2018학년도 대학수학능력시험 모의평가 2회

수학 영역(나 형) 해설지

정답 및 해설

1) [정답] ② (출제자 : 16 송세령)

[출제의도] 지수의 계산을 할 수 있는가?

[해설]

$3\times 8^{\frac{1}{3}}=3\times 2=6$

2) [정답] ④ (출제자 : 16 송세령)

[출제의도] 원소나열법으로 표현된 집합에 대하여 연산을 할 수 있는가?

[해설]

$A-B=\{1,\ 3\}$ 이므로 모든 원소의 합은 4 이다.

3) [정답] ③ (출제자 : 16 송세령)

[출제의도] 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times 7^{n+2}-4^n}{7^{n+1}+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times 7^2-\frac{4^n}{7^n}}{7+\frac{4^n}{7^n}}=2\times 7=14$$

4) [정답] ① (출제자 : 16 김민지)

[출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

[해설]

$f(x)=2x^2+7x$ 를 x 에 대하여 미분하면 $f'(x)=4x+7$ 이다.

$x=-1$ 을 대입하면 $f'(-1)=-4+7=3$ 이다.

5) [정답] ① (출제자 : 17 최수영)

[출제의도] 역함수의 성질을 이용하여 함수의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

그림에서 $f(4)=3$ 임을 알 수 있다.

$f^{-1}(5)=k$ 라 하면 역함수의 정의에 따라 $f(k)=5$ 이다.

함수 $f:X\to Y$ 에서 $f(k)=5$ 를 만족시키는 k 는 2 이므로

$f^{-1}(5)=2$ 이다.

따라서 $f(4)+f^{-1}(5)=3+2=5$

6) [정답] ⑤ (출제자 : 17 문혁준)

[출제의도] 배반사건을 이용해 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

두 사건 A 와 B 가 서로 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$ 이다.

$\mathrm{P}(A\cup B)$ 의 값이 $\frac{5}{6}$ 이므로 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{5}{6}$ 이다.

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{7}{12}$ 에서 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=\frac{5}{12}$ 임을 알 수 있다.

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{5}{6}-\frac{5}{12}=\frac{5}{12}$

7) [정답] ② (출제자 : 17 김동규)

[출제의도] 조합을 이용하여 간단한 경우의 수를 구할 수 있는가?

[해설]

1 부터 7 까지의 자연수 중 홀수는 $1,\ 3,\ 5,\ 7$ 로 총 네 개이다.

네 개의 홀수 중 서로 다른 두 수를 선택할 경우의 수를 구하면 된다.

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$ 이다.

8) [정답] ⑤ (출제자 : 17 조영호)

[출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

[해설]

$\lim_{x\to 0-}f(x)=3,\ \lim_{x\to 1+}f(x)=4$ 이므로

$\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)=7$ 이다.

9) [정답] ③ (출제자 : 17 문혁준)

[출제의도] 조건 p 가 조건 q 이기 위한 필요조건을 구할 수 있는가?

[해설]

두 조건 p 와 q 의 진리집합을 각각 P 와 Q 라 하면,

$P=\{x|ax>7\},\ Q=\{x|x>a\}$ 이다.

a 는 자연수이기 때문에

$P=\{x|ax>7\}$ 는 $P=\left\{x\,\middle|\,x>\frac{7}{a}\right\}$ 로 쓸 수 있다.

p 가 q 이기 위한 필요조건은 $q\to p$ 이므로

$Q\subset P$ 를 만족해야 하고, 여기에서 $a>\frac{7}{a}$ 이다.

$a^2>7$ 이므로 가능한 자연수 a 의 값 중에서 최솟값은 3 이다.

10) [정답] ④ (출제자 : 17 김국연)

[출제의도] 조건부확률을 구할 수 있는가?

[해설]

학생 30 명 중 임의로 선택한 1 명이
농구를 선택한 학생일 사건을 A, 2 학년일 사건을 B 라 하자.
학생 30 명 중 임의로 선택한 1 명이 농구를 선택한 학생일 때,
이 학생이 2 학년일 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{9}{30}}{\frac{15}{30}}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$$ 이다.

11) [정답] ② (출제자 : 17 김동규)

[출제의도] 여사건을 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

[해설]

주사위를 던질 때 5 이상의 눈이 나올 확률을 p 라 하면 $p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ 이다.
여사건의 확률에 의해서, 한 개의 주사위를 3 번 던질 때
5 이상의 눈이 적어도 한 번 나올 확률은 $1-\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{19}{27}$ 이다.

12) [정답] ④ (출제자 : 17 문혁준)

[출제의도] 유리함수의 그래프를 평행이동할 수 있는가?

[해설]

함수 $y=\frac{2}{x+3}+k$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼,
y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 그래프의 식은 다음과 같다.
$y=\frac{2}{(x+3)-4}+(k+3)=\frac{2}{x-a}+1$
$x+3-4=x-1=x-a$ 이므로 $a=1$ 이다.
$k+3=1$ 이므로 $k=-2$ 이다.
$\therefore a+k=-1$

13) [정답] ① (출제자 : 17 박승용)

[출제의도] 함수의 극한을 이해하고 미정계수를 결정할 수 있는가?

[해설]

$a\neq 0$ 이고 $\lim_{x\to 3}(x-3)(x+1)=0$ 이므로
$\lim_{x\to 3}(ax+b)=0$ 이며, $ax+b=a(x-3)$ 이다.
따라서 $\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{ax+b}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{a(x-3)}=a$ 이므로
분모와 분자의 $x-3$ 을 약분하면 $\lim_{x\to 3}\frac{(x+1)}{a}=a$ 이다.
따라서 $a^2=4$ 이므로 $a=2$ 이다. ($\because a>0$)
$ax+b=a(x-3)$ 이므로 $b=-3a$ 이고 $b=-6$ 이다.
따라서 $a+b=2-6=-4$ 이다.

14) [정답] ④ (출제자 : 17 최수영)

[출제의도] 정규분포를 따르는 확률변수에서 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

$\mathrm{P}(|X-m|\le 4)=2\mathrm{P}(m\le X\le 2-m)$ 이므로
$\mathrm{P}(-4\le X-m\le 4)=2\mathrm{P}(m\le X\le 2-m)$ 이다.
확률변수 X 는 정규분포 $\mathrm{N}(m,2^2)$ 을 따르므로
양변을 각각 표준화시키면
$\mathrm{P}\left(\frac{-4}{2}\le Z\le\frac{4}{2}\right)=2\mathrm{P}\left(\frac{m-m}{2}\le Z\le\frac{2-2m}{2}\right)$
$\mathrm{P}(-2\le Z\le 2)=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1-m)$ 이 된다.
$\mathrm{P}(-2\le Z\le 2)=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$ 이므로
위 등식을 만족시키기 위해서는
$1-m=2$ 이므로 $m=-1$ 이다.
따라서 확률변수 X 는 정규분포 $\mathrm{N}(-1,2^2)$ 을 따르므로
$\mathrm{P}(X\ge 2)=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)=0.5-0.4332=0.0668$ 이다.

15) [정답] ⑤ (출제자 : 17 문혁준)

[출제의도] 수열의 합을 이용해 일반항을 구할 수 있는가?

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 -4 인 것만 알고,
공차가 얼마인지 알 수 없으므로 공차를 d 라 하자.
수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 먼저 써 보면 $a_n=-4+(n-1)d$ 이다.
그러므로 S_n 을 구해 보면 다음과 같다.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\{-4+(k-1)d\}=\frac{n}{2}\times\{-8+(n-1)d\}$$

조건 (가)에서 $S_n=0$ 이 되도록 하는 자연수 n 이 존재한다고 하였으므로,
$\frac{n}{2}\times\{-8+(n-1)d\}=0$ 을 만족시키는 자연수 n 이 존재한다.
따라서 $d(n-1)=8$ 을 만족하는 자연수 n 이 존재한다는 것을 알 수 있다.
$d\times 0\neq 8$ 이므로 $n\neq 1$ 이다. 그러므로 $n-1$ 역시 자연수이다.
d 는 정수, $(n-1)$ 은 자연수이므로 $d(n-1)=8$ 을 만족시키려면
d 는 8 의 양의 약수여야 한다.
여기에서 가능한 d 는 1, 2, 4, 8 이 있음을 알 수 있다.

조건 (나)를 살펴보면 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n\neq 0$ 이라 주어져 있다.
d 로 가능한 경우 (1, 2, 4, 8)에 대해 살펴보자.
들어가기에 앞서, 위에서 언급했듯
$a_n=-4+(n-1)d$ 라는 것을 명심하자.

1) $d=1$
$a_n=-4+(n-1)=n-5$ 이며 $a_5=0$ 이다.
따라서 조건을 만족시키지 않는다.

2) $d=2$
$a_n=-4+2(n-1)=2n-6$ 이며 $a_3=0$ 이다.
따라서 조건을 만족시키지 않는다.

3) $d=4$
$a_n=-4+4(n-1)=4n-8$ 이며, $a_2=0$ 이다.
따라서 조건을 만족시키지 않는다.

4) $d=8$

$a_n = -4+8(n-1)=8n-12$ 이며,

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \neq 0$ 이다.

따라서 조건을 만족시킨다.

1) ~ 4)에서 $a_n = 8n-12$ 이다.

$\therefore a_5 = 40-12=28$

16) [정답] ① (출제자 : 16 이준희)

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 규칙성을 알 수 있는가?

[해설]

자연수 n 이 홀수일 때, $a_{n+1} = -a_n + n$ 이고

자연수 n 이 짝수일 때, $a_{n+1} = a_n + n$ 이다.

자연수 n 을 1 에서부터 차례대로 대입을 해보면 다음의 표와 같다.

$a_1 = -3$	$a_5 = 1$	$a_9 = 5$
$a_2 = 4$	$a_6 = 4$	$a_{10} = 4$
$a_3 = 6$	$a_7 = 10$	$a_{11} = 14$
$a_4 = -3$	$a_8 = -3$	$a_{12} = -3$

$k \geq 0$ 인 정수 k 에 대하여

a_{4k+1}, a_{4k+2}, a_{4k+3}, a_{4k+4} 마다 규칙이 있다.

case1) a_{4k+1} 인 경우는 $a_{4k+5} = a_{4k+1}+4$

case2) a_{4k+2} 인 경우는 $a_{4k+6} = a_{4k+2}$

case3) a_{4k+3} 인 경우는 $a_{4k+7} = a_{4k+3}+4$

case4) a_{4k+4} 인 경우는 $a_{4k+8} = a_{4k+4}$

그러므로 $a_{4n+1} = a_1 + 4\times n$, $a_{4n} = a_4$ 이므로

$a_{29} = a_{4\times 7+1} = -3+(4\times 7)=25$, $a_{32} = -3$ 이다.

