빈칸문제 8문

1. 2005예비평가 나형 12월 13번 평가원

자연수 n에 대하여 원소가 $2n$개인 집합 S에서 2개의 원소를 뽑는 경우의 수 ${}_{2n}\mathrm{C}_2$를 다음과 같은 방법으로 구하였다.

> S를 원소가 n개이고 서로소인 두 집합 A와 B로 나누고, 다음과 같은 경우를 생각한다.
>
> (ⅰ) A와 B 중 한 집합에서만 두 개의 원소를 뽑는 경우
>
> (ⅱ) A와 B 각 집합에서 원소를 한 개씩 뽑는 경우
>
> (ⅰ)의 경우의 수는 $\boxed{(가)}$이고 (ⅱ)의 경우의 수는 $\boxed{(나)}$이다.
>
> (ⅰ)과 (ⅱ)둘 중에서 한 가지 경우만 일어날 수 있으므로 합의법칙에 의하여 ${}_{2n}\mathrm{C}_2 = \boxed{(가)} + \boxed{(나)}$이다.

위에서 (가)와 (나)에 알맞은 것은? (3점)

	(가)	(나)
①	${}_{n}\mathrm{C}_2 \times {}_{n}\mathrm{C}_2$	${}_{n}\mathrm{C}_1 \times {}_{n}\mathrm{C}_1$
②	$2{}_{n}\mathrm{C}_2$	${}_{n}\mathrm{C}_1 \times {}_{n}\mathrm{C}_1$
③	$3{}_{n}\mathrm{C}_2$	${}_{n}\mathrm{C}_1 \times {}_{n}\mathrm{C}_1 - {}_{n}\mathrm{C}_2$
④	$2{}_{n}\mathrm{C}_2$	${}_{n}\mathrm{C}_1 \times {}_{n-1}\mathrm{C}_1$
⑤	${}_{n}\mathrm{C}_2 - {}_{n}\mathrm{C}_2$	$2{}_{n}\mathrm{C}_2$

2. 2005 나형 10월 12번 교육청

다음은 서로 다른 n개에서 r개를 선택하는 조합의 수 ${}_{n}\mathrm{C}_r\,(r \le n)$에 대한 어떤 성질을 설명하는 과정이다.

> 서로 다른 n개를 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\cdots$ $\boxed{n}$이라 하자.
>
> (ⅰ) $\boxed{1}$을 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 $\boxed{(가)}$이다.
>
> $\boxed{2}$을 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 $\boxed{(가)}$이다.
>
> $\boxed{3}$을 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 $\boxed{(가)}$이다.
>
> ⋮
>
> $\boxed{n}$을 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 $\boxed{(가)}$이다.
>
> 이상을 모두 합하면 $n \times \boxed{(가)}$이다. …㉠
>
> (ⅱ) 그런데 위의 ㉠에 있는 조합의 수 중에는 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\cdots$ $\boxed{r}$의 r개로 구성된 하나의 조합이 $\boxed{(나)}$번 반복되어 계산되었다.
>
> (중략)
>
> (ⅰ), (ⅱ)로부터 서로 다른 n개에서 r개를 선택하는 조합의 수 ${}_{n}\mathrm{C}_r$는
>
> ${}_{n}\mathrm{C}_r = \boxed{(다)} \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? (3점)

	(가)	(나)	(다)
①	${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$	r	$\frac{r}{n}$
②	${}_{n}\mathrm{C}_{r-1}$	r	$\frac{n}{r}$
③	${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$	n	$\frac{n}{r}$
④	${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$	r	$\frac{n}{r}$
⑤	${}_{n}\mathrm{C}_{r-1}$	n	$\frac{r}{n}$

3. 2009 가형 7월 12번 교육청

다음 조건을 만족하는 상자가 $n(n \geq 2)$개 있다.

