

수학 영역(가형)

성명

수험번호

- 자신이 선택한 유형('가'형 / '나'형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.

별과 바다와 하늘의 이름으로도 그대를 꿈꾼다.

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 유형('가'형 / '나'형), 답을 정확히 표기하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오.
배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

Epsilon

2017년 11월 4일 시행
Epsilon 모의고사 2회 (가형)

출제위원 : 성균관대학교 수학교육과 수학문제연구학회 Epsilon

16학번 : 김동균, 김민지, 송세령, 안성준, 이준희

17학번 : 김국연, 김도훈, 김동규, 김정빈, 문혁준,
박승용, 석진우, 조영호, 최수영

편집위원 : 성균관대학교 수학교육과 수학문제연구학회 Epsilon 편집위원회

16학번 : 김동균, 송세령

17학번 : 김정빈, 석진우

제 2 교시

Epsilon

수학 영역(가형)



성균관대학교 수학교육과 Epsilon 주관

5지선다형

1. 두 벡터 $\vec{a} = (3, 3)$, $\vec{b} = (1, -2)$ 에 대하여 벡터 $\vec{a} + \vec{b}$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\ln(1+8x)}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

3. 좌표공간에서 두 점 $A(1, 0, -2)$, $B(a, 3, b)$ 에 대하여 선분 AB의 중점이 y 축 위에 있을 때, $a+b$ 의 값은? [2점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

4. 방정식 $8^x = 4^{-x+5}$ 을 만족시키는 실수 x 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 두 사건 A 와 B 는 서로 배반사건이고

$$P(A \cup B) = \frac{5}{6}, \quad P(A^c) = \frac{7}{12}$$

일 때, $P(B)$ 의 값은? (단, A^c 는 A 의 여사건이다.) [3점]

- ① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

6. 함수 $f(x) = \ln(e^x + 1)$ 에 대하여 $f'(0)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{5}{2}$ ② 2 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{1}{2}$

7. 학생 A 를 포함한 9명의 학생들 중에서 청소 당번 3명을 뽑을 때, A 를 포함하여 3명을 뽑는 경우의 수는? [3점]

- ① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

8. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 일 때, 방정식

$$\sqrt{3}\sec^2 x - 4\tan x = 0$$

의 모든 해의 합은? [3점]

- ① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{2\pi}{3}$ ⑤ $\frac{5\pi}{6}$

9. 어느 편의점에서는 전체 음료수 중에서 A 회사 음료수, B 회사 음료수가 차지하는 비율이 각각 70%, 30%이다. 이 편의점의 A 회사 음료수 중에서 탄산음료가 차지하는 비율은 30%이고, B 회사 음료수 중에서 탄산음료가 차지하는 비율은 40%이다. 이 편의점의 전체 음료수 중에서 임의로 선택한 음료수 1개가 탄산음료일 때, 선택한 음료수가 B 회사 음료수일 확률은? [3점]

- ① $\frac{2}{11}$ ② $\frac{3}{11}$ ③ $\frac{4}{11}$ ④ $\frac{5}{11}$ ⑤ $\frac{6}{11}$

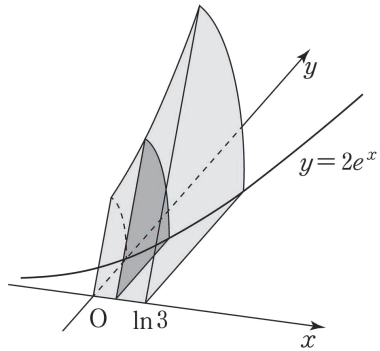
10. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = e^x + x \int_0^1 f(t) dt$$

를 만족시킬 때, $\int_0^1 f(t) dt$ 의 값은? [3점]

- ① $2e-2$ ② $2e-1$ ③ $3e-3$
④ $3e-2$ ⑤ $3e-1$

11. 그림과 같이 곡선 $y=2e^x$ 과 x 축, y 축 및 직선 $x=\ln 3$ 으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 중심이 x 축 위에 있고 중심각의 크기가 1(라디안)인 부채꼴일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