$\therefore a_{29}+a_{32} = 22$

proof)

1. n 이 홀수일 때

$a_{n+1} = -a_n + n$

$a_{n+2} = a_{n+1}+n+1 = -a_n+2n+1$

$a_{n+3} = -a_{n+2}+n+2 = a_n - n+1$

$a_{n+4} = a_{n+3}+n+3 = a_n+4$

를 만족하므로 case1과 case3이 증명이 된다.

2. n 이 짝수일 때

$a_{n+1} = a_n + n$

$a_{n+2} = -a_{n+1}+n+1 = -a_n+1$

$a_{n+3} = a_{n+2}+n+2 = -a_n+n+3$

$a_{n+4} = -a_{n+3}+n+3 = a_n$

를 만족하므로 case2와 case4가 증명이 된다.

17) [정답] ③ (출제자 : 16 이준희)

[출제의도] 도형의 성질을 이용하여 등비급수의 합을 구할 수 있는가?

[해설]

$\angle A_1B_1D_1 = 15^\circ$ 이므로 $\angle F_1B_1C_1 = 45^\circ$ 이다.

$\angle A_1C_1B_1 = 90^\circ$ 이고, $\angle F_1B_1C_1 = 45^\circ$ 이므로

$\angle B_1F_1C_1 = 45^\circ$ 이다.

$\angle B_1F_1C_1 = \angle F_1B_1C_1$ 이고, $\angle F_1C_1B_1 = 90^\circ$ 이므로

삼각형 $B_1C_1F_1$ 은 직각이등변삼각형이다.

그러므로 $\overline{B_1C_1} = \overline{C_1F_1} = 2$ 이고 삼각형 $B_1C_1F_1$ 의 넓이는 2 이다.

중심각의 크기는 원주각의 크기의 두 배이므로

$\angle A_1M_1D_1 = 2\times\angle A_1B_1D_1 = 30^\circ$ 이다.

$\angle M_1A_1E_1 = 30^\circ$, $\angle A_1M_1E_1 = 30^\circ$ 이므로

삼각형 $A_1M_1E_1$ 은 이등변삼각형이다. $A_1M_1E_1$ 이 이등변삼각형이므로

$\overline{A_1E_1} = \overline{M_1E_1}$ 이고, 점 E_1 에서 선분 A_1M_1 에 내린 수선의 발을

H_1 이라 하면

$\overline{A_1E_1} = \sqrt{\overline{A_1H_1}^2 + \overline{E_1H_1}^2}$ 이므로 $\overline{A_1E_1} = \overline{M_1E_1} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 이다.

그러므로

$$\begin{aligned}\overline{E_1F_1} &= \overline{A_1C_1} - \overline{A_1E_1} - \overline{F_1C_1} \\ &= 2\sqrt{3}-2-\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3}-2\end{aligned}$$

이다.

점 M_1 에서 선분 A_1F_1 에 내린 점을 I_1 이라 하면

$\overline{M_1I_1} = \overline{A_1M_1}\times\sin 30^\circ = 2\times\dfrac{1}{2} = 1$ 이다.

삼각형 $M_1F_1E_1$ 의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{E_1F_1}\times\overline{M_1I_1} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}-1$ 이다.

반원 O_2 와 선분 A_1E_1 와 만나는 점을 K_1 라 하자.

선분 A_1E_1 와 선분 M_2K_1 가 수직이고, $\overline{A_1M_2} = 1$ 이므로 $\overline{M_2K_1} = \dfrac{1}{2}$ 이 된다. 도형의 길이의 비가 $4:1$ 이므로 넓이의 비는 $16:1$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+1\right)\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{16}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{32\sqrt{3}+48}{45}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^n\right\} \\ &= \frac{32\sqrt{3}+48}{45}\end{aligned}$$

이다.

18) [정답] ③ (출제자 : 16 김동균)

[출제의도] 새롭게 정의된 함수의 연속성을 파악할 수 있는가?

[해설]

ㄱ. $0 < f(x) < 4$ 일 때, $g(x)=0$ 이다. (참)

$f(x) \neq 0$ 일 때. $f(x) \times t^2 - f(x) \times t + 1 = 0$ 은

t 에 대한 이차방정식이므로

방정식의 서로 다른 실근의 개수는 판별식의 부호에 따라 달라진다.

판별식은 $D = \{f(x)\}^2 - 4f(x)$ 이다.

$0 < f(x) < 4$ 일 때, $D < 0$ 이므로 서로 다른 실근의 개수는 0 이다.

ㄴ. $f(\alpha)=4$ 를 만족시키는 실수 α 에 대하여 함수 $g(x)$ 는 $x=\alpha$ 에서 불연속이다. (참)

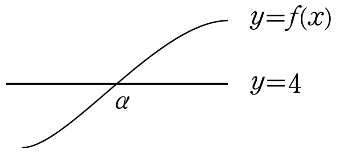
$0 < f(x) < 4$ 이면 $D < 0$ 이므로 $g(x)=0$ 이다.

$f(x)=4$ 이면 $D=0$ 이므로 $g(x)=1$ 이다.

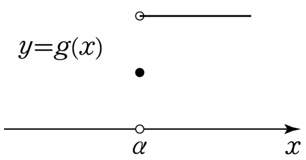
$f(x) > 4$ 이면 $D > 0$ 이므로 $g(x)=2$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 그래프는 $x=\alpha$ 근처에서 다음과 같이 4 가지 경우가 있다.

i) $x=\alpha$ 근처에서 증가하면서 통과하는 경우



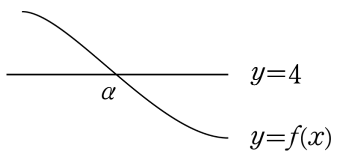
함수 $g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



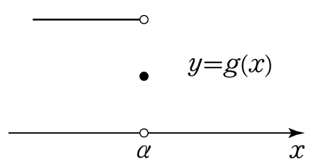
$\lim_{x \to \alpha-} g(x)=0$, $g(\alpha)=1$, $\lim_{x \to \alpha+} g(x)=2$ 이므로

함수 $g(x)$ 는 $x=\alpha$ 에서 불연속이다.

ii) $x=\alpha$ 근처에서 감소하면서 통과하는 경우



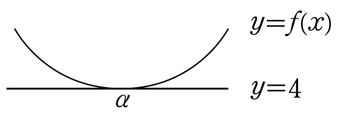
함수 $g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



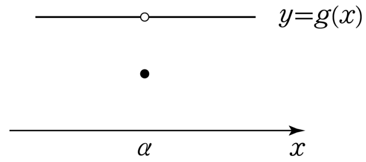
$\lim_{x \to \alpha-} g(x)=2$, $g(\alpha)=1$, $\lim_{x \to \alpha+} g(x)=0$

함수 $g(x)$ 는 $x=\alpha$ 에서 불연속이다.

iii) $x=\alpha$ 근처에서 $f(x) \geq 4$ 이면서 접하는 경우



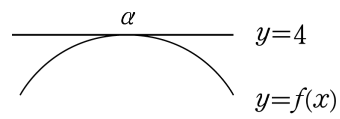
함수 $g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



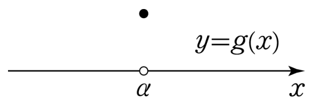
$\lim_{x \to \alpha+} g(x) = \lim_{x \to \alpha-} g(x) = 2$, $g(\alpha)=1$ 이므로

함수 $g(x)$ 는 $x=\alpha$ 에서 불연속이다.

iv) $x=\alpha$ 근처에서 $f(x) \leq 4$ 이면서 접하는 경우



함수 $g(x)$ 의 그래프가 다음과 같다.



$\lim_{x \to \alpha+} g(x) = \lim_{x \to \alpha-} g(x) = 0$, $g(\alpha)=1$ 이므로

함수 $g(x)$ 는 $x=\alpha$ 에서 불연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)=x^2(x+3)$ 이면 함수 $g(x)$ 가 불연속인 x 의 개수는 4 이다. (거짓)

ㄱ과 ㄴ으로부터

$0 < f(x) < 4$ 이면 $D < 0$ 이므로 $g(x)=0$ 이다.

$f(x) < 0$, $f(x) > 4$ 이면 $D > 0$ 이므로 $g(x)=2$ 이다.

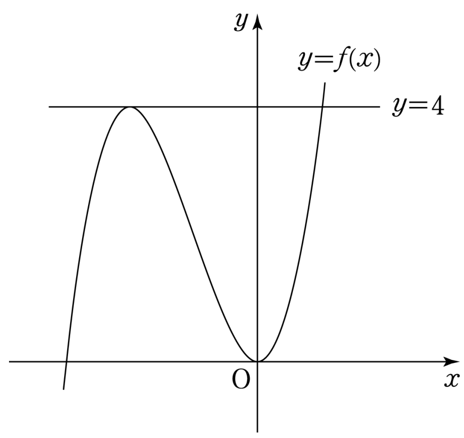
$f(x)=4$ 이면 $D=0$ 이므로 $g(x)=1$ 이다.

그런데, 여기서 주의할 부분은 $f(x)=0$ 일 때이다.

$f(x)=0$ 이면 t 에 대한 방정식 $f(x) \times t^2 - f(x) \times t + 1 = 0$ 의 이차항의 계수가 0 이므로 이차방정식이 아니고, 판별식으로 판단해서는 안 된다. $f(x)=0$ 을 대입하면 $1=0$ 이 나오므로 방정식의 해는 존재하지 않는다. 따라서 $f(x)=0$ 이면 $g(x)=0$ 이다.

그러면 이제 함수 $f(x)=x^2(x+3)$ 의 그래프를 그려보면,

.$x = -2$ 에서 극댓값 4 를 가지고, $x=0$ 에서 극솟값 0 을 가지므로 다음 그림과 같다.

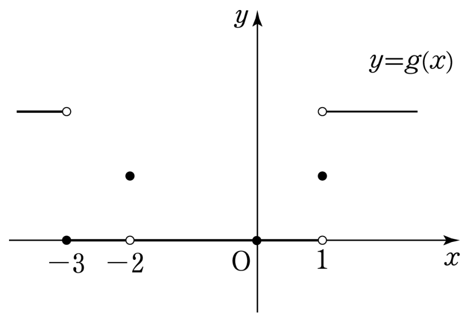


$f(x)=0$ 인 지점과 $f(x)=4$ 인 지점을 기준으로 $g(x)$ 의 값이 달라지고, $f(-3)=f(0)=0$, $f(-2)=f(1)=0$ 이므로

$x = -3$, -2 , 0 , 1 을 기준으로 함수 $g(x)$ 를 살펴보자.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f(x)$		0		4		0		4	
$g(x)$	2	0	0	1	0	0	0	1	2

함수 $g(x)$ 의 그래프를 그려보면 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $g(x)$ 가 불연속인 x 의 개수는 3 이다.

