2018학년도 대학수학능력시험 모의평가 2회

수학 영역(가형) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

1) [정답] ② (출제자 : 17 김정빈)

[출제의도] 벡터의 간단한 연산을 할 수 있는가?

[해설]

벡터 $\vec{a}+\vec{b}=(4,\ 1)$ 이므로 모든 성분의 합은 5 이다.

2) [정답] ① (출제자 : 17 문혁준)

[출제의도] 로그함수의 극한을 계산할 수 있는가?

[해설]

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\ln(1+8x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\frac{\ln(1+8x)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\frac{\ln(1+8x)}{8x}\times 8}$$

$$=\frac{2}{1\times 8}=\frac{1}{4}$$

3) [정답] ④ (출제자 : 17 김정빈)

[출제의도] 좌표공간에서 좌표축 위에 있는 점의 좌표를 구할 수 있는가?

[해설]

선분 AB 의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{-2+b}{2}\right)$ 이다.

이 점이 y 축 위에 있으므로 $\frac{1+a}{2}=0$, $\frac{-2+b}{2}=0$ 에서

$a=-1$, $b=2$ 이다.

$\therefore\ a+b=1$

4) [정답] ② (출제자 : 17 박승용)

[출제의도] 지수에 미지수가 포함된 방정식의 해를 구할 수 있는가?

[해설]

$8^x=4^{-x+5}$ 에서 $2^{3x}=2^{2(-x+5)}$ 이다.

$2^{3x}=2^{-2x+10}$ 이므로 $3x=-2x+10$ 이다.

정리하면 $5x=10$ 이고, 따라서 $x=2$ 이다.

5) [정답] ⑤ (출제자 : 17 문혁준)

[출제의도] 배반사건을 이용해 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

두 사건 A 와 B 가 서로 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$ 이다.

$\mathrm{P}(A\cup B)$ 의 값이 $\frac{5}{6}$ 이므로 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{5}{6}$ 이다.

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{7}{12}$ 에서 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=\frac{5}{12}$ 임을 알 수 있다.

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{5}{6}-\frac{5}{12}=\frac{5}{12}$

6) [정답] ⑤ (출제자 : 17 문혁준)

[출제의도] 합성함수의 미분을 할 수 있는가?

[해설]

$g(x)=e^x+1$, $h(x)=\ln x$ 라 하면 $g'(x)=e^x$, $h'(x)=\frac{1}{x}$ 이다.

$(h(g(x)))'=h'(g(x))\times g'(x)$ 이므로

$(\ln(e^x+1))'=\frac{1}{e^x+1}\times e^x$ 이다.

$\therefore\ f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$, $f'(0)=\frac{1}{2}$

7) [정답] ④ (출제자 : 17 문혁준)

[출제의도] 조합을 활용하여 실생활의 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

청소당번 3 명을 뽑는데, 그 3 명 안에 A 가 포함되어 있으므로

남은 8 명 중 2 명을 뽑는 경우의 수와 동일하다.

$\therefore\ {}_8\mathrm{C}_2=28$

8) [정답] ③ (출제자 : 17 조영호)

[출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 방정식의 해를 구할 수 있는가?

[해설]

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 일 때 $\cos x \neq 0$ 이므로

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 의 양변을 $\cos^2 x$ 로 나누면

$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ 이다. 이 식을 $\sqrt{3}\sec^2 x - 4\tan x = 0$ 에 대입하면

$\sqrt{3}(1+\tan^2 x) - 4\tan x = \sqrt{3}\tan^2 x - 4\tan x + \sqrt{3} = 0$ 이다.

인수분해하면 $(\sqrt{3}\tan x - 1)(\tan x - \sqrt{3}) = 0$ 이므로

$\tan x = \sqrt{3}$ 또는 $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

따라서 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 일 때, x 의 값은 $\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{\pi}{6}$ 이므로

모든 해의 합은 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

9) [정답] ③ (출제자 :17 김국연)

[출제의도] 조건부확률을 구할 수 있는가?

[해설]

어느 편의점에 있는 모든 음료수는

A 회사 음료수이거나 B 회사 음료수이다.

임의로 선택한 음료수가 A 회사의 탄산음료일 확률은

$\frac{7}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{21}{100}$ 이다.

임의로 선택한 음료수가 B 회사의 탄산음료일 확률은

$\frac{3}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{12}{100}$ 이다.

이 중 선택한 음료수가 탄산음료일 때,

이 음료수가 B 회사의 음료수일 확률은

$$\frac{\frac{12}{100}}{\frac{21}{100}+\frac{12}{100}} = \frac{12}{33} = \frac{4}{11} \text{ 이다.}$$

10) [정답] ① (출제자 : 17 김국연)

[출제의도] 정적분의 계산을 할 수 있는가?

[해설]

$\int_0^1 f(t)\,dt = k$ 라 하면, $f(x) = e^x + x\int_0^1 f(t)\,dt = e^x + kx$ 이다.

여기서 $\int_0^1 f(t)\,dt$ 를 계산하면

$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 (e^t + kt)\,dt = \left[e^t + \frac{k}{2}t^2\right]_0^1 = \left(e + \frac{k}{2}\right) - 1$ 이다.

따라서 $\int_0^1 f(t)\,dt = e + \frac{k}{2} - 1 = k$ 이므로 $k = 2e - 2$ 이다.

11) [정답] ③ (출제자 : 17 김정빈)

[출제의도] 정적분을 활용하여 주어진 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

[해설]

$x = t$ 에서의 단면의 넓이는 $\frac{1}{2}(2e^t)^2 \times 1 = 2e^{2t}$ 이므로

$x = 0$ 에서 $x = \ln 3$ 까지의 입체도형의 부피는

$\int_0^{\ln 3} 2e^{2t}\,dt = \left[e^{2t}\right]_0^{\ln 3} = 9 - 1 = 8$ 이다.

12) [정답] ① (출제자 : 17 김도훈)

[출제의도] 직선과 평면의 위치관계를 파악할 수 있는가?

[해설]

평면 $x + 2y + az + b = 0$ 를 평면 α 라 하고,

직선 $\frac{x+3}{2} = y - 1 = 2 - z$ 를 직선 l 이라 하자.

평면의 법선벡터는 그 평면 위에 있는 모든 직선의 방향벡터와 수직이므로

평면 α 의 법선벡터 $\overrightarrow{n_\alpha} = (1, 2, a)$ 와

직선 l 의 방향벡터 $\overrightarrow{u_l} = (2, 1, -1)$ 에 대하여 $\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{u_l} = 0$ 이다.

$\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{u_l} = (1, 2, a) \cdot (2, 1, -1) = 4 - a = 0$ 이므로 $a = 4$ 이다.

직선 l 을 매개변수 t 에 대하여 정리하면

$\frac{x+3}{2} = y - 1 = 2 - z = t$ 이므로 $\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = t + 1 \\ z = 2 - t \end{cases}$ 이다.

모든 실수 t 에 대하여 점 $(2t-3, t+1, 2-t)$ 가

평면 α 위에 있어야 하므로 $(2t-3) + 2(t+1) + 4(2-t) + b = 0$ 이고

이를 계산하면 $b = -7$ 이다.

$\therefore a + b = -3$

13) [정답] ② (출제자 : 17 김도훈)

[출제의도] 좌표평면 위의 한 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

[해설]

점 P 가 움직인 거리를 구하려면 $\frac{dx}{dt}$ 와 $\frac{dy}{dt}$ 를 구해야 한다.

$\frac{dx}{dt} = \sin t + t\cos t - \sin t = t\cos t$ 이고

$\frac{dy}{dt} = \cos t - t\sin t - \cos t = -t\sin t$ 이므로 점 P 가 움직인 거리는

$$\int_0^{t_0} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^{t_0} \sqrt{(t\cos t)^2 + (-t\sin t)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{t_0} \sqrt{t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}\,dt = \int_0^{t_0} |t|\,dt = \int_0^{t_0} t\,dt$$

$= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{t_0} = \frac{t_0^{\,2}}{2}$ 이다.

따라서 $\frac{t_0^{\,2}}{2} = 3t_0$ 이므로 $t_0 = 6$ 이다. ($\because t_0 > 0$)

14) [정답] ④ (출제자 : 17 최수영)

[출제의도] 정규분포를 따르는 확률변수에서 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

$\mathrm{P}(|X-m| \le 4) = 2\mathrm{P}(m \le X \le 2-m)$ 이므로

$\mathrm{P}(-4 \le X-m \le 4) = 2\mathrm{P}(m \le X \le 2-m)$ 이다.

확률변수 X 는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\, 2^2)$ 을 따르므로

양변을 각각 표준화시키면

$\mathrm{P}\left(\frac{-4}{2} \le Z \le \frac{4}{2}\right) = 2\mathrm{P}\left(\frac{m-m}{2} \le Z \le \frac{2-2m}{2}\right)$

$\mathrm{P}(-2 \le Z \le 2) = 2\mathrm{P}(0 \le Z \le 1-m)$ 이 된다.

$\mathrm{P}(-2 \le Z \le 2) = 2\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$ 이므로

위 등식을 만족시키기 위해서는

$1-m=2$ 이므로 $m=-1$ 이다.