12. 좌표공간에서 직선 $\frac{x+3}{2} = y-1 = 2-z$ 가 평면 $x+2y+az+b=0$ 위에 있을 때, 두 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

13. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 위치 (x, y) 가

$$\begin{cases} x = t \sin t + \cos t \\ y = t \cos t - \sin t \end{cases}$$

이다. 시각 $t=0$ 에서 $t=t_0$ 까지 점 P가 움직인 거리가 $3t_0$ 일 때, t_0 의 값은? (단, t_0 는 양의 상수이다.) [3점]

- ① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

14. 확률변수 X 는 평균이 m , 표준편차가 2인 정규분포를 따르고 다음 등식을 만족시킨다.

$$P(|X - m| \leq 4) = 2P(m \leq X \leq 2 - m)$$

오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 $P(X \geq 2)$ 의 값을 구한 것은? (단, $m < 1$) [4점]

- ① 0.1587 ② 0.1498 ③ 0.0919
④ 0.0668 ⑤ 0.0228

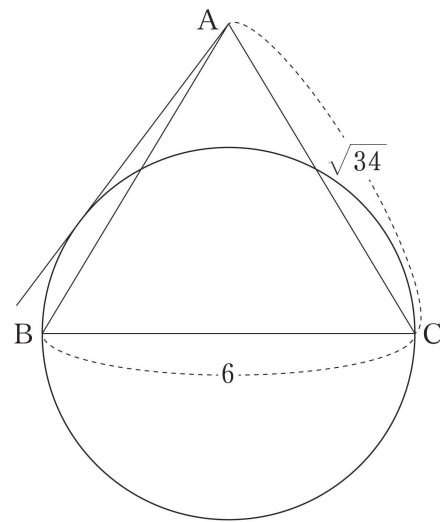
z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

15. 좌표평면 위에 곡선 $y = -\frac{1}{x-4} + 2$ 가 있다. 이 곡선 위의 점 $A\left(t, -\frac{1}{t-4} + 2\right)$ ($0 < t < 4$)에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 하자. 점 A에서의 접선에 의하여 직사각형 OBAC의 넓이가 이등분될 때, 상수 t 의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

16. $\overline{AB} = \overline{AC} = \sqrt{34}$, $\overline{BC} = 6$ 인 이등변삼각형 ABC가 있다. 점 A에서 선분 BC를 지름으로 하는 원에 그은 접선과 직선 AB가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\tan \theta$ 의 값은? (단, $\theta < \angle BAC$) [4점]

- ① $\frac{3}{29}$ ② $\frac{4}{29}$ ③ $\frac{5}{29}$ ④ $\frac{6}{29}$ ⑤ $\frac{7}{29}$



17. 어느 도시에서 8시간 이상 잠을 자는 고등학생의 비율을 알아보기 위하여 이 도시의 고등학생 중 400명을 임의추출하여 조사한 결과 8시간 이상 잠을 자는 학생의 비율이 \hat{p} 인 것으로 나타났다. 이 결과를 이용하여 구한 이 도시의 전체 고등학생 중에서 8시간 이상 잠을 자는 학생의 비율 p 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \leq p \leq b$ 이다.
 $b - a = 0.196(b + a)$ 일 때, 양수 \hat{p} 의 값은?
 (단, Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.475$ 로 계산한다.) [4점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

18. 좌표공간에서 $\overline{AB} = 12$ 인 두 점 A, B 에 대하여 직선 AB 를 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 인 두 평면 α 와 β 가 있다. 평면 α 위의 점 P 와 평면 β 위의 점 Q 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\angle ABP = \frac{\pi}{2}$, $\overline{BP} = 4\sqrt{3}$

(나) 직선 AP 와 직선 BQ 는 수직이다.