19) [정답] ② (출제자 : 17 문혁준)

[출제의도] 이항정리를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

박스 안에 있는 글을 그대로 가지고 와서 하나하나 분석해보자.

> $(3x+1)^{30}$ 의 전개식에서 x^n 의 계수가 a_n 이므로
> $a_n = \boxed{(가)}$
> 이다.

$\boxed{(가)}$ 는 이항정리를 이용한 것이다.

$(3x+1)^{30} = \sum_{n=0}^{30} {}_{30}\mathrm{C}_n(3x)^n(1)^{30-n}$ 이므로 $\boxed{(가)} = {}_{30}\mathrm{C}_n 3^n$ 이다.

계속해서 문제를 읽어보자.

> ${}_{30}\mathrm{C}_n = \dfrac{30!}{n!(30-n)!} = \dfrac{30\times29\times\cdots\times(31-n)}{n!}$
> 이므로 a_n 과 a_{n-1} 사이의 관계를 나타내면
> $a_n = a_{n-1}\times\boxed{(나)}\quad(n\geq2)$
> 이다.

${}_n\mathrm{C}_r$ 의 정의를 이용해 $\boxed{(나)}$ 를 구해보자.

(가)에서 $a_n = {}_{30}\mathrm{C}_n 3^n$ 이므로 $a_{n-1} = {}_{30}\mathrm{C}_{n-1}3^{n-1}$ 이다.

a_n 을 a_{n-1} 에 대하여 정리하면

$$a_n = {}_{30}\mathrm{C}_n 3^n = \frac{30\times29\times\cdots\times(30-n+1)}{n!}\times3^n$$
$$= \frac{30\times29\times28\times\cdots\times\{30-(n-1)+1\}}{(n-1)!}$$
$$\times3^{n-1}\times\left\{\frac{(30-n+1)}{n}\times3\right\}$$
$$= a_{n-1}\times\frac{93-3n}{n} \text{ 이다.}$$

따라서 $\boxed{(나)} = \dfrac{93-3n}{n}$ 이다.

계속해서 읽어보자.

> $2\leq k\leq29$ 인 자연수 k에 대하여
> $a_k > a_{k-1},\quad a_k > a_{k+1}$
> 을 동시에 만족시키는 k의 값은 하나이고
> 그 값은 $\boxed{(다)}$ 이다.
> 따라서 a_n이 최댓값을 가질 때의 n의 값은 $\boxed{(다)}$ 이다.

$a_n = a_{n-1}\times\dfrac{93-3n}{n}$ 임을 이용하여 대소 비교를 해보자.

문제에 쓰여 있는 대로, 어떤 값이 최댓값이라면

그 값 주변에 있는 값들보다 커야 한다.

다시 말해, $a_k > a_{k-1}$ 이고 $a_k > a_{k+1}$ 일 때 a_k 가 최댓값이다.

(− [보충] 참고)

k 의 범위가 $2\leq k\leq29$ 이므로

$k=1$, $k=30$ 의 경우는 따로 알아보자.

ⓐ $k=1$

$a_2 = a_1\times\dfrac{87}{2}$ 이므로 a_1 은 최댓값이 아니다.

ⓑ $k=30$

$a_{30} = a_{29}\times\dfrac{1}{10}$ 이므로 a_{30} 은 최댓값이 아니다.

$k=1$ 일 때와 $k=30$ 일 때 a_k 가 최댓값을 갖지 않으므로

$2\leq k\leq29$ 일 때를 조사해야 한다.

먼저 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{93-3n}{n}$ 임을 알아두고 가자.

(a) $a_k > a_{k-1}$

a_{k-1} 은 양수이므로 $\dfrac{a_k}{a_{k-1}} > 1$ 이다.

따라서 $\dfrac{93-3k}{k} > 1$ 이고, 정리하면 $k < \dfrac{93}{4}$ 이다.

(b) $a_k > a_{k+1}$

a_k 는 양수이므로 $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ 이다.

따라서 $\dfrac{93-3(k+1)}{k+1} = \dfrac{90-3k}{k+1} < 1$ 이고, 정리하면 $k > \dfrac{89}{4}$ 이다.

(a), (b)를 모두 만족시키는 k 의 값의 범위는 $\dfrac{89}{4} < k < \dfrac{93}{4}$ 이고,

k 는 자연수이므로 k 가 될 수 있는 값은 23 하나이다.

따라서 $\boxed{(다)} = 23$ 이다.

정리하면 아래와 같다.

$\boxed{(가)} = {}_{30}\mathrm{C}_n 3^n = f(n)$

$\boxed{(나)} = \dfrac{93-3n}{n} = g(n)$

$\boxed{(다)} = 23 = p$

$\therefore\ f(1)\times g(30) + p = 90\times\dfrac{1}{10} + 23 = 32$

[보충]

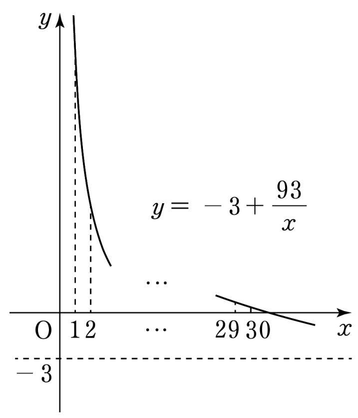
과연 $a_k > a_{k-1}$ 이고 $a_k > a_{k+1}$ 이라면

a_k 가 구하는 최댓값이라는 것을 어떻게 확신할 수 있을까?

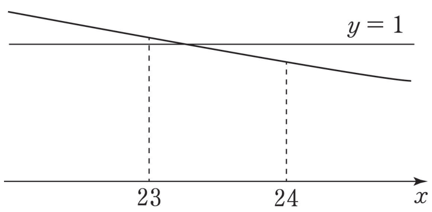
이는 $\boxed{(나)} = \dfrac{93-3n}{n}$ 에서 알 수 있다.

(나) $= \dfrac{93-3n}{n} = -3+\dfrac{93}{n}$ 이고 이는 유리함수 꼴이다.

유리함수 $y=-3+\dfrac{93}{x}$ $(x>0)$ 의 그래프는 다음과 같다.



그래프에서 알 수 있듯이, $-3+\dfrac{93}{n}$ 은 $n=1$ 일 때부터 $n=30$ 일 때까지 계속 감소한다.
따라서 어떤 자연수 k 에 대하여
$-3+\dfrac{93}{k}>1$ 이고 $-3+\dfrac{93}{k+1}<1$ 을 만족시키는 k 는 아래 그림에서 볼 때와 같이 1 개밖에 존재하지 않고
$-3+\dfrac{93}{k}<1$ 이고 $-3+\dfrac{93}{k+1}>1$ 을 만족시키는 k 는 존재하지 않는다. (…㉠)



$a_n=a_{n-1}\times\left(-3+\dfrac{93}{n}\right)$ 이므로 ㉠이 의미하는 바는 a_n 이 계속 증가하다가 어느 순간부터 계속 감소한다는 것이다.
따라서 부등호 방향이 바뀌는 그 지점이 최댓값이라고 할 수 있다.

20) [정답] ⑤ (출제자 : 17 문혁준)

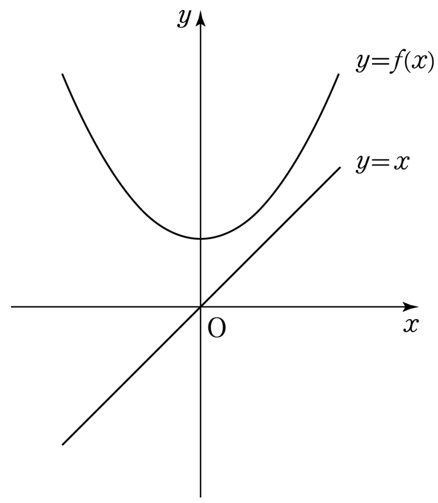
[출제의도] 함수의 극한의 존재와 연속성의 개념을 응용할 수 있는가?

[해설]
문제에서 주어진 조건을 정리하면 다음과 같다.

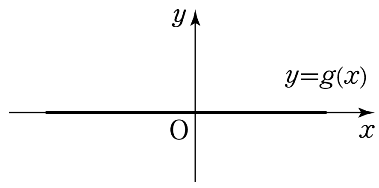
ⓐ $f(x)$ 는 이차함수이고, 최고차항의 계수가 1 이다.
ⓑ $g(x)$ 의 정의
ⓒ 모든 실수 t 에 대하여 $\lim_{x\to t-} g(x)=\lim_{x\to t+} g(x)$
ⓓ 함수 $g(x)$ 는 $x=6$ 에서 불연속.

ⓑ에서는 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 의 함숫값의 크기를 비교하고 있는데, 이는 함수 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 의 그래프를 비교해 보는 것으로 쉽게 알 수 있다.
ⓐ에서 함수 $f(x)$ 는 이차함수이므로 이차함수와 직선 $y=x$ 의 그래프가 갖는 관계를 고려해 보자. 이 관계는 두 그래프가 두 점에서 만날 때, 한 점에서 만날 때, 만나지 않을 때로 구분된다.

(ㄱ) 만나지 않을 때

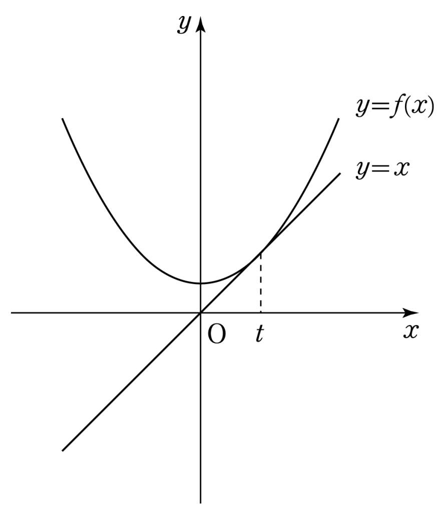


$f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 만나지 않으려면 그림과 같이 항상 $f(x)>x$ 이다. 따라서 이 경우 $g(x)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.

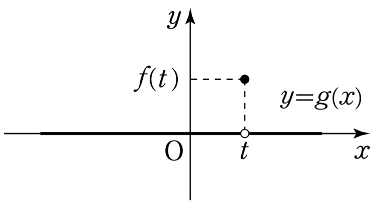


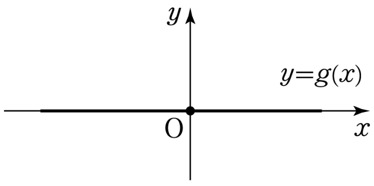
이때 ⓒ는 만족하지만 ⓓ는 만족하지 않는다.