[상자1] 흰 구슬 1개, 검은 구슬 $n-1$개
[상자2] 흰 구슬 2개, 검은 구슬 $n-2$개
[상자3] 흰 구슬 3개, 검은 구슬 $n-3$개
⋮ ⋮
[상자n] 흰 구슬 n개, 검은 구슬 0개

n개의 상자에서 임의로 한 상자를 택하여 2개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 모두 흰 구슬이 나올 확률을 P_n이라 하자. P_{10}의 값은? [4점]

① $\frac{19}{60}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{7}{20}$
④ $\frac{11}{30}$ ⑤ $\frac{23}{60}$

4. 2007 가형 수능 15번

$1, 2, 3, \cdots, 3n$ (n은 자연수)의 숫자가 하나씩 적혀 있는 $3n$장의 카드 중 임의로 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수를 각각 $a, b\ (a<b)$라 하자. $3a<b$일 확률을 P_{n}이라 할 때, 다음은 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}_n$의 값을 구하는 과정이다.

$3n$장의 카드 중 2장의 카드를 꺼내는 경우의 수는 ${}_{3n}\mathrm{C}_2$이다.
$3a<b$인 경우에는 $b \leq 3n$이므로 $1 \leq a < n$이다.
따라서 $a=k$라 하면 $3a<b$를 만족시키는 b의 경우의 수는
$\boxed{(가)}$이므로 $\mathrm{P}_n = \dfrac{\boxed{(나)}}{{}_{3n}\mathrm{C}_2}$이다.
그러므로 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}_n = \boxed{(다)}$이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? (4점)

	(가)	(나)	(다)
①	$3(n-k)$	$\frac{3}{2}n(n-1)$	$\frac{1}{3}$
②	$3(n-k)$	$\frac{3}{2}n(n-1)$	$\frac{2}{3}$
③	$3(n-k)$	$3n(n-1)$	$\frac{2}{3}$
④	$3(n-k+1)$	$3n(n-1)$	$\frac{1}{3}$
⑤	$3(n-k+1)$	$3n(n-1)$	$\frac{2}{3}$

5. 2018 4월 수학 가형 18번 교육청

다음은 자연수 n에 대하여 부등식

$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}\times{}_nC_k\right)<100$을 만족시키는 n의 최댓값을 구하는

과정이다.

이항정리를 이용하여 $(1+x)^n$을 전개하면
$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}(\ \text{(가)}\ \times x^k)$ ⋯⋯ ㉠
위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n$ ⋯⋯ ㉡
㉠ 의 양변을 0에서 1까지 적분하여
$\frac{2^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n+1}={}_nC_0+\frac{1}{2}{}_nC_1+\frac{1}{3}{}_nC_2+\cdots+\frac{1}{n+1}{}_nC_n$ ⋯⋯ ㉢
을 얻는다.
㉡과 ㉢에서
$(\ \text{(나)}\ )+\frac{1}{n+1}=$
$\frac{1}{2}{}_nC_1+\frac{2}{3}{}_nC_2+\frac{3}{4}{}_nC_3+\cdots+\frac{n}{n+1}{}_nC_n$
$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}\times{}_nC_k\right)$이므로
부등식 $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}\times{}_nC_k\right)<100$을 만족시키는 n의
최댓값은 ((다))이다.

위의 과정에서 (가)에 알맞은 식에 대하여 $k=1$일 때의 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$, (다)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(6)\times g(5)+p$의 값은? [4점]

① 115 ② 120 ③ 125
④ 130 ⑤ 135

6. 2017 나형 6월 19번 평가원

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. 다음은 이차함수 $f(x)=x^2-7x+12$에 대하여 $f(a)f(b)=0$이 성립할 확률을 구하는 과정이다.