따라서 확률변수 X 는 정규분포 $\mathrm{N}(-1,\, 2^2)$ 을 따르므로

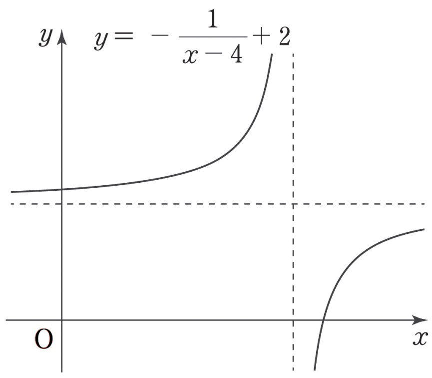
$\mathrm{P}(X \ge 2) = \mathrm{P}(Z \ge 1.5) = 0.5 - 0.4332 = 0.0668$ 이다.

15) [정답] ⑤ (출제자 : 17 김동규)

[출제의도] 특정한 상황을 만족하는 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

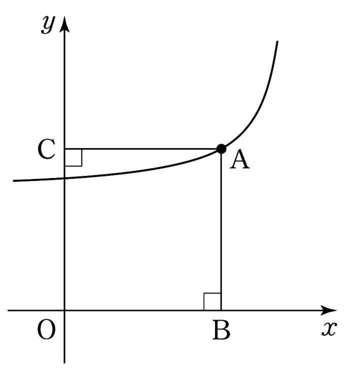
[해설]

좌표평면에 함수 $y=-\frac{1}{x-4}+2$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.

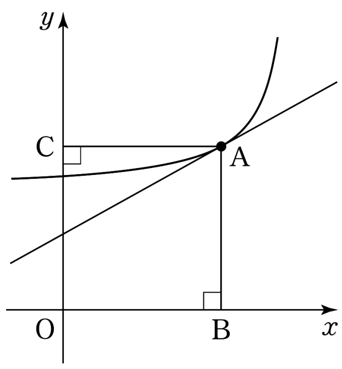


$0<t<4$ 가 성립하도록 점 A 를 좌표평면 위에 나타낸 후

직사각형 OBAC 를 좌표평면 위에 그리면 다음과 같다.



이때, 점 A 에서 접선을 그으면 다음과 같은 그림이 나온다.



점 A 에서의 접선이 사각형 OABC 의 넓이를 이등분하려면

그 접선이 원점을 지나야 한다는 것을 알 수 있다.

함수 $f(x)$ 를 $f(x)=-\frac{1}{x-4}+2$ 라 하자.

접선의 방정식 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$ 에 $x=0$, $y=0$ 을 대입하면

$tf'(t)=f(t)$ 이다.

$f'(t)=\frac{1}{(t-4)^2}$ 이므로 $t \times \frac{1}{(t-4)^2} = -\frac{1}{t-4}+2$ 이다.

$0<t<4$ 이므로 양변에 $(t-4)^2$ 을 곱하면

$t=-(t-4)+2(t-4)^2$ 이고

정리하면 $t^2-9t+18=(t-3)(t-6)=0$ 이다.

따라서 $t=3$ 또는 $t=6$ 이고

이 중 $0<t<4$ 를 만족시키는 t 의 값은 3 이다.

16) [정답] ① (출제자 : 17 김도훈)

[출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

[해설]

선분 BC 를 지름으로 하는 원과 점 A 에서 그 원에 그은 접선의 교점을

P 라 하고 선분 BC 의 중점을 M 이라 하자.

$\angle \mathrm{PAM}=\alpha$, $\angle \mathrm{BAM}=\beta$ 라 하면 $\theta=\alpha-\beta$ 이므로

$\tan\theta$ 의 값을 구하기 위해서는 $\tan\alpha$ 와 $\tan\beta$ 의 값을 알아야 한다.

$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{BM}}^2}=5$, $\overline{\mathrm{PM}}=\overline{\mathrm{BM}}=3$ 이고

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AM}}^2-\overline{\mathrm{PM}}^2}=4$ 이므로

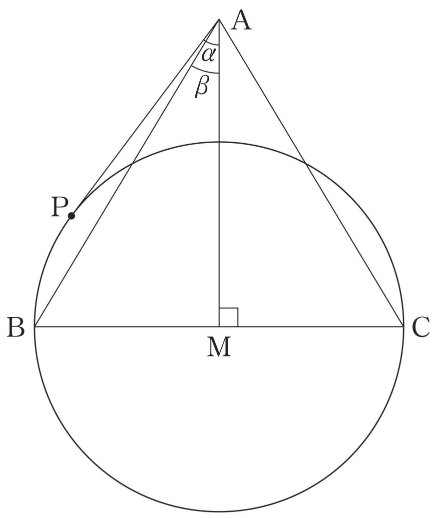
$\tan\alpha=\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{PM}}}=\frac{3}{4}$, $\tan\beta=\frac{\overline{\mathrm{AM}}}{\overline{\mathrm{BM}}}=\frac{3}{5}$ 이다.

따라서 $\tan\theta$ 의 값을 구하면 $\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{\frac{3}{4}-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}}=\frac{\frac{3}{20}}{\frac{29}{20}}=\frac{3}{29}$ 이다.

$\therefore \tan\theta=\frac{3}{29}$

[보충그림]



17) [정답] ④ (출제자 : 17 김정빈)

[출제의도] 모비율의 추정을 통해 표본비율을 구할 수 있는가?

[해설]

$a=\hat{p}-1.96\times\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{400}}$, $b=\hat{p}+1.96\times\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{400}}$ 이므로

$b-a=2\times1.96\times\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{400}}$, $b+a=2\hat{p}$ 이다.

문제의 $b-a=0.196(b+a)$ 에 두 식을 각각 대입하면

$2\times1.96\times\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{400}}=0.196\times2\hat{p}$ 이고

정리하면 $\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}=2\hat{p}$ 이다.

따라서 $\hat{p}-(\hat{p})^2=4(\hat{p})^2$ 이므로 $\hat{p}=0$ 또는 $\hat{p}=\dfrac{1}{5}$ 이다.

$\hat{p}>0$ 이므로 $\hat{p}=\dfrac{1}{5}$ 이다.

18) [정답] ③ (출제자 : 17 김도훈)

[출제의도] 삼수선의 정리를 이용하여 도형의 위치관계를 파악할 수 있는가?

[해설]

$\angle\mathrm{ABP}=\dfrac{\pi}{2}$ 이고 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BP}}=12:4\sqrt{3}=\sqrt{3}:1$ 이므로

삼각형 ABP 는 $\angle\mathrm{ABP}=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{3}$ 인 직각삼각형이다.

점 Q 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 Q$'$ 이라 하고

점 Q$'$ 에서 직선 AB 에 내린 수선의 발을 Q$''$ 이라 하자.

점 B 에서 직선 AP 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

직선 AP 와 직선 BQ 가 수직이므로 점 Q$'$ 은 직선 BH 위의 점이다.

점 H 에서 직선 AB 에 내린 수선의 발을 H$'$ 이라 하면

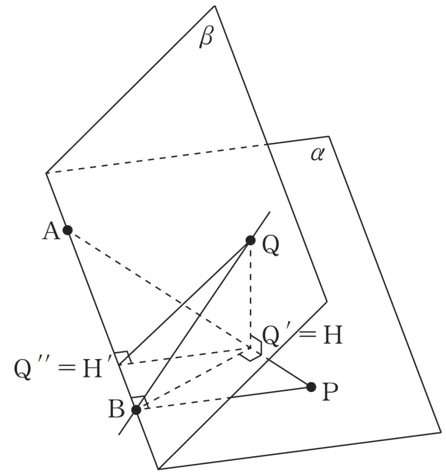
$\overline{\mathrm{HH'}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{\mathrm{BH}}=3\sqrt{3}$ 이다. 점 Q 와 직선 AB 사이의 거리가

$3\sqrt{6}$ 이고 두 평면 α 와 β 가 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{4}$ 이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{Q'Q''}}=3\sqrt{3}$ 이다.

따라서 $\overline{\mathrm{Q'Q''}}=\overline{\mathrm{HH'}}$ 이므로 점 Q$'$ 과 점 H 는 같은 점이고,

점 Q$''$ 과 H$'$ 은 같은 점이다.

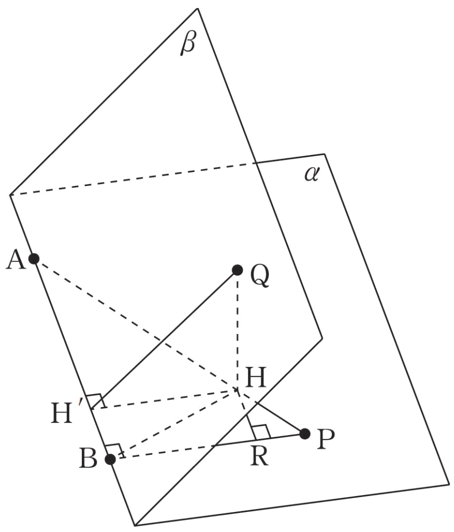


삼각형 BPQ 의 넓이를 구하기 위해서는

점 Q 와 직선 BP 사이의 거리를 알아야 한다.