(ㄴ) 한 점에서 만날 때



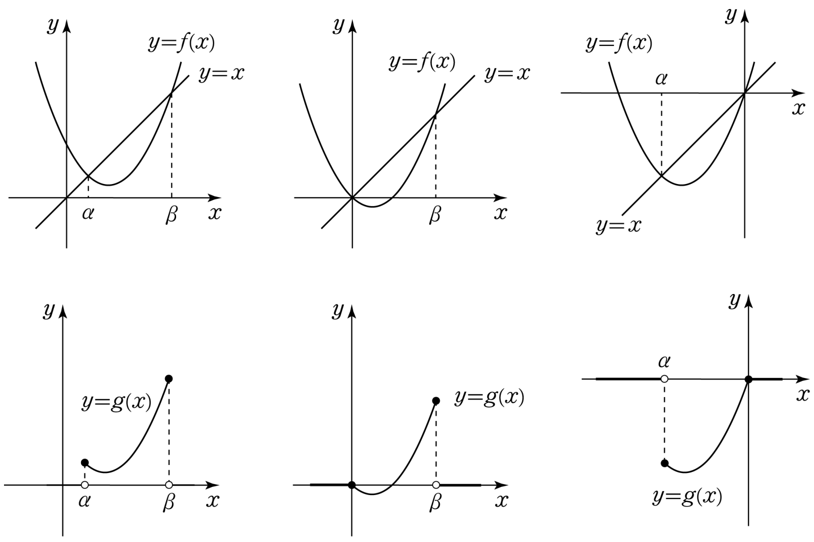
한 점에서 만난다는 뜻은, 결국 그림과 같이 접한다는 뜻이다. 이 접점에서만 $f(x)=x$ 가 성립하고, 그 외 지점에서는 $f(x)>x$ 이다.
따라서 이 경우 $g(x)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.





두 가지 경우가 있을 수 있는데, 그 접점이 원점인 경우와 그렇지 않은 경우이다. 두 경우 모두 ⓒ는 만족시킨다.
접점이 원점일 경우, 그림에서 알 수 있듯 $g(x)=0$ 이라는 상수함수가 나오기 때문에, ⓓ를 만족시키지 못한다.
따라서 접점이 원점이 아닌 경우 중, $t=6$ 일 때 ⓒ와 ⓓ를 모두 만족시킨다.

(ㄷ) 서로 다른 두 점에서 만날 때
서로 다른 두 점의 x 좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$ 라 하자.
α 와 β 가 모두 0 이 아닐 때와 $\alpha=0$ 일 때, $\beta=0$ 일 때로 구분하여 그래프를 그려 보면 다음과 같다.



따라서 서로 다른 두 점에서 만나는 모든 경우에서 ⓒ를 만족시키지 않는다.

따라서 (ㄱ) ~ (ㄷ)에 의해 $f(x)$ 와 $g(x)$ 를 결정할 수 있고, 다음과 같다.

$$g(x)=\begin{cases} f(6) & (x=6) \\ 0 & (x\neq 6) \end{cases}$$

이 때, 한 점에서 접하는 상태이므로 $f(6)=6$ 이다.
$f(x)=x^2+ax+b$ (단, a, b 는 상수)이고 $f(6)=6$, $f'(6)=1$ 이므로 이를 다음과 같이 정리해 보자.

1) $36+6a+b=6 \Rightarrow 6a+b=-30$
2) $f'(x)=2x+a$, $f'(6)=12+a=1$, $a=-11$

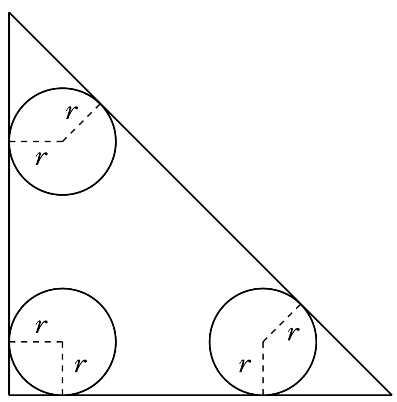
이를 정리하면 $a=-11$, $b=36$ 이므로 $f(x)=x^2-11x+36$
$\therefore f(3)=9-33+36=12$

[별해]
최고차항의 계수가 1 인 이차함수 $f(x)$ 가 $x=6$ 에서 $y=x$ 에 접할 때, 방정식 $f(x)-x=0$ 의 근은 $x=6$ 만 있으므로 $f(x)-x=(x-6)^2$ 이다.
따라서 $f(x)=(x-6)^2+x$ 이고, $f(3)=(3-6)^2+3=12$ 이다.

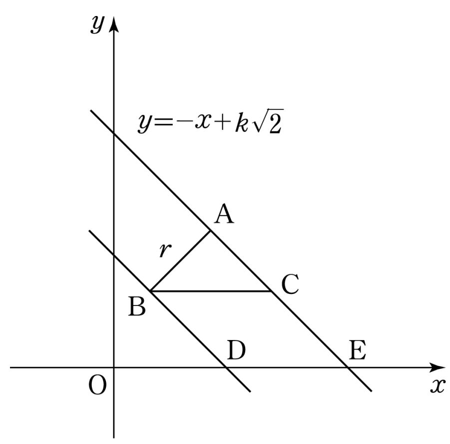
21) [정답] ② (출제자 : 16 김동균)
[출제의도] 주어진 상황에서 원의 정의와 규칙성을 이용하여 원의 개수를 셀 수 있는가?

[해설]
원의 정의는 '평면 위에서 어떤 점에서 일정한 거리에 있는 점들의 자취'이며, '어떤 점'을 원의 중심이라고 부른다. 이 정의를 이용하여, 주어진 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되는 원의 중심으로 가능한 점의 위치의 범위를 생각해보자.

반지름의 길이를 r 라 하면 원의 중심으로부터 거리가 r 만큼 떨어진 점들이 모두 영역의 내부 또는 그 경계에 있어야 한다.
따라서 다음 그림과 같이 원의 중심은 경계선으로부터 거리가 r 이상 떨어져야 한다.



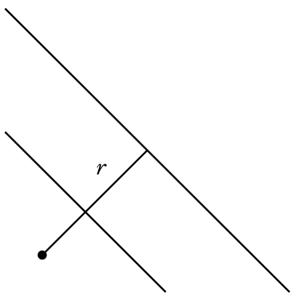
그러면 경계선인 x 축, y 축으로부터 거리가 r 이상 떨어져야 하므로 중점의 좌표 (a, b) 가 $a\geq r$, $b\geq r$ 를 만족해야한다.
이제 경계선 $y=-x+k\sqrt{2}$ 에 대하여 살펴보자.
기울기가 -1 이므로 x 축과 이루는 예각의 크기는 45° 이다.
평행한 두 직선 사이의 거리는 일정하므로 다음 그림과 같이 직선 $y=-x+k\sqrt{2}$ 로부터 거리가 r 만큼 떨어져 있고, 주어진 영역을 지나는 직선을 생각하자.



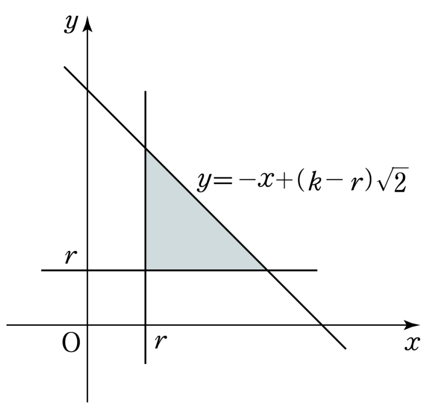
- 그림 설명 -
직선 l : 직선 $y=-x+k\sqrt{2}$ 로부터 거리가 r 만큼 떨어져있고, 주어진 영역을 지나는 직선
점 A : 직선 $y=-x+k\sqrt{2}$ 위의 점
점 B : 직선 l 위의 점 중에서 점 A 로부터 거리가 r 만큼 떨어진 점
점 C : 점 B 를 지나고 x 축에 평행한 직선이 직선 $y=-x+k\sqrt{2}$ 와

만나는 점
점 D : 직선 l의 x 절편
점 E : 직선 $y=-x+k\sqrt{2}$ 의 x 절편

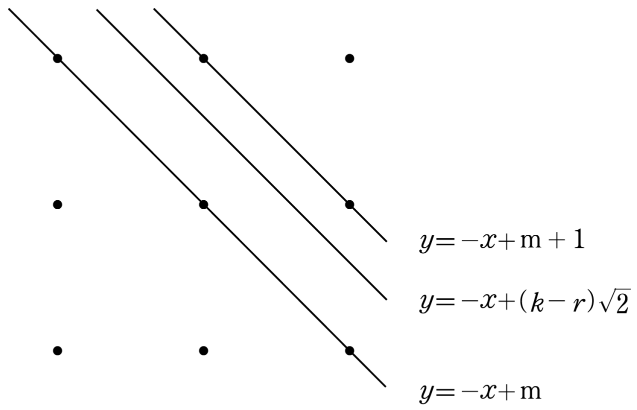
그림과 같이 직선 $y=-x+k\sqrt{2}$ 가 기울기가 -1 이라는 사실로부터 $\angle\mathrm{AED}=45^\circ$ 라는 것을 알 수 있고, $\angle\mathrm{ACB}=45^\circ$ (동위각)임을 알 수 있다. 선분 AB 의 길이는 두 직선 사이의 거리이므로 $\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ 이다.
따라서 삼각형 ABC 은 직각이등변삼각형이고 $\overline{\mathrm{AB}}=r$ 이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=r\sqrt{2}$ 임을 알 수 있다. 또, 직선 BC 와 직선 DE 가 평행하고, 직선 BD 와 직선 CE 가 평행하므로 사각형 BCED 는 평행사변형이다.
따라서 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{DE}}$ 이다.
따라서 $\overline{\mathrm{DE}}=r\sqrt{2}$ 이고 점 E 의 좌표는 $\mathrm{E}\left(k\sqrt{2},\,0\right)$ 이므로
점 D 의 좌표는 $\left(k\sqrt{2}-r\sqrt{2},\,0\right)$ 이다.
따라서 직선 l 의 x 절편의 좌표가 $\left(k\sqrt{2}-r\sqrt{2},\,0\right)$ 이므로
직선 l 의 방정식은 $y=-x+(k-r)\sqrt{2}$ 이다.
그러면 직선 $y=-x+(k-r)\sqrt{2}$ 의 아랫부분에 있는 점은 다음 그림과 같이 경계선으로부터 거리가 r 이상 떨어짐을 알 수 있다.