- 점 Q 와 직선 AB 사이의 거리가 $3\sqrt{6}$ 일 때, 삼각형 BPQ 의 넓이는? [4점]

- ① 12 ② $12\sqrt{2}$ ③ $12\sqrt{3}$ ④ 24 ⑤ $12\sqrt{5}$

19. 다음은 x 에 대한 다항식 $(3x+1)^{30}$ 의 전개식에서 x^n 의 계수를 a_n 이라 할 때, a_n 이 최댓값을 갖도록 하는 자연수 n ($1 \leq n \leq 30$)의 값을 구하는 과정이다.

$(3x+1)^{30}$ 의 전개식에서 x^n 의 계수가 a_n 이므로

$$a_n = \boxed{\text{가}}$$

이다.

$${}_{30}C_n = \frac{30!}{n!(30-n)!} = \frac{30 \times 29 \times \cdots \times (31-n)}{n!}$$

이므로 a_n 과 a_{n-1} 사이의 관계를 나타내면

$$a_n = a_{n-1} \times \boxed{\text{나}} \quad (n \geq 2)$$

이다. $2 \leq k \leq 29$ 인 자연수 k 에 대하여

$$a_k > a_{k-1}, \quad a_k > a_{k+1}$$

을 동시에 만족시키는 k 의 값은 하나이고

그 값은 $\boxed{\text{다}}$ 이다.

따라서 a_n 이 최댓값을 가질 때의 n 의 값은 $\boxed{\text{다}}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 하고, (다)에 알맞은 수를 p 라 할 때, $f(1) \times g(30) + p$ 의 값은? [4점]

- ① 31 ② 32 ③ 33 ④ 34 ⑤ 35

20. 좌표평면에 중심이 O_1 이고 반지름의 길이가 3인 원 C_1 에 중심이 O_2 이고 반지름의 길이가 2인 원 C_2 가 내접해 있고, 접점을 A라 하자. 원 C_1 위의 점 P와 원 C_2 위의 점 Q가

$$\overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_1Q} = -2, \quad \overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_2Q} = 0$$

을 만족시킨다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점]

<보 기>

$$\neg. \overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_1O_2} = -2$$

$$\neg. \overrightarrow{O_2Q} \cdot \overrightarrow{O_1O_2} \text{의 최솟값은 } -\frac{2\sqrt{5}}{3} \text{이다.}$$

$$\text{ㄷ. } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} \text{의 최댓값은 } 10+2\sqrt{5} \text{이다.}$$

- ① \neg ② ㄷ ③ \neg, \neg
 ④ $\neg, \text{ㄷ}$ ⑤ $\neg, \neg, \text{ㄷ}$

21. 실수 전체의 집합에서 역함수를 갖고, 도함수가 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} & \text{(가) } x > 0 \text{ 일 때,} \\ & \quad 0 \leq (f \circ f)(x) - f(0) \leq \{2f'(0) - 1\}x \text{ 이다.} \\ & \text{(나) } \int_0^2 \{f(x) + f^{-1}(x)\} dx = 4 \end{aligned}$$

구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 사차함수의 그래프의 일부이다. 가능한 사차함수의 최고차항 계수 중에서 최솟값은?

[4점]

- ① $-\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{8}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

단답형

22. ${}_3H_4$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 이산확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$E(3X+8)$ 의 값을 구하시오. [3점]

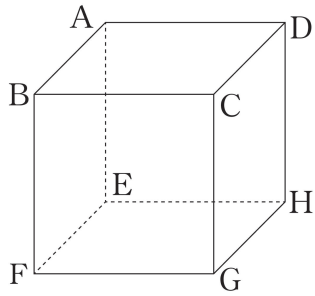
24. 곡선 $2x^2 - x^4y + y^3 = 2$ 위의 점 $(-1, -1)$ 에서의 접선의 기울기를 구하시오. [3점]

26. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수를 구하시오. [4점]