점 H 에서 직선 BP 에 내린 수선의 발을 R 라 하면 $\overline{\mathrm{HR}}=\overline{\mathrm{H'B}}=3$ 이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{\overline{\mathrm{QH}}^2+\overline{\mathrm{HR}}^2}=\sqrt{27+9}=6$ 이다.



따라서 삼각형 BPQ 의 넓이를 S 라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BP}}\times\overline{\mathrm{QR}}=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times6=12\sqrt{3}$ 이다.

[참고]

점 P 와 점 Q 의 위치 관계로 가능한 경우는 총 네 가지이지만

서로 대칭이고 삼각형 BPQ 의 넓이가 모든 경우에서 같기 때문에

[해설]은 한 가지 경우에 대해서만 서술한다.

19) [정답] ② (출제자 : 17 문혁준)

[출제의도] 이항정리를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

박스 안에 있는 글을 그대로 가지고 와서 하나하나 분석해보자.

> $(3x+1)^{30}$ 의 전개식에서 x^n 의 계수가 a_n 이므로
>
> $a_n=$ $\boxed{(가)}$
>
> 이다.

$\boxed{(가)}$ 는 이항정리를 이용한 것이다.

$(3x+1)^{30}=\displaystyle\sum_{n=0}^{30}{}_{30}\mathrm{C}_n(3x)^n(1)^{30-n}$ 이므로 $\boxed{(가)}$ $={}_{30}\mathrm{C}_n3^n$ 이다.

계속해서 문제를 읽어보자.

> $${}_{30}\mathrm{C}_n = \frac{30!}{n!(30-n)!} = \frac{30\times 29\times \cdots \times(31-n)}{n!}$$
> 이므로 a_n과 a_{n-1} 사이의 관계를 나타내면
> $$a_n = a_{n-1}\times \boxed{(나)} \quad (n\ge 2)$$
> 이다.

${}_n\mathrm{C}_r$의 정의를 이용해 $\boxed{(나)}$를 구해보자.

(가)에서 $a_n = {}_{30}\mathrm{C}_n 3^n$이므로 $a_{n-1} = {}_{30}\mathrm{C}_{n-1}3^{n-1}$이다.

a_n을 a_{n-1}에 대하여 정리하면

$a_n = {}_{30}\mathrm{C}_n 3^n = \dfrac{30\times 29\times\cdots\times(30-n+1)}{n!}\times 3^n$

$= \dfrac{30\times 29\times 28\times\cdots\times\{30-(n-1)+1\}}{(n-1)!}$

$\times 3^{n-1}\times\left\{\dfrac{(30-n+1)}{n}\times 3\right\}$

$= a_{n-1}\times\dfrac{93-3n}{n}$ 이다.

따라서 $\boxed{(나)} = \dfrac{93-3n}{n}$ 이다.

계속해서 읽어보자.

> $2\le k\le 29$인 자연수 k에 대하여
> $$a_k > a_{k-1},\qquad a_k > a_{k+1}$$
> 을 동시에 만족시키는 k의 값은 하나이고
> 그 값은 $\boxed{(다)}$ 이다.
> 따라서 a_n이 최댓값을 가질 때의 n의 값은 $\boxed{(다)}$ 이다.

$a_n = a_{n-1}\times\dfrac{93-3n}{n}$ 임을 이용하여 대소 비교를 해보자.

문제에 쓰여 있는 대로, 어떤 값이 최댓값이라면
그 값 주변에 있는 값들보다 커야 한다.
다시 말해, $a_k > a_{k-1}$이고 $a_k > a_{k+1}$일 때 a_k가 최댓값이다.
(- [보충] 참고)
k의 범위가 $2\le k\le 29$이므로
$k=1$, $k=30$의 경우는 따로 알아보자.

ⓐ $k=1$

$a_2 = a_1\times\dfrac{87}{2}$ 이므로 a_1은 최댓값이 아니다.

ⓑ $k=30$

$a_{30} = a_{29}\times\dfrac{1}{10}$ 이므로 a_{30}은 최댓값이 아니다.

$k=1$일 때와 $k=30$일 때 a_k가 최댓값을 갖지 않으므로 $2\le k\le 29$일 때를 조사해야 한다.

먼저 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{93-3n}{n}$ 임을 알아두고 가자.

(a) $a_k > a_{k-1}$

a_{k-1}은 양수이므로 $\dfrac{a_k}{a_{k-1}} > 1$이다.

따라서 $\dfrac{93-3k}{k} > 1$이고, 정리하면 $k < \dfrac{93}{4}$ 이다.

(b) $a_k > a_{k+1}$

a_k는 양수이므로 $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} < 1$이다.

따라서 $\dfrac{93-3(k+1)}{k+1} = \dfrac{90-3k}{k+1} < 1$이고, 정리하면 $k > \dfrac{89}{4}$ 이다.

(a), (b)를 모두 만족시키는 k의 값의 범위는 $\dfrac{89}{4} < k < \dfrac{93}{4}$ 이고,
k는 자연수이므로 k가 될 수 있는 값은 23 하나이다.
따라서 $\boxed{(다)} = 23$ 이다.

정리하면 아래와 같다.

$\boxed{(가)} = {}_{30}\mathrm{C}_n 3^n = f(n)$

$\boxed{(나)} = \dfrac{93-3n}{n} = g(n)$

$\boxed{(다)} = 23 = p$

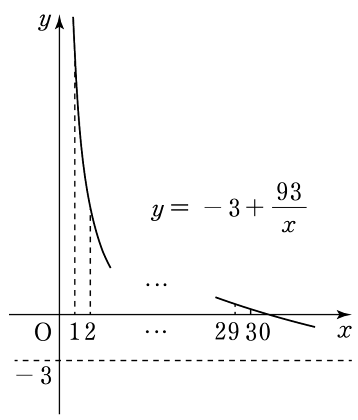
$\therefore\ f(1)\times g(30)+p = 90\times\dfrac{1}{10}+23 = 32$

[보충]
과연 $a_k > a_{k-1}$이고 $a_k > a_{k+1}$이라면
a_k가 구하는 최댓값이라는 것을 어떻게 확신할 수 있을까?

이는 $\boxed{(나)} = \dfrac{93-3n}{n}$ 에서 알 수 있다.

$\boxed{(나)} = \dfrac{93-3n}{n} = -3+\dfrac{93}{n}$ 이고 이는 유리함수 꼴이다.

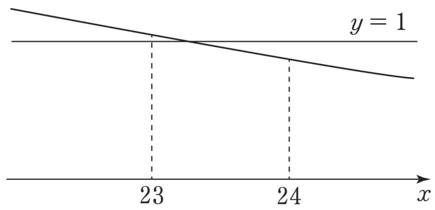
유리함수 $y=-3+\dfrac{93}{x}$ $(x>0)$의 그래프는 다음과 같다.



그래프에서 알 수 있듯이, $-3+\dfrac{93}{n}$ 은 $n=1$일 때부터
$n=30$일 때까지 계속 감소한다.
따라서 어떤 자연수 k에 대하여

$-3+\dfrac{93}{k} > 1$이고 $-3+\dfrac{93}{k+1} < 1$을 만족시키는 k는
아래 그림에서 볼 때와 같이 1개밖에 존재하지 않고

$-3+\dfrac{93}{k} < 1$이고 $-3+\dfrac{93}{k+1} > 1$을 만족시키는 k는
존재하지 않는다. (…㉠)



$a_n = a_{n-1} \times \left(-3+\dfrac{93}{n}\right)$ 이므로 ㉠이 의미하는 바는

a_n 이 계속 증가하다가 어느 순간부터 계속 감소한다는 것이다.

따라서 부등호 방향이 바뀌는 그 지점이 최댓값이라고 할 수 있다.

20) [정답] ⑤ (출제자 : 17 김도훈)

[출제의도] 벡터의 위치관계를 이용하여 내적의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

[해설]

* [보충그림]을 참고하며 해설을 읽는다면 이해에 도움이 된다.

ㄱ.

$\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{O_1P}\cdot\left(\overrightarrow{O_1Q}-\overrightarrow{O_2Q}\right)$

$= \overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_1Q} - \overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_2Q} = -2$

ㄴ.

점 P 에서 직선 O_1O_2 에 내린 수선의 발을 P' 이라 하면,

$\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_1O_2} = -2$, $\left|\overrightarrow{O_1O_2}\right| = 1$ 이므로 $\left|\overrightarrow{O_1P'}\right| = 2$ 이다.

두 직선 O_1O_2 와 O_1P 가 이루는 각의 크기를 α 라 하면

$\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{O_1P'}\right|}{\left|\overrightarrow{O_1P}\right|} = \dfrac{2}{3}$ 이다.

이때, $\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_2Q} = 0$ 이므로

두 직선 O_1P 와 O_2Q 가 이루는 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{2}$ 이고

이에 따라 두 직선 O_1O_2 와 O_2Q 가 이루는 예각의 크기를 β 라 하면

$\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ 이다.

$\cos\beta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ 이므로

$\left|\overrightarrow{O_2Q}\cdot\overrightarrow{O_1O_2}\right| = 2\times\cos\beta = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ 이다.