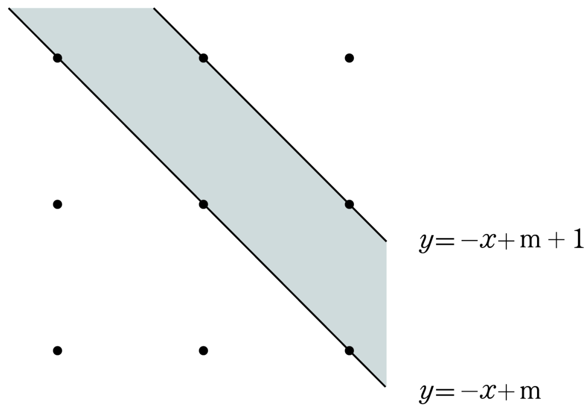
따라서 중심은 다음 그림과 같이
영역 $x\ge r$, $y\ge r$, $y\le -x+(k-r)\sqrt{2}$ 안의 점이면 문제에서 주어진 영역의 내부 또는 경계에 포함되는 반지름의 길이가 r 인 원을 그릴 수 있다.



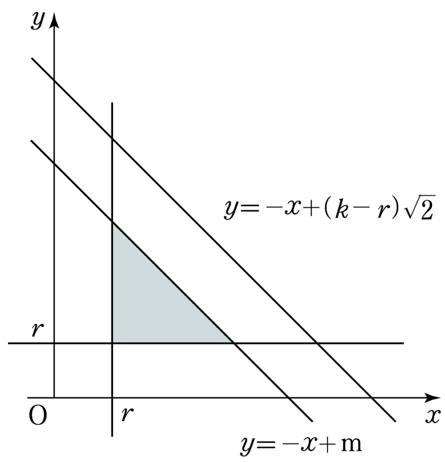
그러면 구하고자 하는 원의 개수는 $r=1,\,2,\,\cdots$ 일 때, 위의 그림에서 색칠된 영역에 있는 점 중 x 좌표, y 좌표가 모두 자연수인 점의 개수이다.
이제, 색칠된 영역 안의 격자점의 개수를 세는 규칙을 찾아보자.
우선, 격자점과 직선 $y=-x+(k-r)\sqrt{2}$ 을 좌표평면 위에 두자.
그러면 $m<(k-r)\sqrt{2}<m+1$ 인 자연수 m 에 대하여 다음 그림과 같이 된다.



아래의 그림처럼 직선 $y=-x+m$ 과 직선 $y=-x+m+1$ 사이에서는 격자점이 존재하지 않는다.

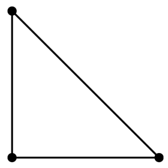


따라서 직선 $y=-x+m$ 과 $y=-x+(k-r)\sqrt{2}$ 사이에서도 격자점은 존재하지 않고, 격자점이면서 조건을 만족시킬 수 있는 원의 중심이 있을 수 있는 영역은 다음 그림과 같다.



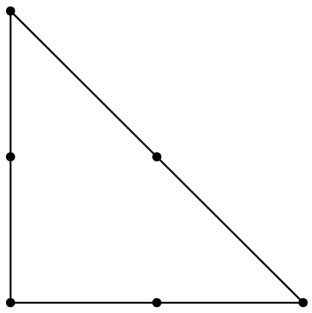
이제 주어진 영역 안에서 격자점의 개수의 규칙성을 찾아보자.
우선 주어진 영역의 모양은 직각이등변삼각형이고, 세 점의 꼭짓점이 격자점이다. 그러면 직각삼각형의 변의 길이에 따라 다음과 같은 규칙이 나타난다.

ⅰ) 빗변이 아닌 변의 길이가 1 인 경우,



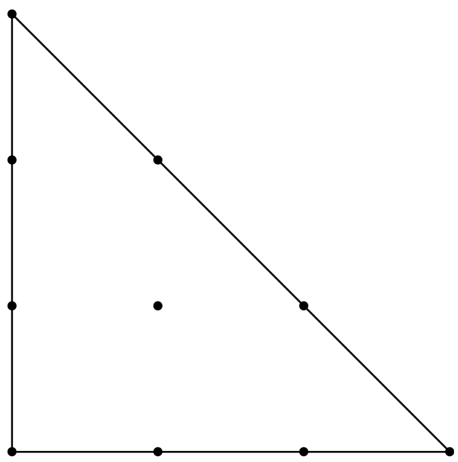
$1+2=3$ (개)의 격자점이 존재한다.

ⅱ) 빗변이 아닌 변의 길이가 2 인 경우,



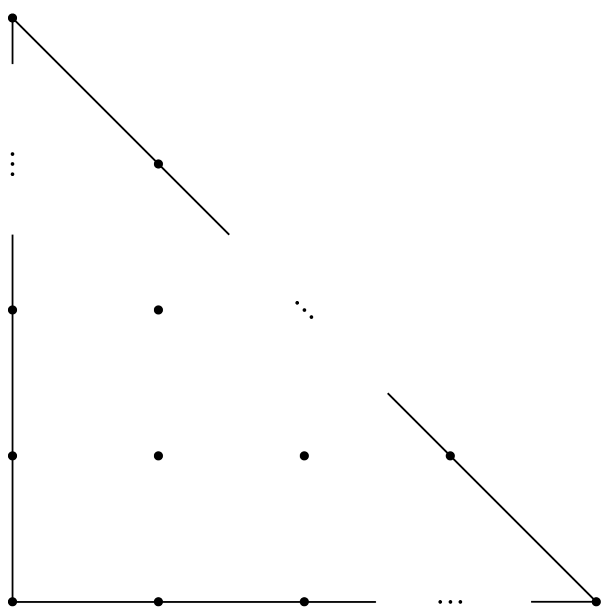
$1+2+3=6$ (개)의 격자점이 존재한다.

ⅲ) 빗변이 아닌 변의 길이가 3 인 경우,



$1+2+3+4=10$ (개)의 격자점이 존재한다.

ⅳ) 빗변이 아닌 변의 길이가 n 인 경우,



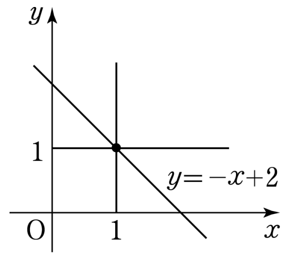
$1+2+\cdots+(n+1)=\sum_{i=1}^{n+1} i=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ (개)의 격자점이 존재한다.

이제 $f(k)$ $(k=3,4,5,6,7)$을 구해보자.

ⅰ) $k=3$ 일 때,

(1) $r=1$

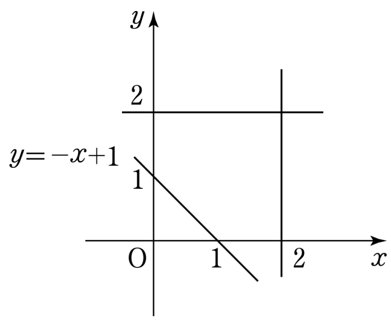
$k-r=2$, $2<2\sqrt{2}<3$ 이므로 다음 그림과 같다.



따라서 조건을 만족하는 격자점은 1 개 존재한다.

(2) $r=2$

$k-r=1$, $1<\sqrt{2}<3$ 이므로 다음 그림과 같다.



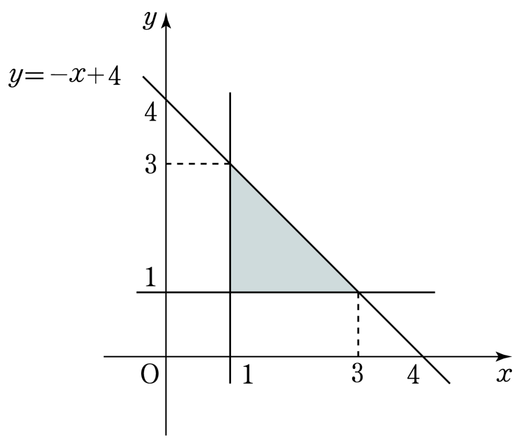
따라서 조건을 만족하는 격자점은 존재하지 않는다.

$\therefore$ $f(3)=1$

ⅱ) $k=4$ 일 때,

(1) $r=1$

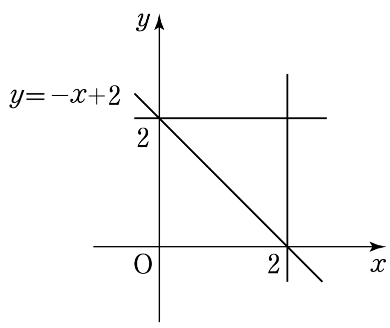
$k-r=3$, $4<3\sqrt{2}<5$ 이므로 다음 그림과 같다.



따라서 조건을 만족하는 격자점은 $\frac{3\times4}{2}=6$ 개 존재한다.

(2) $r=2$

$k-r=2$, $2<2\sqrt{2}<3$ 이므로 다음 그림과 같다.



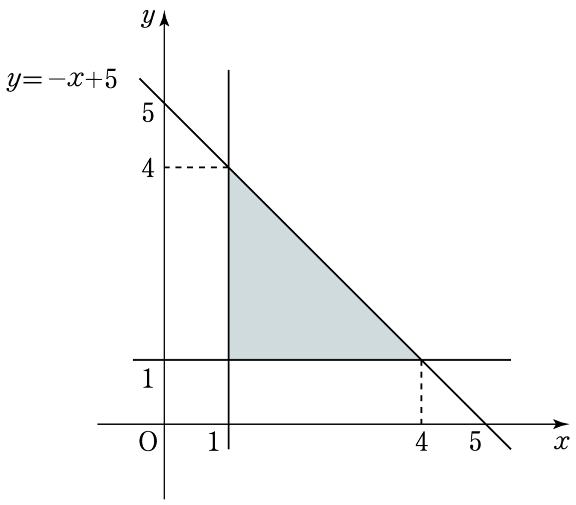
따라서 조건을 만족하는 격자점은 존재하지 않는다.

$\therefore$ $f(4)=6$

iii) $k=5$

(1) $r=1$

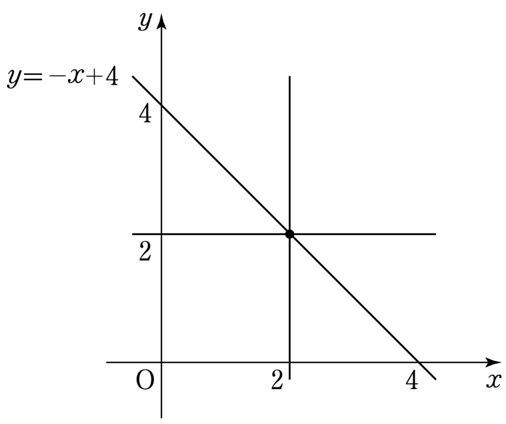
$k-r=4$, $5<4\sqrt{2}<6$ 이므로 다음 그림과 같다.



따라서 조건을 만족하는 격자점은 $\dfrac{4\times5}{2}=10$ 개 존재한다.