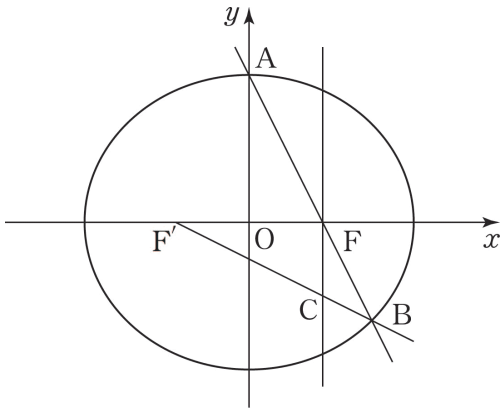
(가) $x + y + z = 12$

(나) $x \times y > 4$

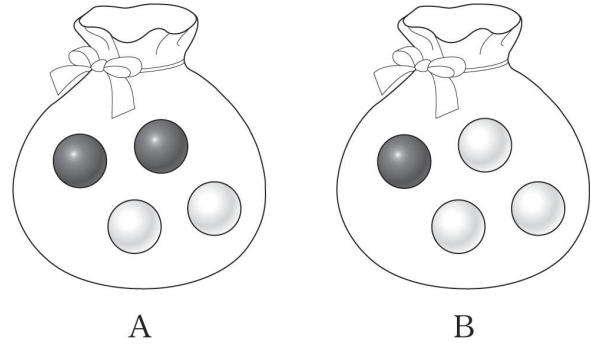
25. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정육면체 $ABCD-EFGH$ 가 있다. 직선 AC 와 평면 ABH 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $60\sin\theta$ 의 값을 구하시오. [3점]



27. 그림과 같이 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$)이고 장축의 길이가 12인 타원이 y 축과 만나는 점을 A 라 하자. 직선 AF 와 타원이 만나는 점을 B 라 하고, 직선 $x=c$ 와 선분 BF' 이 만나는 점을 C 라 하자. $\overline{BF} = 2\overline{BC}$ 일 때, 선분 BF' 의 길이를 구하시오. [4점]



28. 그림과 같이 주머니 A에는 검은 공 2개와 흰 공 2개가 들어 있고 주머니 B에는 검은 공 1개와 흰 공 3개가 들어 있다. 검은 주머니 A에서, 흰 주머니 B에서 동시에 공을 하나씩 뽑는 시행을 3번 반복한다. 검은 공과 흰 공이 동시에 같은 색의 공을 뽑은 횟수가 1일 확률이 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, 뽑은 공은 주머니에 다시 넣지 않고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



29. 좌표공간에서 한 모서리의 길이가 4인 정사면체 OABC가 있다. 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 구 위의 점 A가 아닌 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0 \\ \text{(나)} \quad & \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BQ} = 16 \end{aligned}$$

양의 상수 k 에 대하여 $\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{OC}$ 일 때, 삼각형 BPQ의 넓이가 M 이다. $k^2 + M^2$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $F(x)$ 를 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 라 하자. 두 함수 $f(x)$, $F(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & 0 \leq x \leq 1 \text{ 일 때, } f(x) = ae^{bx}(x-1) \text{ 이다.} \\ & \text{(단, } a, b \text{ 는 상수이다.)} \\ \text{(나)} \quad & \text{구간 } (0, 5) \text{ 에서 함수 } f(x) \text{ 가 극대 또는 극소가 되는} \\ & x \text{ 의 개수는 1 이다.} \\ \text{(다)} \quad & \text{모든 실수 } x \text{ 에 대하여 } F(x+5) = F(x) \text{ 이고,} \\ & \text{함수 } F(x) \text{ 는 } x=3 \text{ 에서 최솟값 } -3 \text{ 을 갖는다.} \end{aligned}$$

$$\int_0^5 |f(x) - f(0)| dx = 10 \text{ 일 때, } \int_{-4}^8 |f(x)| dx = pe + q \text{ 이다.}$$

$p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 유리수이다.) [4점]