따라서 $\overrightarrow{O_2Q}\cdot\overrightarrow{O_1O_2}$ 의 최솟값은 $-\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ 이다.

ㄷ.

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ} = \left(\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_1P}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AO_2}+\overrightarrow{O_2Q}\right)$

$= \overrightarrow{AO_1}\cdot\overrightarrow{AO_2} + \overrightarrow{AO_1}\cdot\overrightarrow{O_2Q} + \overrightarrow{AO_2}\cdot\overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_2Q}$

$= \overrightarrow{AO_1}\cdot\overrightarrow{AO_2} + \overrightarrow{AO_1}\cdot\overrightarrow{O_2Q} + \overrightarrow{AO_2}\cdot\overrightarrow{O_1P}$ $\left(\because\ \overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_2Q} = 0\right)$

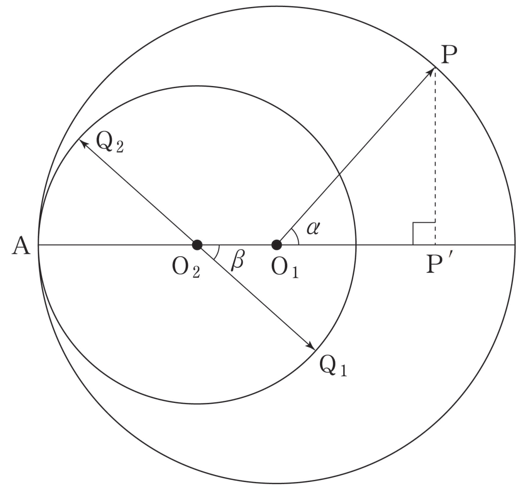
$= 3\times2 - 3\overrightarrow{O_1O_2}\cdot\overrightarrow{O_2Q} - 2\overrightarrow{O_1O_2}\cdot\overrightarrow{O_1P}$

$= 10 - 3\overrightarrow{O_2Q}\cdot\overrightarrow{O_1O_2}$ $\left(\because\ \overrightarrow{O_1O_2}\cdot\overrightarrow{O_1P} = -2\right)$

$\overrightarrow{O_2Q}\cdot\overrightarrow{O_1O_2}$ 의 최솟값이 $-\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ 이므로

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$ 의 최댓값은 $10-3\times\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right) = 10+2\sqrt{5}$ 이다.

[보충그림]



점 Q 의 가능한 위치는 Q_1 과 Q_2 이고,

ㄴ과 ㄷ에서의 점 Q 의 위치는 모두 점 Q_1 이다.

(점 P 의 위치로 가능한 곳은 총 두 가지이지만

서로 대칭이기 때문에 한 가지 경우만 고려한다.)

21) [정답] ① (출제자 : 16 김동균)

[출제의도] 1. 함수의 극한의 대소 관계를 이용할 수 있는가?
2. 주어진 부등식에서 미분의 정의를 유도해낼 수 있는가?
3. 함수와 역함수의 관계를 파악할 수 있는가?

[목차]

[해설] – [관련 개념] – [보충] – [증명1], [증명2], [증명3]

[해설을 읽기 전 : 출제자의 말]

이 문제를 출제한 의도 중에서 가장 중요한 의도는 주어진 식들로부터 나오는 상황들을 직관적으로 파악하여 조건들을 찾아내는 것입니다.

– 조건 (가)에서 직선과 곡선의 관계

– 조건 (나)에서 함수와 역함수의 관계

따라서 [해설]에서는 다소 직관적인 내용들을 서술하여 문제를 풀어나갑니다. 이러한 부분에 대해 '논리적으로 많이 부족하다, 이런 상황이 불확실하다. 식으로 확인해보고 싶다.'라는 생각이 든다면 [증명1], [증명2], [증명3]에 증명 과정이 있으므로 참고 바랍니다.

[해설]

우선 조건 (가)에서 $f(0)$, $f'(0)$ 이 있으므로

$$0 \le (f\circ f)(x) - f(0) \le \{2f'(0)-1\}x$$

에서 $f(0)$ 과 $f'(0)$ 을 구해보자. 해당 식이 $x>0$ 에서 성립하므로 부등식에서 $x=0$ 일 때의 상황과 관계를 파악해 나가보자.

(ㄱ) $f(0)$ 의 값 구하기

부등식은 $x>0$ 에서 성립하지만 $x=0$ 일 때의 상황을 비교하기 위해 $x=0$ 을 대입해보자. ($x=0$ 을 대입할 수는 없지만 힌트를 찾아보자.)

식 $\{2f'(0)-1\}x$ 에 $x=0$ 을 대입하면

식의 값이 0 이고, 조건 $0 \le (f\circ f)(0) - f(0) \le 0$ 이 되어

$(f\circ f)(0) - f(0) = 0$ 을 유도할 수 있음을 파악할 수 있다.

그러면 주어진 조건은 $x>0$ 이지만, 함수 $f(x)$ 의 도함수가 연속이므로 함수 $f(x)$ 도 연속임을 통해서 $f(0)$ 의 값을 구하기 위해

양변에 $\lim\limits_{x\to0+}$ 를 취하자.

$\lim_{x\to0+} 0 = 0$, $\lim_{x\to0+} \{2f'(0)-1\}x = 0$ 이고

함수의 극한의 대소 관계에 의해

$$\lim_{x\to0+} 0 \le \lim_{x\to0+} \{(f\circ f)(x)-f(0)\} \le \lim_{x\to0+} \{2f'(0)-1\}x$$

$$0 \le \lim_{x\to0+} \{(f\circ f)(x)-f(0)\} \le 0$$

$\lim_{x\to0+} \{(f\circ f)(x)-f(0)\} = 0$ 임을 알 수 있다.

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

함수 $(f\circ f)(x)$ 도 $x=0$ 에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to0+} (f\circ f)(x) = (f\circ f)(0)$ 이다.

따라서 $(f\circ f)(0) = f(0)$ 임을 알 수 있고

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하므로 양변에 f^{-1} 를 취하면

좌변은 $(f^{-1}\circ f\circ f)(0) = f(0)$ 이고, 우변은 $(f^{-1}\circ f)(0) = 0$ 이다.

따라서 $f(0)=0$ 이다.

(ㄴ) $f'(0)$ 의 값 구하기

$f'(0)$ 의 값을 구하기 위해 주어진 조건

$$0 \le (f\circ f)(x) - f(0) \le \{2f'(0)-1\}x$$

와 미분계수 식

$$f'(0) = \lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0} \frac{f(x)}{x} \quad (\because f(0)=0)$$

을 연관시켜보자.

주어진 조건에서 $f(0) = (f\circ f)(0)$ 임을 이용하여

$(f\circ f)(x) - f(0)$ 이 미분계수 식의 분자와 비슷한 것을 통해서

미분계수 식 형태로 변형해보자.

미분계수 식의 분모에 x 가 있으므로 양변을 x 로 나누어 보자.

$x>0$ 이므로 부등식 전체를 x 로 나눌 수 있고, x 가 양수이므로

부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

따라서 주어진 조건은 다음과 같이 변형됨을 알 수 있다.

$$0 \le (f\circ f)(x) - f(0) \le \{2f'(0)-1\}x$$

$$0 \le (f\circ f)(x) - (f\circ f)(0) \le \{2f'(0)-1\}x$$

$$0 \le \frac{(f\circ f)(x)-(f\circ f)(0)}{x} \le 2f'(0)-1$$

이다. 오른쪽 부등식에서

$$\frac{(f\circ f)(x)-(f\circ f)(0)}{x} \le 2f'(0)-1$$

이고, $\{(f\circ f)(x)\}' = f'(f(x))f'(x)$, $f(0)=0$ 에서

양변에 $\lim_{x\to0+}$ 를 취하면

$$\lim_{x\to0+} \frac{(f\circ f)(x)-(f\circ f)(0)}{x} = f'(f(0))f'(0) = \{f'(0)\}^2$$

$$\lim_{x\to0+} \{2f'(0)-1\} = 2f'(0)-1$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의해

$$\{f'(0)\}^2 \le 2f'(0)-1$$

$$\{f'(0)\}^2 - 2f'(0) + 1 \le 0$$

$$\{f'(0)-1\}^2 \le 0$$

에서 $f'(0)=1$ 이다.

(ㄷ) 구한 조건들로 주어진 부등식을 분석하기

주어진 부등식에 $f(0)=0$, $f'(0)=1$ 을 대입해보자.

$$0 \le (f\circ f)(x) - f(0) \le \{2f'(0)-1\}x$$

$$0 \le (f\circ f)(x) \le x$$

이고, 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하므로

함수 $f(x)$ 는 일대일대응을 만족해야 한다.

함수 $f(x)$ 의 증감이 바뀌면 일대일대응이 되지 않으므로

함수 $f(x)$ 는 증가함수 또는 감소함수이다.

따라서 도함수 $f'(x)$ 는 항상 $f'(x) \ge 0$ 이거나 항상 $f'(x) \le 0$ 이다.

$f'(0)=1$ 이므로 $f'(x) \ge 0$ 이고 $f(x)$ 는 증가함수이다.