(2) $r=2$

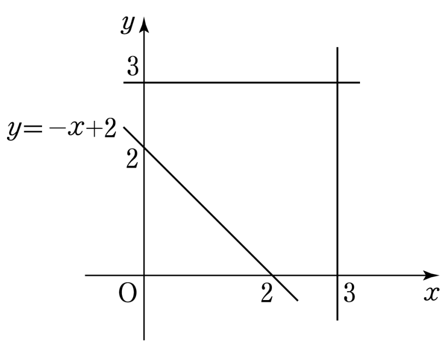
$k-r=3$, $4<3\sqrt{2}<5$ 이므로 다음 그림과 같다.



따라서 조건을 만족하는 격자점은 1 개 존재한다.

(3) $r=3$

$k-r=2$, $2<2\sqrt{2}<3$ 이므로 다음 그림과 같다.



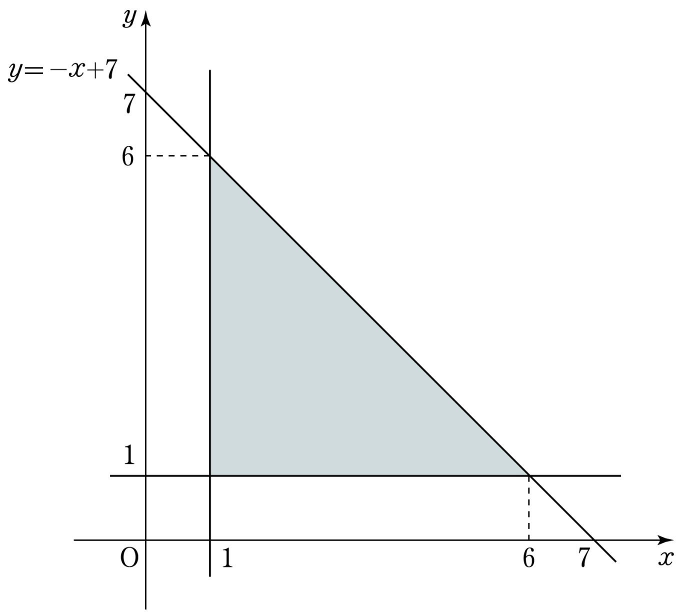
따라서 조건을 만족하는 격자점은 존재하지 않는다.

$\therefore\ f(5)=10+1=11$

iv) $k=6$

(1) $r=1$

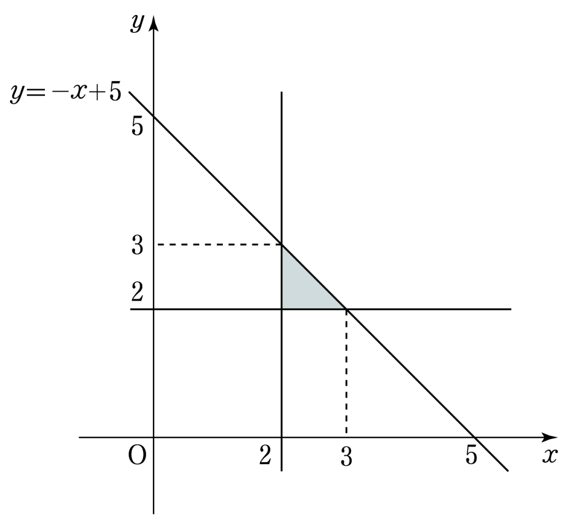
$k-r=5$, $7<5\sqrt{2}<8$ 이므로 다음 그림과 같다.



따라서 조건을 만족하는 격자점은 $\dfrac{6\times7}{2}=21$ 개 존재한다.

(2) $r=2$

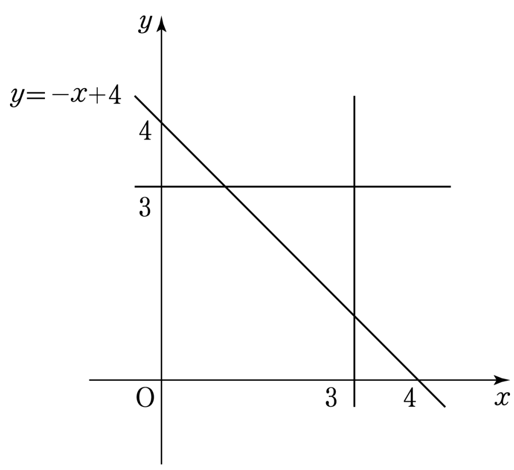
$k-r=4$, $5<4\sqrt{2}<6$ 이므로 다음 그림과 같다.



따라서 조건을 만족하는 격자점은 $\dfrac{2\times3}{2}=3$ 개 존재한다.

(3) $r=3$

$k-r=3$, $4<3\sqrt{2}<5$ 이므로 다음 그림과 같다.



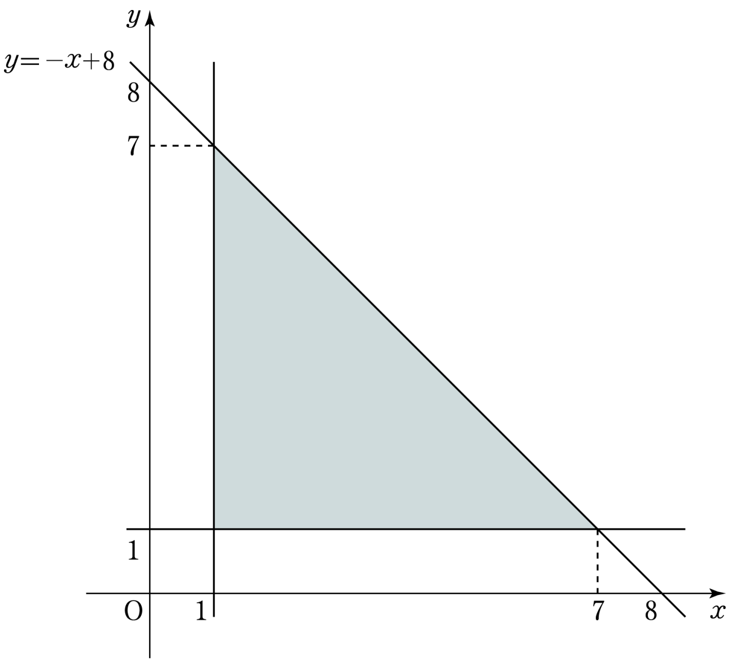
따라서 조건을 만족하는 격자점은 존재하지 않는다.

$\therefore\ f(6)=21+3=24$

ⅴ) $k=7$

(1) $r=1$

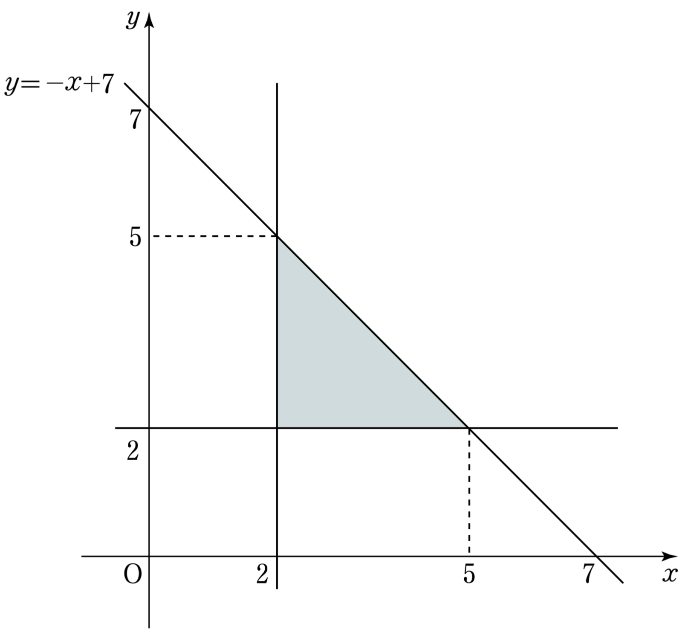
$k-r=6$, $8<6\sqrt{2}<9$ 이므로 다음 그림과 같다.



따라서 조건을 만족하는 격자점은 $\frac{7\times 8}{2}=28$ 개 존재한다.

(2) $r=2$

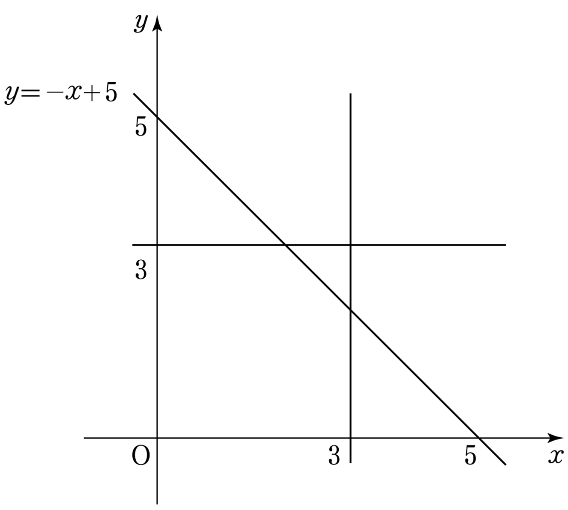
$k-r=5$, $7<5\sqrt{2}<8$ 이므로 다음 그림과 같다.



따라서 조건을 만족하는 격자점은 $\frac{4\times 5}{2}=10$ 개 존재한다.

(3) $r=3$

$k-r=4$, $5<4\sqrt{2}<6$ 이므로 다음 그림과 같다.



따라서 조건을 만족하는 격자점은 존재하지 않는다.

$\therefore\ f(7)=28+10=38$

$\therefore\ \sum_{k=3}^{8} f(k)=1+6+11+24+38=80$

22) [정답] 15 (출제자 : 17 김정빈)

[출제의도] 간단한 중복조합의 계산을 할 수 있는가?

[해설]

${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4=15$

23) [정답] 20 (출제자 : 17 최수영)

[출제의도] 로그를 이용한 계산을 할 수 있는가?

[해설]

$\log_2 16=4$ 이고

$3^{\log_3 5}=5$ 이므로

$\log_2 16\times 3^{\log_3 5}=20$

24) [정답] 25 (출제자 : 17 최수영)

[출제의도] 다항함수의 적분을 할 수 있는가?

[해설]

$\int_1^2 (5x^4-3x^2+1)\,dx=\left[x^5-x^3+x\right]_1^2$

$=(2^5-2^3+2)-(1^5-1^3+1)=26-1=25$

25) [정답] 13 (출제자 : 17 석진우)

[출제의도] 이산확률변수의 기댓값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{3}$

$\therefore\ \mathrm{E}(3X+8)=3\mathrm{E}(X)+8=3\times\frac{5}{3}+8=13$

26) [정답] 16 (출제자 : 17 김정빈)

[출제의도] 모비율의 추정을 통해 신뢰구간을 구할 수 있는가?

[해설]

추출한 490명을 표본이라 할 때, 표본비율 $\hat{p}$ 의 값은 $\frac{140}{490}=\frac{2}{7}$ 이다.

