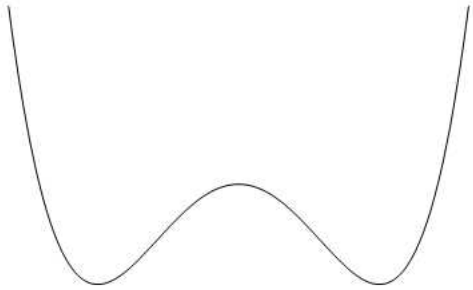
와 같이 나타납니다. 이때 $f'(x) = A(x-\alpha)(x-\beta)^2$ 이라고 하면 (단, $\alpha \neq \beta$), $f(x)$의 최소값은 $x = \alpha$에서 일어나며, 그래프에서 함수가 증가 혹은 감소 도중에 잠시 쉬어가면서 기울기가 0이 되는 지점은 $x = \beta$가 됩니다. 그리고 이때 $g(t)$의 변화를 살펴보면

| $t$ | ~ | $f(\alpha)$ | ~ | $f(\beta)$ | ~ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(t)$ | 0 | 0 | 2 | 1 | 2 |

가 됩니다. 따라서 이 경우 $g(t)$는 두 개의 불연속점을 갖습니다.

$\boxed{\text{경우 3}}$ $f'(x) = 0$이 서로 다른 세 실근 $\alpha < \beta < \gamma$를 가지는 경우, $y = f(x)$는 $x = \alpha, \gamma$에서 극소가 되고 $x = \beta$에서 극대가 됩니다. 이때 $f(\alpha) = f(\gamma)$인가 아닌가에 따라 다시 함수가 두 가지로 나뉩니다.

$\boxed{\text{경우 3-1}}$ $f(\alpha) = f(\gamma)$인 경우, $y = f(x)$의 개형은

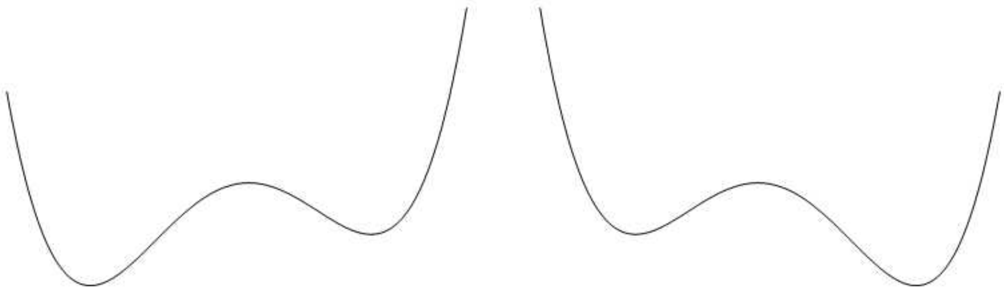


와 같이 나타납니다. 그리고 이때 $g(t)$의 변화를 살펴보면

| $t$ | ~ | $f(\alpha)$ | ~ | $f(\beta)$ | ~ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(t)$ | 0 | 0 | 4 | 2 | 2 |

가 된다. 따라서 이 경우 $g(t)$는 두 개의 불연속점을 갖습니다.

경우 3-1 $f(\alpha)=f(\gamma)$인 경우, $y=f(x)$의 개형은



과 같이 나타납니다. 이때 $f(\alpha)$와 $f(\gamma)$ 중 작은 값을 $m$, 큰 값을 $M$으로 표시하면, $g(t)$의 변화는 다음과 같이 나타납니다.

| $t$ | ~ | $m$ | ~ | $M$ | ~ | $f(\beta)$ | ~ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(t)$ | 0 | 0 | 2 | 2 | 4 | 2 | 2 |

따라서 이 경우 3개의 불연속점이 나타납니다.

그러므로 우리는 오직 경우 2, 혹은 경우 3-1만 가능함을 알 수 있습니다. 그리고 두 경우 모두 $g(t)$가 불연속이 되는 $t$의 최소값이 바로 $f(x)$의 최소값이라는 것을 알고 있습니다. 그런데 공교롭게도(?) $f(0)=3$이 성립합니다. 따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 최소값을 갖습니다. 이제 각각의 경우를 가정하고 문제를 풀어보도록 하겠습니다.

우선 경우 2를 가정합시다. 그러면 그래프의 개형으로부터, $x>0$일 때 $f'(x)\geq 0$이어야 함을 알 수 있습니다. 그러나 문제 조건으로부터 $f'(3)<0$ 이 성립하므로, 이 경우는 불가능합니다.

따라서 경우 3-1만 가능합니다. 그러면 우리는 함수의 그래프의 개형과 $f'(3)<0$이라는 조건

으로부터, 다음 두 가지 사실을 알아낼 수 있습니다.

(1) $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 $\alpha<\beta<\gamma$ 로 적으면, $f(x)$는 $x=\alpha,\gamma$에서 최소가 됩니다. 그런데 우리는 이미 $f(x)$가 $x=0$에서 최소가 됨을 알고 있으므로, $\alpha=0$이거나 $\gamma=0$입니다. 그런데 $\gamma=0$이면 $x>\gamma=0$일 때 $f'(x)>0$이어야 하는데, 이는 문제조건 $f'(3)<0$과 충돌하니다. 따라서 $\alpha=0$입니다.

(2) $f(x)$의 그래프는 직선 $x=\beta$를 기준으로 대칭적이기 때문에, $\alpha$와 $\gamma$가 $\beta$로부터 같은 거리만큼 떨어져 있어야 합니다. 즉, $\beta-\alpha$와 $\gamma-\beta$가 같은 값이어야 합니다. 따라서 $\gamma=2\beta$입니다.

그러므로 우리는 $f'(x)=Ax(x-\beta)(x-2\beta)$ 꼴로 나타남을 알 수 있습니다. 그리고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로, 미분하여 최고차항을 비교해봄으로써 $f(x)=4x(x-\beta)(x-2\beta)$임을 알 수 있습니다. 따라서

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3+\int_0^x f'(t)\,dt \\
&= 3+\int_0^x (4t^3-12\beta t^2+8\beta^2 t)\,dt \\
&= x^4-4\beta x^3+4\beta^2x^2+3
\end{aligned}
$$

이 성립합니다. 그런데 우리는 역시 경우 3-1 에서의 관찰로부터, $f(x)$의 극대값이 19이고 그 극대값은 $x=\beta$에서 발생함을 이미 알고 있습니다. 따라서 $19=f(\beta)=\beta^4+3$ 이고, 이 방정식의 유일한 양수해 $\beta$는 $\beta=2$밖에 없습니다. (여기서 $\beta$가 양수인 이유는 $\beta>\alpha=0$이기 때문입니다.) 그러므로

$$f(x)=x^4-8x^3+16x^2+3$$

이고, $x=-2$를 대입하면 $f(-2)=147$입니다.