또한, $y=f^{-1}(x)$ 에서 $\left(f^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{f'(y)} > 0$ 이므로

역함수 $f^{-1}(x)$ 역시 증가함수임을 알 수 있다.

따라서 부등식 $(f\circ f)(x) \le x$ 에서

$$t_1 = (f\circ f)(x),\ t_2 = x$$

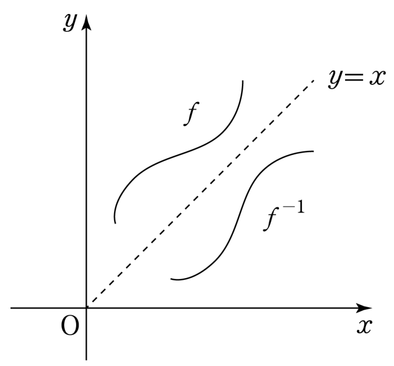
라 하면 증가함수의 정의에 의해

$$t_1 \le t_2 \text{ 이면 } f^{-1}(t_1) \le f^{-1}(t_2)$$

이므로 $f^{-1}(t_1) = \left(f^{-1}\circ f\circ f\right)(x) = f(x)$ 에서

$$f(x) \le f^{-1}(x)$$

이다. 다음 그림과 같이 $f(x) > x$ 인 구간이 존재하면



$f(x) > f^{-1}(x)$ 를 만족하는 구간이 생기므로

함수 $f(x)$ 는 항상 $f(x) \le x$ 을 만족시켜야한다는 것을 파악할 수 있다.

(– [증명1] 참고)

* 함수를 그리다보면 다음과 같은 기하적인 상황을 직관적으로 발견할 수 있지만, 이 경우는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 의 윗부분에 있는 구간과 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 의 아랫부분에 있는 구간이 겹치는 경우이다. 한 점이나 매우 작은 구간에 대해서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 의 윗부분에 있는지는 알 수 없다. 이에 대한 일반적인 증명은 [증명1]을 참고하면 된다.

또한, 함수 $f^{-1}(x)$ 는 증가함수이므로

$0 \le (f\circ f)(x)$ 에서도 양변에 f^{-1} 를 취하면 $f^{-1}(0) \le f(x)$ 이고

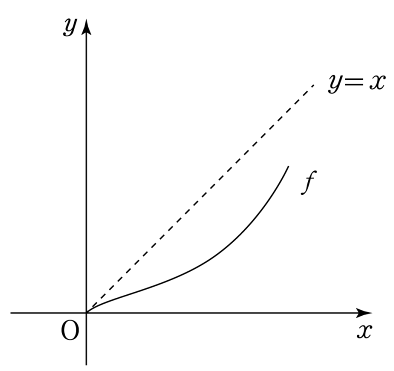
$f(0)=0$ 에서 $f^{-1}(0)=0$ 이므로

$0 \le f(x)$ 이다. 이를 종합하면 $0 \le f(x) \le x$ 이다.

(ㄹ) 조건 (나) 분석하기

$x>0$ 에서 $0 \le f(x) \le x$ 이고, $f(x)$ 가 증가함수라는 사실로부터

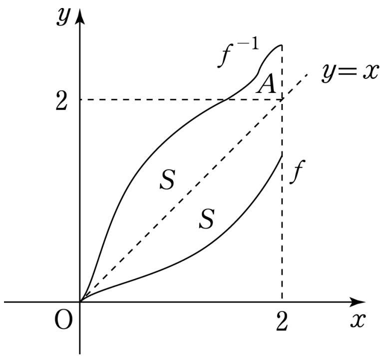
다음과 같은 그래프의 개형을 그릴 수 있다.



역함수는 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

주어진 조건 (나)와 $\int_0^2 x\,dx$ 의 관계를 살펴보자.

$f(2)<2$ 일 때, 함수 $f(x)$ 와 역함수 $f^{-1}(x)$ 는 다음 그림과 같다.



그러면 $\int_0^2 f(x)\,dx=2-S$, $\int_0^2 f^{-1}(x)\,dx=2+S+A$ 이다.

$\int_0^2 \{f(x)+f^{-1}(x)\}\,dx=4+A$ 이고

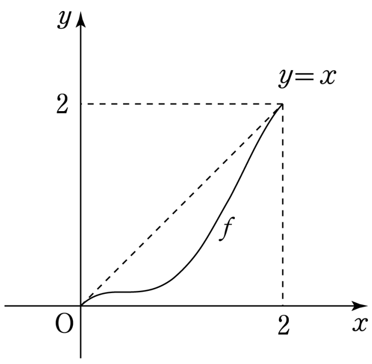
$A>0$ 이므로 $\int_0^2 \{f(x)+f^{-1}(x)\}\,dx>4$ 이다.

이는 주어진 조건 $\int_0^2 \{f(x)+f^{-1}(x)\}\,dx=4$ 에 모순이다.

따라서 $f(2)=2$ 이다.

(ㅁ) 사차함수 구하기

이제 구한 조건을 통해서 함수의 그래프를 그려보면 아래 그림과 같다.



구간 $[0,2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프가 사차함수의 그래프이고
이 사차함수가 $x=0$, $x=2$ 에서 $y=x$ 와 접하므로
$f'(2)=1$ 임을 알 수 있다. (– [증명2] 참고)
따라서 사차함수의 최고차항의 계수를 a $(a\neq 0)$ 라 하면
구간 $[0,2]$ 에서 $f(x)-x=ax^2(x-2)^2$ 임을 알 수 있다.

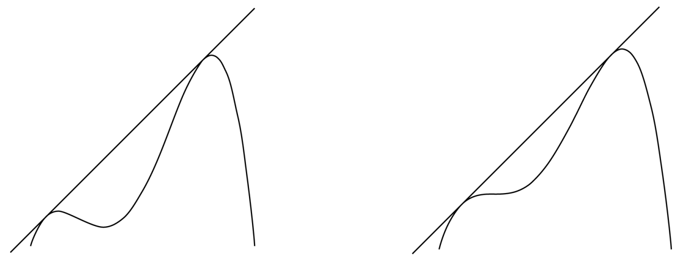
(ㅂ) 최고차항의 계수의 최솟값 구하기

우선 함수의 개형을 그리기 위해 최고차항의 계수 a 의 부호를 판별해보자.
두 점에서 접하는 직선이 존재하는 사차함수의 개형은 다음과 같다.

(– [보충] 참고)

i) $a>0$ 일 때

ii) $a<0$ 일 때

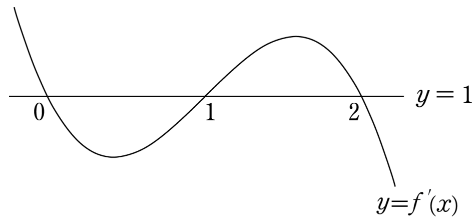


이 중에서 두 점에서 접하고 곡선이 직선 아랫부분에 있는 경우는
$a<0$ 인 경우에서만 발생한다. (– [증명3] 참고)

역함수가 존재하기 위해서는 $f'(x)\geq 0$ 를 만족해야한다.
함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 는

$$f'(x)=4ax(x-1)(x-2)+1\ \ (a<0)$$

이다. 도함수 $f'(x)$ 의 그래프를 그려보면 다음 그림과 같다.



삼차함수의 극솟값이 구간 $[0,2]$ 에서 도함수 $f'(x)$ 의 최솟값이므로
도함수 $f'(x)$ 가 극소가 되는 x 의 값을 구해보자.
도함수 $f'(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f''(x)=12a\left(x-1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

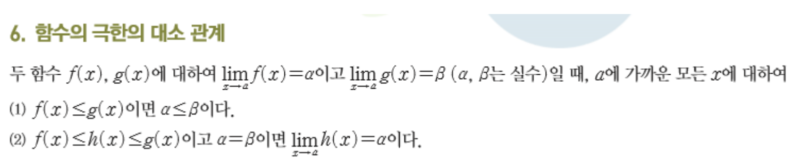
이고 $a<0$ 이므로, 함수 $f'(x)$ 는 $x=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$f'\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=4a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+1$$

$$=\frac{8\sqrt{3}}{9}a+1\geq 0$$

이므로 $a\geq -\frac{3\sqrt{3}}{8}$ 이고, 따라서 a 의 최솟값은 $-\frac{3\sqrt{3}}{8}$ 이다.

[관련 개념]
출처 : 수능특강, EBS, 128쪽

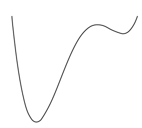
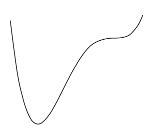
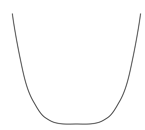

6. 함수의 극한의 대소 관계

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$이고 $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때, a에 가까운 모든 x에 대하여

(1) $f(x)\leq g(x)$이면 $\alpha\leq\beta$이다.

(2) $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$이다.

[보충]
최고차항의 계수가 양수인 사차함수의 개형은 다음과 같다.