따라서 $a=\frac{2}{7}-1.96\times\sqrt{\frac{\frac{2}{7}\times\frac{5}{7}}{490}}$,

$b=\frac{2}{7}+1.96\times\sqrt{\frac{\frac{2}{7}\times\frac{5}{7}}{490}}$ 이므로

$b-a=2\times1.96\times\sqrt{\frac{\frac{10}{49}}{490}}=2\times1.96\times\frac{1}{49}=0.08$ 이다.

따라서 $200(b-a)=16$ 이다.

27) [정답] 36 (출제자 : 17 김도훈)

[출제의도] 시그마의 정의를 이해할 수 있는가?

[해설]

$a_n=a_{21-n}$ 이므로

$a_1=a_{20}$, $a_2=a_{19}$, $a_3=a_{18}$, $a_4=a_{17}$, $a_5=a_{16}$ 이고,

그에 따라, $\sum_{n=1}^{5}a_n=\sum_{n=16}^{20}a_n=12$ 이다.

따라서 $\sum_{n=6}^{15}a_n$ 의 값을 구하면

$\sum_{n=6}^{15}a_n=\sum_{n=1}^{20}a_n-\sum_{n=1}^{5}a_n-\sum_{n=16}^{20}a_n=60-12-12=36$ 이다.

[별해]

$a_n=a_{21-n}$ 이므로 $\sum_{n=1}^{5}a_n=\sum_{n=1}^{5}a_{21-n}=\sum_{n=16}^{20}a_n=12$ 이다.

따라서 $\sum_{n=6}^{15}a_n$ 의 값을 구하면

$\sum_{n=6}^{15}a_n=\sum_{n=1}^{20}a_n-\sum_{n=1}^{5}a_n-\sum_{n=16}^{20}a_n=60-12-12=36$ 이다.

28) [정답] 58 (출제자 : 17 김국연)

[출제의도] 여사건을 이용해 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

[해설]

조건 (가)를 만족시키는 전체 경우의 수는

음이 아닌 세 정수의 합이 12가 되는 경우의 수이므로

${}_3H_{12}={}_{14}C_{12}={}_{14}C_2=91$ 이다.

여기서 조건 (나)를 보면 $x\times y>4$ 인데 직접 구하기 어려우므로

여사건을 이용하자.

$x\times y\le4$ 인 경우는 두 가지로 나눌 수 있다.

① $x\times y=0$ 인 경우

x 가 0인 경우의 수 : ${}_2H_{12}={}_{13}C_{12}=13$

y 가 0인 경우의 수 : ${}_2H_{12}={}_{13}C_{12}=13$

x , y 가 모두 0인 경우의 수 : 1

겹치는 경우의 수를 빼주면, $13+13-1=25$ 이다.

② $0<x\times y\le4$ 인 경우

여기서 x , y 의 순서쌍을 정하면, 조건 (가)에 의해 z 가 하나로 정해진다.

x , y 의 순서쌍 (x,y) 는

$(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(3,1)$, $(4,1)$

로 총 8가지가 있다.

따라서 $x\times y\le4$ 인 경우의 수는 총 $25+8=33$ 이고

조건 (가)와 (나)를 모두 만족시키는 (x,y,z) 의 순서쌍의 개수는

$91-33=58$ 이다.

29) [정답] 10 (출제자 : 16 이준희)

[출제의도] 다항함수의 특징과 개형 추론을 통해 함수를 찾을 수 있는가?

[해설]

역함수가 존재하려면 $f'(x)$ 의 부호가 일정해야한다.

case1) $x<a$

$-2x^2+(3a+1)x-a(a+1)=-(x-a)(2x-a-1)$ 이다.

그러므로 $x=a$, $x=\frac{a+1}{2}$ 에서 $f'(x)=0$ 이 된다.

$a\ge\frac{a+1}{2}$ 이면 $x<a$ 에서 부호가 바뀐다.

$\frac{a+1}{2}\ge a$ 이어야 $x<a$ 에서 부호가 바뀌지 않는다.

그러므로 $a\le1$ 이다.

case2) $x\ge a$

$x\ge a$ 일 때를 보면 $f'(x)=x^2-6ax+45$ 가 된다.

$f'(x)=(x-3a)^2-9a^2+45$ 이다. 즉 함수 $f(x)$ 는 $x=3a$ 를

대칭축으로 갖는 이차함수이다.

1) $a\ge0$ 일 때는 $a\le3a$ 이므로 이 구간에서 $f'(x)$ 는 $x=3a$ 에서

최솟값을 가지므로 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으려면

$f'(3a)=-9a^2+45\ge0$이어야 한다. 그러면 $0\le a\le\sqrt{5}$ 가 되고

case1에서 구한 a 의 범위를 고려하면 $0\le a\le1$ 이 된다.

2) $a<0$ 일 때는 $a\ge3a$ 이므로 $x\ge a$ 인 구간에서 $f'(x)$ 는 $x=a$ 에서

최솟값을 갖는다. $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으려면 $f'(a)\ge0$ 이어야 한다.

$-5a^2+45\ge0$ 이 되고 $-3\le a\le0$ 이 된다. 처음 구한 a 의 범위를

고려하면 $-3\le a\le0$ 이 된다.

두 가지 경우를 합쳐보면 a 의 범위는 $-3\le a\le1$ 이 되므로

$M=1$, $m=-3$ 이 된다.

그러므로 $M^2+m^2=10$ 이다.

[별해]

case1)의 또 다른 풀이

함수 $g(x)=-2x^2+(3a+1)x-a(a+1)$ $(x<a)$ 라 하자.

함수 $f(x)$ 가 역함수를 가지려면 $g'(x)$ 의 부호가 일정해야한다.

$g'(x)=-4x+3a+1$ 이 기울기가 음수인 일차함수이므로

$x<a$ 에서 부호가 일정하려면 $g'(a)\ge0$ 이어야 한다.

그러므로 $a\le1$ 이어야 한다.

30) [정답] 135 (출제자 : 17 문혁준, 17 김도훈, 17 김정빈)

[출제의도] 기하학적인 시각에서 미분가능성을 이용해 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

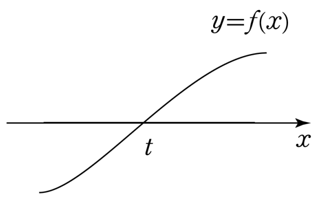
함수 $g(x)$ 의 식을 $f(x)\geq 0$ 일 때와 $f(x)<0$ 일 때로 나눠 정리하면 다음과 같다.

$$g(x)=\begin{cases}(2a-2)f(x) & (f(x)\geq 0)\\ 2f(x) & (f(x)<0)\end{cases}$$

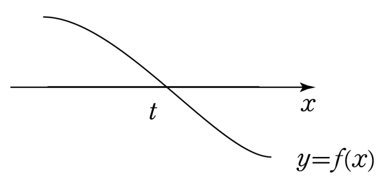
함수 $f(x)$ 가 사차함수이므로 $f(x)\neq 0$ 인 구간에서는
함수 $g(x)$ 도 미분가능하다.
따라서 미분가능하지 않은 부분을 찾기 위해 분석해야 할 곳은 $f(x)=0$ 이 되는 지점이다.

함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서만 미분가능하지 않다는 조건이 있으므로,
$f(x)=0$ 을 만족시키는 x 는 적어도 2 개 이상 존재한다.(⋯ [보충] 참고)
이때 $f(x)=0$ 이 되는 지점의 경우는 다음과 같이 6 가지의 경우가 있다.

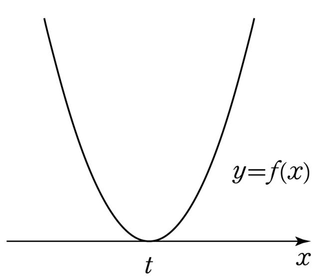
1)



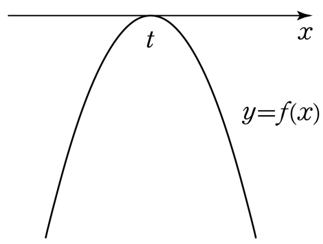
2)



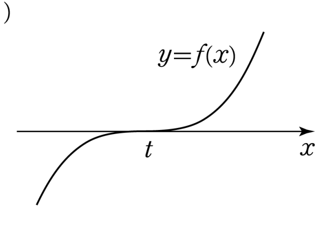
3)



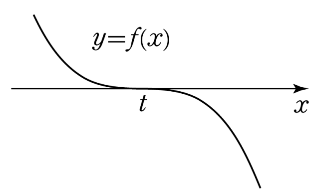
4)



5)



6)



상수 t 에 대하여 $g(x)$ 가 $\lim\limits_{x\to t+}\dfrac{g(x)-g(t)}{x-t}=\lim\limits_{x\to t-}\dfrac{g(x)-g(t)}{x-t}$ 를 만족한다면, $g(x)$ 는 $x=t$ 에서 미분가능하다.
1) ~ 4)의 그래프와 미분가능의 정의를 이용하여 문제를 해결해 보자.

1) 이 경우 $x\to t+$ 와 $x\to t-$ 에서는 각각 다음과 같은 식이 완성된다.

$$\lim_{x\to t+}\frac{g(x)-g(t)}{x-t}=\lim_{x\to t+}\frac{(2a-2)f(x)-(2a-2)f(t)}{x-t}$$
$$=(2a-2)\lim_{x\to t+}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}=(2a-2)f'(t)$$
$$\lim_{x\to t-}\frac{g(x)-g(t)}{x-t}=\lim_{x\to t-}\frac{2f(x)-2f(t)}{x-t}=2\lim_{x\to t-}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}=2f'(t)$$

(함수 $f(x)$ 는 사차함수이므로 실수 전체에서 미분가능하다.
그러므로 $\lim\limits_{x\to t+}\dfrac{f(x)-f(t)}{x-t}=\lim\limits_{x\to t-}\dfrac{f(x)-f(t)}{x-t}=f'(t)$ 로 쓸 수 있다.)
$(2a-2)f'(t)=2f'(t)$ 일 때 미분가능하고 그래프의 개형 상
$f'(t)\neq 0$ 이므로 여기에서 1)의 경우 $a=2$ 라면 미분가능하고,
그렇지 않다면 미분가능하지 않음을 알 수 있다.

2) 이 경우 $x\to t+$ 와 $x\to t-$ 에서는 각각 다음과 같은 식이 완성된다.

$$\lim_{x\to t+}\frac{g(x)-g(t)}{x-t}=\lim_{x\to t+}\frac{2f(x)-2f(t)}{x-t}=2\lim_{x\to t+}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}=2f'(t)$$
$$\lim_{x\to t-}\frac{g(x)-g(t)}{x-t}=\lim_{x\to t-}\frac{(2a-2)f(x)-(2a-2)f(t)}{x-t}$$
$$=(2a-2)\lim_{x\to t-}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}=(2a-2)f'(t)$$

$2f'(t)=(2a-2)f'(t)$ 일 때 미분가능하고 그래프의 개형 상
$f'(t)\neq 0$ 이므로 여기에서 2)의 경우 역시 $a=2$ 라면 미분가능하고,
그렇지 않다면 미분가능하지 않음을 알 수 있다.