> 첫 번째 던져서 나오는 주사위의 눈의 수를 a라 할 때 $f(a)=0$이 되는 사건을 A라 하고, 두 번째 던져서 나오는 주사위의 눈의 수를 b라 할 때 $f(b)=0$이 되는 사건을 B라 하자.
> 이차방정식 $f(x)=0$의 해는 $x=3$ 또는 $x=4$이므로
> $$\mathrm{P}(A)=\boxed{\text{(가)}},\ \mathrm{P}(B)=\boxed{\text{(가)}}$$
> 이다.
> 구하는 확률 $\mathrm{P}(A\cup B)$는
> $$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
> 이고, 두 사건 A와 B는 서로 독립이므로
> $$\mathrm{P}(A\cap B)=\boxed{\text{(나)}}$$
> 이다. 그러므로
> $$\mathrm{P}(A\cup B)=\boxed{\text{(다)}}$$
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 m, n, k라 할 때, $m\times n\times k$의 값은? (4점)

① $\frac{1}{81}$ ② $\frac{5}{243}$ ③ $\frac{7}{243}$
④ $\frac{1}{27}$ ⑤ $\frac{11}{243}$

7. 2005 가형 3월 13번 교육청

다음은 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 이루는 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=np$임을 증명한 것이다.

> [증명]
> $$\mathrm{E}(X)=\sum_{r=0}^{n}\boxed{\text{(가)}}\cdot{}_{n}\mathrm{C}_{r}\,p^{r}q^{n-r}\ (\text{단, } q=1-p)$$
> $$=1\cdot{}_{n}\mathrm{C}_{1}\,pq^{n-1}+2\cdot{}_{n}\mathrm{C}_{2}\,p^{2}q^{n-2}+\cdots+r\cdot{}_{n}\mathrm{C}_{r}\,p^{r}q^{n-r}+\cdots+n\cdot{}_{n}\mathrm{C}_{n}\,p^{n}$$ 에서
> $$r\cdot{}_{n}\mathrm{C}_{r}=r\cdot\frac{n!}{(n-r)!\,r!}=\frac{n!}{(n-r)!\,(r-1)!}=\boxed{\text{(나)}}$$
> 이므로
> $$n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{0}\,pq^{n-1}+n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{1}\,p^{2}q^{n-2}+\cdots+n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}\,p^{r}q^{n-r}+\cdots+n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}\,p^{n}$$
> $$=\boxed{\text{(다)}}\left({}_{n-1}\mathrm{C}_{0}\,q^{n-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{1}\,pq^{n-2}+\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}p^{r-1}q^{n-r}+\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}p^{n-1}\right)$$
> $$=np(q+p)^{n-1}=np$$

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? (3점)

	(가)	(나)	(다)
①	r	$n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{r}$	npq
②	r^2	$n\cdot{}_{n}\mathrm{C}_{r-1}$	np
③	r	$(n-1)\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$	np
④	r^2	$n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$	npq
⑤	r	$n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$	np

8. ebs 수능완성 실전모의 5회 17번

확률변수 X가 가질 수 있는 값이 1, 2, 3, $\cdots,n$이고 확률질량함수 $P(X)$에 대하여

$$P(X\le k)=\frac{k(k+2)}{n(n+2)}\ (k=1,2,3,\ \cdots,n)$$

이 성립한다. 다음은 확률변수 X의 평균 $E(X)$를 구하는 과정이다.

> (i) $k=1$일 때,
> $$P(X=1)=P(X\le 1)=\frac{\text{(가)}}{n(n+2)}$$
> (ii) $k\ge 2$일 때,
> $$P(X=k)=P(X\le k)-P(X\le k-1)=\frac{\text{(나)}}{n(n+2)}$$
> (i), (ii)에서 $P(X=k)=\frac{\text{(나)}}{n(n+2)}\ (1\le k\le n)$
> 따라서
> $$E(X)=\sum_{k=1}^{n}kP(X=k)=\frac{(n+1)(\ \text{(다)}\ )}{6(n+2)}$$

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k),g(n)$이라 할 때, $f(p)+g(p)$의 값은? [4점]

① 24 ② 26 ③ 28
④ 30 ⑤ 32