그래프 개형			
극점의 개수	3 개	1 개	1 개
변곡점의 개수	2 개	2 개	0 개

[같이 풀어보면 좋은 문제 - 사차함수 개형 관련]
2011학년도 대학수학능력시험 수리영역 가형 24번 (답 : 147)

24. 최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를

$$S=\{a \mid \text{함수 } |f(x)-t| \text{가 } x=a \text{에서 } \underline{\text{미분가능하지 않다.}}\}$$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [4점]

2017학년도 대학수학능력시험 수학영역 가형 30번 (답 : 216)

30. $x>a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.
(단, a는 상수이다.)

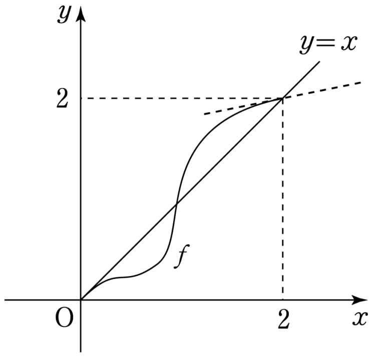
(가) $x>a$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-a)f(x)=g(x)$이다.
(나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다. (단, $M>0$)
(다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$\beta-\alpha=6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오. [4점]

[증명1]
$f(x)>x$인 실수 x가 존재한다고 가정하자.
함수 $f^{-1}(x)$는 증가함수이므로
$f(x)>x$에서 $(f^{-1}\circ f)(x)>f^{-1}(x)$이므로$x>f^{-1}(x)$이다.
그러면 $f(x)>f^{-1}(x)$이므로 $f(x)\le f^{-1}(x)$에 모순이다.
따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le x$이다.

[증명2]
$f'(2)=1$이 아니라고 해보자.
그러면 $f'(2)<1$ 또는 $f'(2)>1$이다.

(i) $f'(2)<1$일 때
기하적인 상황을 파악해보자. 다음 그림과 같이



$x<2$에서 $f(x)>x$인 어떤 실수 x가 존재한다. 이제 이를 증명하자.
$g(x)=f(x)-x$라 하면 $g(2)=f(2)-2=0$이고,
$g'(x)=f'(x)-1$이므로
$g'(0)=f'(0)-1$, $g'(2)=f'(2)-1<0$이다.
$0<x<2$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\le 0$일 경우와
어떤 실수 x $(0<x<2)$에 대하여 $g'(x)>0$일 경우로 나누어서 생각해보자.
우선, $0<x<2$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\le 0$이면
함수 $g'(x)$는 연속이고, $g'(2)<0$이므로 모든 실수 x에 대하여
$g'(x)=0$이면 모순이다. $\left(\because \lim_{x\to 2-} g'(x)\ne g'(2)\right)$
따라서 $g'(x)<0$인 구간이 존재하고 $g'(c)\le 0$이므로
$0<c<2$인 어떤 실수 c에 대하여 $f(c)-c=g(c)>g(2)=0$이다.
따라서 $x=c$에서 $f(c)>c$이므로 $f(x)\le x$에서 모순이다.
두 번째로, 어떤 실수 x $(0<x<2)$에 대하여 $g'(x)>0$인 경우를 생각해보자.
어떤 실수의 값을 c_1이라 두면 $g'(c_1)>0$이고,
문제에 주어진 조건에 의해 도함수 $f'(x)$는 연속이므로
함수 $g'(x)$도 연속이다.
따라서 $g'(2)<0<g'(c_1)$에서 사이값 정리에 의해
구간 $(c_1, 2)$에서 $g'(d)=0$인 실수 d가 존재한다.
이러한 실수들을 d_1, d_2, $\cdots$, d_n이라 하면
d_1, d_2, $\cdots$, d_n 중에서 최댓값을 $d_{\max}$라 하자.
그러면 구간 $(d_{\max}, 2)$에서 $g'(x)\le 0$이다.
만약 구간 $(d_{\max}, 2)$에서 $g'(x)>0$이라면
중간값의 정리에 의해 $g'(d_i)=0$인 실수 d_i $(d_{\max}<d_i<2)$가 존재한다. 이는 $d_{\max}<d_i$이므로 $d_{\max}$가 최댓값으로 정의한 것에 모순이 발생한다.
따라서 $d_{\max}<c<2$에서 $g'(c)>g'(2)$이므로 $f(c)>c$이고,
$f(x)\le x$에서 모순이다.
따라서 $f'(2)<1$인 모든 경우에 대해서 항상 모순이 발생하므로
$f'(2)\ge 1$이다.

(ii) $f'(2)>1$일 때
i 에서 그린 그림과 같이 그림을 그려보면
$x>2$보다 큰 실수 x에 대하여 $f(x)>x$인 실수가 존재함을 알 수 있다.
$x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $0\le f(x)\le x$이므로
$x_1>2$이고 $f(x_1)\le x_1$인 실수 x_1을 잡고
(i)에서한 증명의 아이디어를 구간 $[2, x_1]$에 대하여 증명을 하면
$f'(2)\le 1$이라는 결론을 이끌어낼 수 있다.

따라서 $f'(2)=1$이다.

[증명3]
$0\le x\le 2$에서 $ax^2(x-2)^2+x\le x$이어야 한다.

$$ax^2(x-2)^2+x\le x$$
$$ax^2(x-2)^2\le 0$$

이고, $x^2(x-2)^2>0$이므로 $a\le 0$이며,
$a\ne 0$이므로 $a<0$이다.

22) [정답] 15 (출제자 : 17 김정빈)
[출제의도] 간단한 중복조합의 계산을 할 수 있는가?

[해설]
${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4=15$

23) [정답] 13 (출제자 : 17 석진우)

[출제의도] 이산확률변수의 기댓값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{3}$

$\therefore\ \mathrm{E}(3X+8)=3\mathrm{E}(X)+8=3\times\frac{5}{3}+8=13$

24) [정답] 4 (출제자 : 17 김도훈)

[출제의도] 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

[해설]

$2x^2-x^4y+y^3=2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$4x-4x^3y-x^4\frac{dy}{dx}+3y^2\frac{dy}{dx}=0$, $(x^4-3y^2)\frac{dy}{dx}=4x-4x^3y$ 이다.

따라서 $x=-1$, $y=-1$ 일 때, $-2\times\frac{dy}{dx}=-8$ 이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{-8}{-2}=4$ 이다.

25) [정답] 30 (출제자 : 17 김도훈)

[출제의도] 두 도형이 이루는 예각의 크기를 구할 수 있는가?

[해설]

평면 ABH 는 평면 ABGH 로 볼 수 있다.

점 C 에서 평면 ABGH 에 내린 수선의 발을 M 이라 하면

점 M 은 선분 BG 의 중점이다.

한 모서리의 길이가 1 이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{CM}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이다.

따라서 $\sin\theta=\frac{\overline{\mathrm{CM}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\frac{1}{2}$ 이므로 $60\sin\theta=60\times\frac{1}{2}=30$ 이다.

$\therefore\ 60\sin\theta=30$

26) [정답] 58 (출제자 : 17 김국연)

[출제의도] 여사건을 이용해 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

[해설]

조건 (가)를 만족시키는 전체 경우의 수는

음이 아닌 세 정수의 합이 12가 되는 경우의 수이므로

${}_3\mathrm{H}_{12}={}_{14}\mathrm{C}_{12}={}_{14}\mathrm{C}_2=91$ 이다.

여기서 조건 (나)를 보면 $x\times y>4$ 인데 직접 구하기 어려우므로

여사건을 이용하자.

$x\times y\le 4$ 인 경우는 두 가지로 나눌 수 있다.

① $x\times y=0$ 인 경우

x 가 0인 경우의 수 : ${}_2\mathrm{H}_{12}={}_{13}\mathrm{C}_{12}=13$

y 가 0인 경우의 수 : ${}_2\mathrm{H}_{12}={}_{13}\mathrm{C}_{12}=13$

x, y 가 모두 0 인 경우의 수 : 1

겹치는 경우의 수를 빼주면, $13+13-1=25$ 이다.

② $0<x\times y\le 4$ 인 경우

여기서 x, y 의 순서쌍을 정하면, 조건 (가)에 의해 z 가 하나로 정해진다.

x, y 의 순서쌍 (x, y) 는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$

로 총 8가지가 있다.

따라서 $x\times y\le 4$ 인 경우의 수는 총 $25+8=33$ 이고

조건 (가)와 (나)를 모두 만족시키는 (x, y, z) 의 순서쌍의 개수는

$91-33=58$ 이다.

27) [정답] 8 (출제자 : 16 이준희)

[출제의도] 타원의 정의와 도형의 성질을 이용할 수 있는가?

[해설]

타원의 성질에 의해서 $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AF'}}=6$ 이므로

삼각형 $\mathrm{AFF'}$ 은 $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AF'}}$ 인 이등변삼각형이 된다.

원점을 O 라 하면 이등변삼각형의 성질에 의해

$\angle\mathrm{OAF'}=\angle\mathrm{OAF}$ 가 된다.

선분 $\mathrm{BF'}$ 이 y 축과 만나서 생기는 점을 D 라 하면

각의 이등분선의 성질에 의해 $\overline{\mathrm{AF'}}:\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{DF'}}:\overline{\mathrm{BD}}$ 이다.