3) 이 경우 $x\to t+$ 와 $x\to t-$ 에서는 각각 다음과 같은 식이 완성된다.

$$\lim_{x\to t+}\frac{g(x)-g(t)}{x-t}=\lim_{x\to t+}\frac{(2a-2)f(x)-(2a-2)f(t)}{x-t}$$
$$=(2a-2)\lim_{x\to t+}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}=(2a-2)f'(t)$$
$$\lim_{x\to t-}\frac{g(x)-g(t)}{x-t}=\lim_{x\to t-}\frac{(2a-2)f(x)-(2a-2)f(t)}{x-t}$$
$$=(2a-2)\lim_{x\to t+}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}=(2a-2)f'(t)$$

여기에서 3)의 경우 모든 실수 t 에 대하여
$(2a-2)f'(t)=(2a-2)f'(t)$ 이므로
함수 $g(x)$ 는 $x=t$ 에서 미분가능함을 알 수 있다.

4) 이 경우 $x\to t+$ 와 $x\to t-$ 에서는 각각 다음과 같은 식이 완성된다.

$$\lim_{x\to t+}\frac{g(x)-g(t)}{x-t}=\lim_{x\to t+}\frac{2f(x)-2f(t)}{x-t}=2\lim_{x\to t+}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}=2f'(t)$$
$$\lim_{x\to t-}\frac{g(x)-g(t)}{x-t}=\lim_{x\to t-}\frac{2f(x)-2f(t)}{x-t}=2\lim_{x\to t+}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}=2f'(t)$$

여기에서 4)의 경우 모든 실수 t 에 대하여 $2f'(t)=2f'(t)$ 이므로
함수 $g(x)$ 는 $x=t$ 에서 미분가능함을 알 수 있다.

5) 이 경우 좌극한/우극한은 1)과 같은 모습이지만,
$f'(t)=0$ 이므로 $(2a-2)f'(t)=2f'(t)=0$ 이다.
따라서 이 때 함수 $g(x)$ 는 $x=t$ 에서 미분가능하다.

6) 이 경우 좌극한/우극한은 2)와 같은 모습이지만,
$f'(t)=0$ 이므로 $2f'(t)=(2a-2)f'(t)=0$ 이다.
따라서 이 때 함수 $g(x)$ 는 $x=t$ 에서 미분가능하다.

1)~6)을 정리하면 아래와 같다.

1), 2) : $a=2$ 라면 $x=t$ 에서 미분가능하고, $a\neq 2$ 라면 미분가능하지 않음
3)~6) : $x=t$ 에서 미분가능함

조건에서 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서만 미분가능하지 않다고 하였으므로,
$a=2$ 라면 모든 지점에서 미분가능하게 되어 모순이다.
따라서 $a\neq 2$ 이고, 1), 2)의 경우 $x=t$ 에서 미분가능하지 않다.
$x=0$ 에서 미분가능하지 않으므로 $f(0)=0$ 이고, $f'(0)\neq 0$ 이다.
여기에서 함수 $f(x)$ 는 x 를 인수로 가진다는 것을 알 수 있다.
3), 4)는 $(x-t)^2$ 을, 5)와 6)은 $(x-t)^3$ 을 인수로 가지는 경우이다.
만약 $(x-t)^2$ 을 인수로 가질 경우, $f(x)=x(x-t)^2(x-\alpha)$ (단, t 는 0 이 아닌 상수, α 는 상수)인데 $\alpha\neq t$ 이면 $x=\alpha$ 에서 1) 또는 2)의 경우가 되어 미분가능하지 않으므로, 조건에 모순이다.

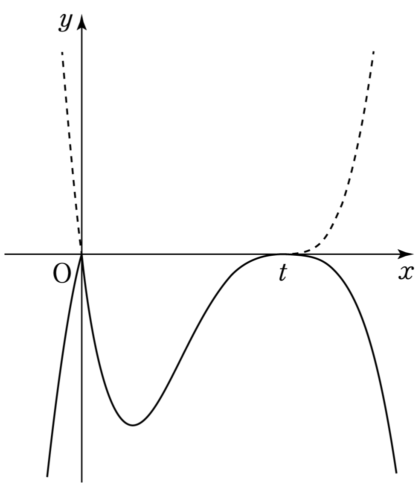
따라서 $\alpha = t$ 이고, $f(x)=x(x-t)^3$ $(t \neq 0)$ 이다.
'$x=0$ 에서만 미분가능하지 않다'라는 조건에 대해 살펴봤으니
다음 조건으로 주어진 '모든 실수 x 에 대하여 $xg(x)\leq 0$'을 사용해 보자.

함수 $g(x)$ 의 식을 다시 한 번 보자.

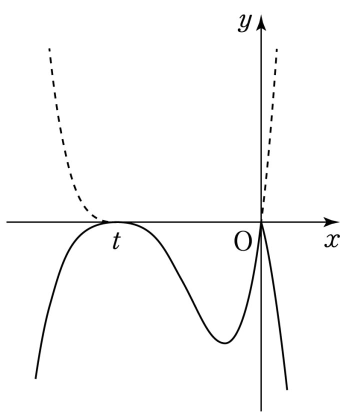
$$g(x)=\begin{cases} (2a-2)f(x) & (f(x)\geq 0) \\ 2f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$$

위 식 중 $2a-2$ 를 볼 때, 다음의 3 가지 경우로 분류할 수 있다.
(ㄱ) $2a-2<0$ (ㄴ) $2a-2=0$ (ㄷ) $2a-2>0$
모든 실수 x 에 대해서 $xg(x)\leq 0$ 이려면 $x>0$ 일 때 $g(x)\leq 0$ 이고,
$x<0$ 일 때 $g(x)\geq 0$ 이다.($\cdots$㉠)
이를 만족시키는 a 의 값의 범위는 어디일지 확인해 보자.
아직 t 가 양수인지 음수인지 판단되지 않았으므로,
t 가 양수일 때와 음수일 때의 그래프를 다 관찰해 보아야 한다.

(ㄱ) $2a-2<0$
$t>0$ 일 때,

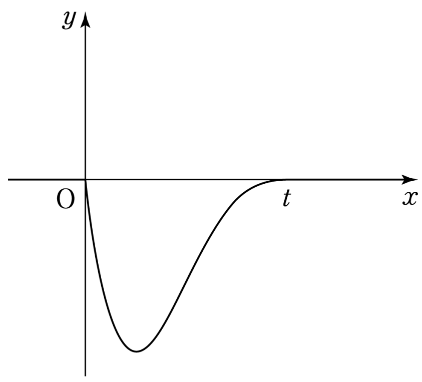


$t<0$ 일 때

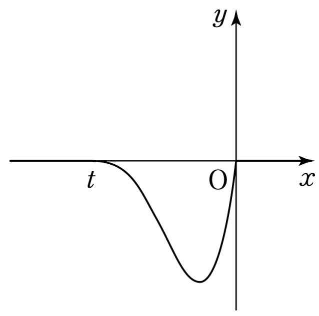


이 경우 $t>0$ 일 때와 $t<0$ 일 때
둘 다 $x<0$ 이면서 $g(x)<0$ 인 부분이 존재하므로 ㉠을 만족하지 않는다.

(ㄴ) $2a-2=0$
$t>0$ 일 때,

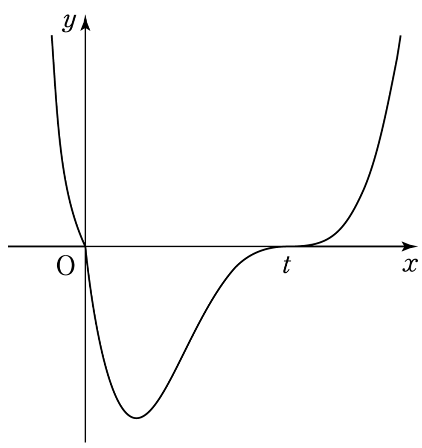


$t<0$ 일 때,

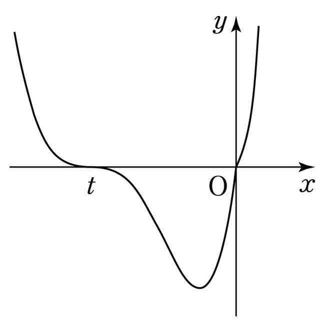


이 경우 $t<0$ 일 때, $x<0$ 이면서 $g(x)<0$ 인 경우가 존재하기 때문에 ㉠을 만족시키지 않는다. $t>0$ 일 때는 ㉠을 만족시킨다.

(ㄷ) $2a-2>0$
$t>0$ 일 때,



$t<0$ 일 때,



이 경우 $t>0$ 일 때와 $t<0$ 일 때 모두 $x>0$ 이면서 $g(x)>0$ 인 경우가 존재하므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ㄱ)~(ㄷ)에 의해 $t>0$ 일 때 $2a-2=0$, 즉 $a=1$ 일 때 ㉠을 만족시킨다.

지금까지 얻어낸 결과를 정리하면 다음과 같다.
$f(x)=x(x-t)^3$, $a=1$ (단, t 는 양의 상수)

$f(a)=-1$ 이고 $a=1$ 이므로, $f(1)=-1$ 이다.

$f(1)=1\times(1-t)^3=-1$ 이므로 $1-t=-1$ 이다.
따라서 $t=2$ 이다.

$\therefore\ f(x)=x(x-2)^3$, $f(5)=135$

[보충]
함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서만 미분가능하지 않다는 조건과 $f(x)=0$ 을 만족시키는 x 는 적어도 2 개 이상 존재한다는 것은 어떤 연관이 있는 것일까?

$f(x)=0$ 을 만족시키는 x 가 없거나 1 개 있을 때를 가정해 보자.
$f(x)=0$ 을 만족시키는 x 가 없거나 1 개라면, $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1 임을 생각할 때 실수 전체의 집합에서 $f(x)\geq 0$ 이다. 이 때 $g(x)=(2a-2)f(x)$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 이는 조건과 모순이다. 따라서 함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서만 미분가능하지 않다는 조건을 만족시키기 위해서는 $f(x)=0$ 을 만족시키는 x 가 적어도 2 개 이상이어야 한다. [보충] 표시 이후에 서술된, $f(x)=0$ 이 될 수 있는 경우에 $f(x)=(x-t)^4$ 의 꼴이 서술되어 있지 않은 이유가 이 때문이다.