$\overline{\mathrm{BF}}=k$ 라 하면

$6:(6+k)=\overline{\mathrm{DF'}}:\overline{\mathrm{BD}}$ 에서

$6:(6+k)=\overline{\mathrm{DF'}}:\left(\frac{k}{2}+\overline{\mathrm{CD}}\right)$ 이다.

직선 CF 와 직선 AD 가 평행하므로

삼각형 ABD 와 삼각형 FBC 가 닮음이고

$\overline{\mathrm{BF}}:\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{BD}}$ 가 성립한다.

따라서 $\overline{\mathrm{CD}}=3$ 이다.

이를 $6:(6+k)=\overline{\mathrm{DF'}}:\left(\frac{k}{2}+\overline{\mathrm{CD}}\right)$ 에 대입하면 $\overline{\mathrm{DF'}}=3$ 이고

타원의 정의에 의해서 $\frac{3k}{2}+6=12$ 이므로 $k=4$ 이다.

따라서 $\overline{\mathrm{BF'}}=8$ 이다.

28) [정답] 11 (출제자 : 17 김도훈)

[출제의도] 문제 상황에 맞게 경우를 나누어 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

같은 색의 공을 뽑은 횟수가 1 이므로

흰 공을 동시에 뽑은 횟수가 1 이고 검은 공을 동시에 뽑은 횟수가 0 인 경우와, 검은 공을 동시에 뽑은 횟수가 1 이고 흰 공을 동시에 뽑은 횟수가 0 인 경우로 나눌 수 있다.

그런데 검은 공을 동시에 뽑은 횟수가 1 인 경우, 을이 뽑아야 하는

주머니 B 에 검은 공이 남지 않기 때문에 무조건 흰 공을 동시에

뽑는 경우가 발생하여 같은 색의 공을 뽑는 횟수가 1 이 될 수 없다.

따라서 흰 공을 동시에 뽑은 횟수가 1인 경우만 살펴보면 된다.

편의를 위해 흰 공을 W, 검은 공을 B라 하자.

i) 갑이 W 1 개, B 2 개를 뽑는 경우
동시에 같은 색의 공을 뽑은 횟수가 1 이므로 을은 W 3 개를 뽑아야 한다.
따라서 갑이 W 1 개와 B 2 개를 뽑는 순서를 고려해 확률을 구하면
$\left(\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right)\times 3=\frac{1}{8}$ 이다.

ii) 갑이 W 2 개, B 1 개를 뽑는 경우
동시에 같은 색의 공을 뽑은 횟수가 1 이므로
그에 맞게 을이 뽑을 공을 정리해보면 다음과 같다.

갑	을
W	W
W	B
B	W

따라서 위의 표처럼 순서를 고려해 공을 뽑는 확률을 구하면
$\left(\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right)\times 3!=\frac{1}{4}$ 이다.

따라서 $\frac{q}{p}=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$ 이므로 $p+q=11$ 이다.
$\therefore\ p+q=11$

[참고]
주머니에서 공을 뽑는 시행을 3 번하면, 주머니에 남은 공이
각각 1 개가 되므로 뽑을 공 3 개를 정하는 것은 남은 공 1 개를
정하는 것과 같다. 따라서 주머니에 남는 공은 1 개이므로
공 3 개를 뽑는 순서와 상관없이 확률은 일정하다.

29) [정답] 291 (출제자 : 16 안성준)
[출제의도] 조건을 이용하여 점들의 위치관계를 파악할 수 있는가?

[해설]
점 O 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 4 인 구를 S 라 하자.
정사면체 OABC 의 한 모서리의 길이가 4 이므로 세 점 A, B, C 는
구 S 위의 점이다.

조건 (가)에서 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$ 이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$ 와 $\overrightarrow{AQ}$ 는 수직이다.
선분 PQ 의 중점을 M 이라 하면 점 A 는 점 M 을 중심으로 하고
반지름의 길이가 $\overline{MP}=\overline{MQ}$ 인 원 위의 점이다.
이 원을 포함하는 평면을 α 라 하자.

조건 (나)에서 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}=16$ 이므로
$(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AQ})=16$
$|\overrightarrow{BA}|^2+\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ})+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=16$ 이고
따라서 $\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ})=0$ 이다.

$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{AM}$ 이므로
$\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ})=2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ 이다.

$\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{OC}$ 이므로 직선 PQ는 직선 OC와 평행하다.
평면 α 는 직선 PQ를 포함하고 있고, 직선 PQ와 직선 OC가 평행하므로
평면 α 와 직선 OC는 평행하다.

(평면 α 에 직선 OC 가 포함될 수 있지만, 평면 점 A, M, O, C 가 한
평면에 존재할 수 없으므로 평면 α 와 직선 OC 는 평행하다.)

직선 OC 와 직선 PQ 는 평행하고, 직선 OC 와 직선 AB 는 수직하므로,
직선 AB 와 직선 PQ 는 수직하다.
또한, 직선 AM 은 직선 AB 와 수직하므로
직선 AB 가 평면 α 위의 서로 다른 두 직선 AM 과 PQ 에 수직하므로,
평면 α 는 직선 AB 와 수직하다.

따라서 평면 α 의 법선벡터는 $\overrightarrow{BA}$ 이다.

정리하면 평면 α 는 점 A 를 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{BA}$ 인 평면이다.
두 점 P, Q 는 구 S 와 평면 α 가 만나서 생기는 원 위의 점이고
그 원의 중심은 점 M 이다. 이때, 점 M 은 선분 AB 의 중점이므로
선분 AB 는 이 원의 지름이다.
이에 따라 점 O 에서 평면 α 에 내린 수선의 발은 M 이고
$\overline{OM}=2$, $\overline{OA}=4$ 이므로 피타고라스 정리에 의해 $\overline{AM}=2\sqrt{3}$ 이다.

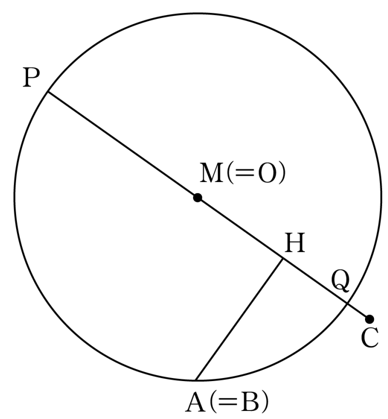
이제 삼각형 BPQ 의 넓이의 최댓값을 구해보자.
점 B 에서 직선 PQ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면
삼각형 BPQ 의 넓이 $M=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{BH}$ 이다.
$\overline{PQ}=2\overline{AM}=4\sqrt{3}$ 이므로
$M=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{BH}=2\sqrt{3}\times\overline{BH}$ 이다.
평면 α 와 직선 AB 가 수직하므로, 점 B 에서 평면 α 에 내린 수선의 발은
A 이다.

따라서 삼수선의 정리에 의해
$\overline{BH}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{AB}^2}=\sqrt{\overline{AH}^2+4^2}$ 이다.
선분 AH 의 길이는 점 A 에서 직선 PQ로의 수선의 발이다.
따라서 점 A 와 점 B 의 중점을 N 이라 하면 평면 α 와 평면 OCN 은
평행하므로, 선분 AH 의 길이는 점 N 에서부터 직선 OC까지의 거리와
같다. 삼각형 OCN 은 $\overline{NO}=\overline{NC}=2\sqrt{3}$ 인 이등변 삼각형이므로
점 N 으로부터 직선 OC까지의 거리는 $2\sqrt{2}$ 이다.
따라서 $\overline{BH}=\sqrt{\overline{AH}^2+4^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+4^2}=2\sqrt{6}$
$\therefore M=12\sqrt{2}$

$\overline{PQ}=4\sqrt{3}$ 이고 $\overline{OC}=4$ 이므로, $k=\sqrt{3}$ 이다.

따라서 $k^2+M^2=291$ 이다.

[참고]
평면 α 에 모든 점을 정사영하면 다음 상황과 같다.



30) [정답] 125 (출제자 : 17 김도훈, 17 김정빈)

[출제의도] 함수의 주기성과 식을 이용하여 그래프의 개형을 파악하고, 이를 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

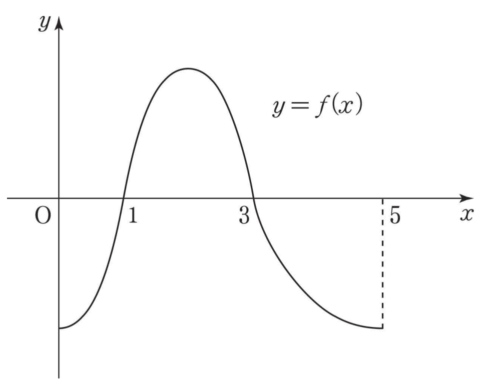
[해설]
조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 그래프가 점 $(1,0)$을 지난다는 것을 알 수 있고, 조건 (다)에서 함수 $F(x)$가 $x=3$에서 최솟값을 가지므로 $x=3$에서 극솟값을 갖는다는 것을 알 수 있다.
함수 $F(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $F'(3)=f(3)=0$이다.

또한 조건 (다)에 의하여 $F(5)=F(0)=\int_0^0 f(t)\,dt=0$이므로 $\int_0^5 f(t)\,dt=0$이다. $F(x+5)=F(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x+5)=f(x)$이므로 $f(5)=f(0)$이다.

정리하면, $f(1)=f(3)=0$, $\int_0^5 f(t)\,dt=0$, $f(5)=f(0)$이다.

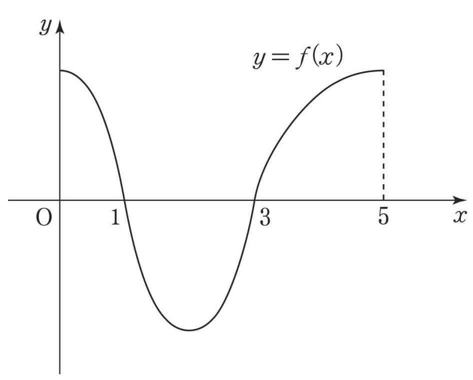
조건 (나)에서 함수 $f(x)$가 구간 $(0,5)$에서 극댓값 또는 극솟값을 하나만 갖는다는 것을 알 수 있다.
함수 $f(x)$가 구간 $(0,5)$에서 극댓값 하나만을 가질 때와 극솟값 하나만을 가질 때로 나누어 살펴보자.

ⅰ) 함수 $f(x)$가 구간 $(0,5)$에서 극댓값 하나만 가질 때
위의 조건들을 이용해 보면 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위 그래프 상에서는 $x=3$ 근방에서 x의 값이 증가함에 따라 함수 $f(x)$의 부호가 양에서 음으로 변하고 있으므로 함수 $F(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 갖는다.
하지만 이는 함수 $F(x)$가 $x=3$에서 최솟값을 갖는다는 것에 모순이다.
(− [보충] 참고)

ⅱ) 함수 $f(x)$가 구간 $(0,5)$에서 극솟값 하나만 가질 때
위의 조건들을 이용해 보면 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

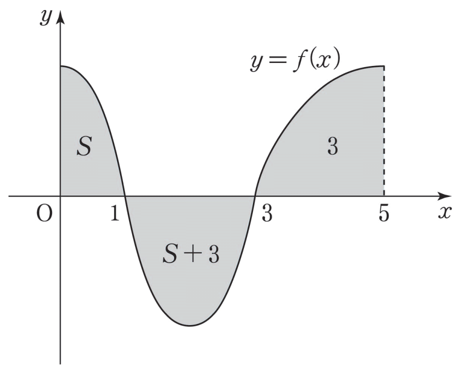


위 그래프 상에서는 $x=3$ 근방에서 x의 값이 증가함에 따라 함수 $f(x)$의 부호가 음에서 양으로 변하고 있으므로 함수 $F(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

조건 (다)에 의해 $F(3)=-3$이다. $\int_0^1 f(x)\,dx=S$라 하면

$F(3)=\int_0^3 f(x)\,dx=-3$, $F(5)=\int_0^5 f(x)\,dx=0$이므로

$\int_1^3 f(x)\,dx=-S-3$, $\int_3^5 f(x)\,dx=3$이다.



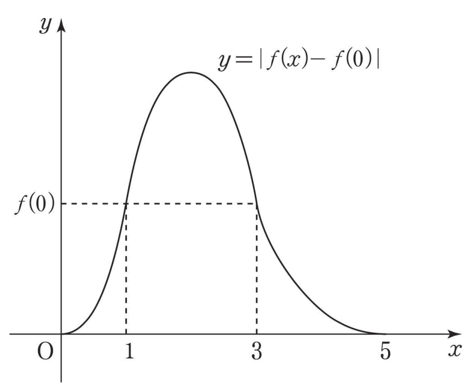
함수 $f(x)$에 대하여 $f(x+5)=f(x)$이고
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
$f'(x+5)=f'(x)$에서 $f'(5)=f'(0)$이다.
함수 $f(x)$가 극소가 되는 x의 값을 α $(0<\alpha<5)$라 하면
구간 $[0,\alpha]$에서 함수 $f(x)$가 감소함수이므로 $f'(x)\le 0$이고
구간 $[\alpha,5]$에서 함수 $f(x)$가 증가함수이므로 $f'(x)\ge 0$이다.
$f'(0)\le 0$, $f'(5)\ge 0$이고 $f'(5)=f'(0)$이므로 $f'(0)=0$이다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x+5)=f(x)$이므로 $f(5)=f(0)$이다.
$f(x+5)=f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(x+5)=f'(x)$이다.
따라서 구간 $[\alpha,5]$에서 $f'(x)\ge 0$이므로 구간 $[\alpha-5,0]$에서 $f'(x)\ge 0$이고, 구간 $[0,\alpha]$에서 $f'(x)\le 0$이므로
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

최대 · 최소 정리에 의해 구간 $[0,5]$에서 함수 $f(x)$가 최댓값을 갖는 β $(0\le\beta\le 5)$가 존재하고, 함수 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다.
모든 실수 x에 대하여 $f(x+5)=f(x)$이므로 $\beta=0$일 때
$f(\beta+5)=f(\beta)$이다. 그러므로 $f(5)=f(0)$이고, 이 경우 함수 $f(x)$가 $x=0$, 5에서 동일한 최댓값을 갖는다. 따라서 $\beta=5$인 경우는 $\beta=0$인 경우와 동일한 경우로 간주할 수 있다.
한편, $f'(\alpha)=0$이고, 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 가지므로 $\alpha\ne\beta$이다. (− [보충] 참고)
$\beta\ne 0$인 경우 구간 $(0,5)$에서 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소인 x의 개수가 2 이상이므로 이는 조건 (나)에 모순이다.
따라서 $\beta=0$이고, 함수 $f(x)$는 $x=0$, 5, $\cdots$ 에서 최댓값을 갖는다.

이제 조건 $\int_0^5 |f(x)-f(0)|\,dx=10$을 이용해 보자.

함수 $|f(x)-f(0)|$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



그림에서

$$\int_0^5 |f(x)-f(0)|\,dx = \{f(0)-S\}+\{2f(0)+(S+3)\}+\{2f(0)-3\}$$

이고, 정리하면 $\int_0^5 |f(x)-f(0)|\,dx = 5f(0)=10$ 이므로 $f(0)=2$ 이다.

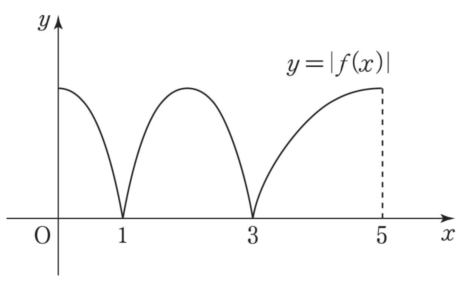
이제 조건 (가)를 이용하여 S 의 값을 구해보자.
$f(0)=2$, $f'(0)=0$ 임을 이용하면
$f(0)=a\times(-1)=2$ 에서 $a=-2$ 이고
$f'(x)=-2\{e^{bx}+be^{bx}(x-1)\}$ 이므로
$f'(0)=-2(1-b)=0$ 에서 $b=1$ 이다.

따라서 $S=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 -2e^x(x-1)\,dx$ 이고, 계산하면

$$S=-2\int_0^1 e^x(x-1)\,dx=-2\left[e^x(x-2)\right]_0^1=-2(-e+2)=2e-4$$

이다.

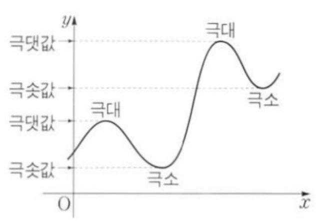
함수 $|f(x)|$ 의 그래프를 그려보자.



$$\int_{-4}^8 |f(x)|\,dx = 5S+15=5(2e-4)+15=10e-5$$ 이므로
$p=10$, $q=-5$ 이다.
$\therefore\ p^2+q^2=125$

[보충]
함수 $F(x)$ 가 $x=3$ 에서 극댓값을 갖고
동시에 $x=3$ 에서 최솟값을 갖는 경우가 있을까?

함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x)\le f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **극대**라 하고, $f(a)$를 **극댓값**이라고 한다.
또 $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x)\ge f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **극소**라 하고, $f(a)$를 **극솟값**이라고 한다.
극댓값과 극솟값을 통틀어 **극값**이라고 한다.



(출처 : 황선욱 외 10인, 좋은책 신사고, 2009 개정 교육과정 미적분1 119p)

모든 실수 x 에 대하여 $F(x)=c$ 라 하자. (단, c 는 상수이다.)
$x=3$ 을 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x 에 대하여
$F(3)\ge F(x)$ 이 성립하므로, 함수 $F(x)$ 는 $x=3$ 에서 극댓값을 갖는다.
또한 모든 실수 x 에 대하여 $F(3)\le F(x)$ 이므로, 함수 $F(x)$ 는
$x=3$ 에서 최솟값을 갖는다.

물론 실제로 이 문제에서는 $F(x)$ 가 상수함수가 아니므로
조건이 성립하지 않지만, $x=a$ 에서 극댓값을 갖고 동시에 $x=a$ 에서
최솟값을 갖는 함수 $f(x)$ 가 존재한다는 것을 알 수 있다.
극값의 정의를 잘 알아두도록 하자.