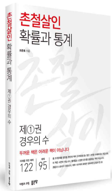
촌철살인

다시 만나는 개념

<미적분> 2. 함수의 논리



Team SPC

Orbi by move

Orbi Class 인강, 강남점

BLACK BAG

저자 미친한 수학자

(블랙백 준T)

#1-1. 다시 만나는 개념 : 함수의 상황

1. 방정식과 함수의 관계

: 방정식의 실근 ⇔ 두 함수의 교점의 x좌표

- 제한범위가 없는 이차방정식은 판별식을 통해 교점의 개수를 판단할 수 있다.

: 식의 동치 변형의 방향

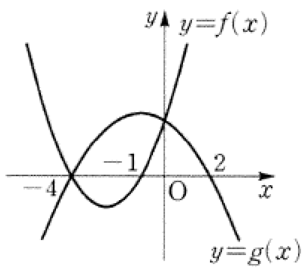
- 내가 그릴 수 있는 그래프, 주어진 그래프를 활용할 수 있는 식으로 변형

기본 방정식과 함수의 관계

촌철살인 (고1) 2009. 11. 23번. 3점

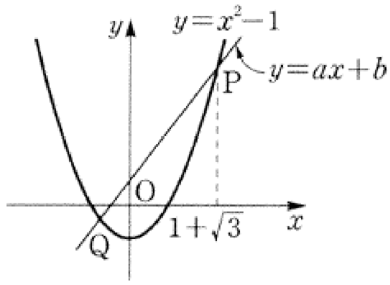
1)이차함수 $y=x^2+ax+3$의 그래프와 직선 $y=2x+b$가 서로 다른 두 점에서 만나고 두 교점의 x좌표가 -2와 1일 때, $2b-a$의 값을 구하시오.(단, a, b는 상수이다.)

촌철살인 2)두 이차함수 $f(x)=x^2+bx+c$, $g(x)=-x^2+dx+e$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $2f(x)+g(x)=0$의 해를 구하여라.



촌철살인 3)오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=x^2-1$의 그래프와 직선 $y=ax+b$의 두 교점 P, Q 중 점 P의 x좌표가 $1+\sqrt{3}$일 때, 유리수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

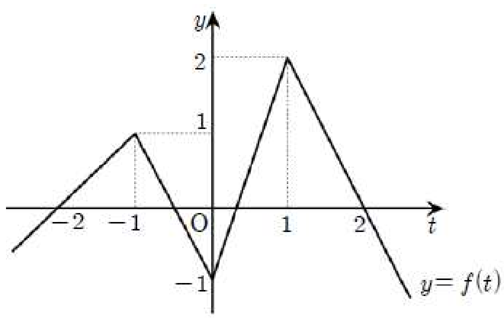
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



연계 그릴 수 있는 그래프 - 치환

촌철살인 (고2) 2011. 3. 15번. 4점

4)함수 $y=f(t)$의 그래프가 그림과 같을 때, x에 대한 이차방정식 $x^2-2xf(t)+f(t)=0$의 근에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?



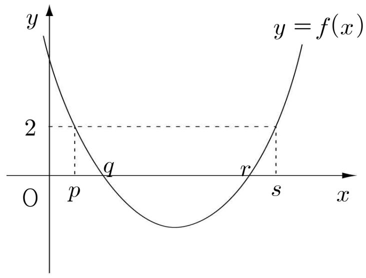
〈보기〉

ㄱ. $f(t)$의 값이 최대일 때, 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄴ. 중근을 갖게 하는 서로 다른 실수 t는 7개다.
ㄷ. $|t|>2$일 때, 서로 다른 두 허근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

촌철살인 (고2) 2006. 6 가형. 나형. 14번. 4점

5)이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 다음과 같을 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



<보기>

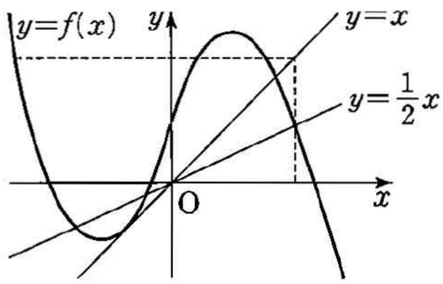
ㄱ. 방정식 $f(-x)=0$ 의 근은 $x=-q$ 또는 $x=-r$이다.

ㄴ. 방정식 $f(x)-2=0$ 의 두 근의 합은 $-\dfrac{b}{a}$이다.

ㄷ. $p+s=q+r$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

촌철살인 6)다음 그림은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $y=\frac{1}{2}x$, $y=x$를 좌표평면 위에 나타낸 것이다. 이때 방정식 $f(f(x))=\frac{1}{2}f(x)$의 실근의 개수는?



① 3 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 9

2. 부등식의 해 + 부등식과 함수의 관계

: 부등식의 해의 경계 ⇔ 방정식의 실근

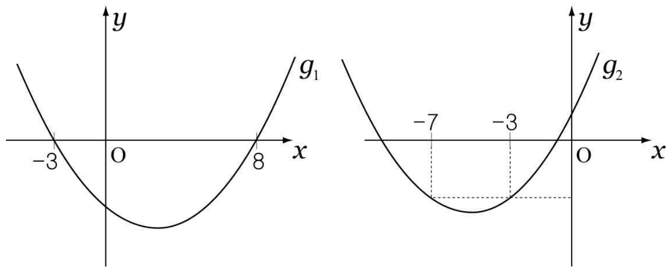
: 부등식 $f(x)>0$의 해 ⇔ $y=f(x)$의 그래프가 x축($y=0$)보다 위에 있는 x의 범위

부등식 $f(x)>g(x)$의 해 ⇔ $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 위에 있는 x의 범위

기본 부등식과 함수의 관계 + 부등식의 해가 설정된 상황

촌철살인 (고2) 2007. 6 가형. 나형. 25번. 3점

7)이차함수 $y=x^2+ax+b$를 같은 일차항의 계수를 잘못 보고 그래프 g_1을, 을은 상수항을 잘못 보고 그래프 g_2를 그렸다. 이 때, $x^2+ax+b<0$을 만족하는 정수 x의 개수를 구하시오.



촌철살인 (고1) 2010. 11. 19번. 4점

8)이차항의 계수가 음수인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+1$이 두 점에서 만나고 그 교점의 y좌표가 각각 3과 8이다. 이때, 이차부등식 $f(x)-x-1>0$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은?

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

촌철살인 (고1) 2011. 11. 9번. 3점

9) x에 대한 이차부등식 $ax^2+bx+c \geq 0$의 해가 오직 $x=3$뿐일 때,
$bx^2+cx+6a<0$를 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

촌철살인 (고1) 2005. 9. 23번. 3점

10) x에 대한 이차부등식 $x^2+ax+b<0$의 해가 $-1<x<3$이 되도록 상수 a, b의 값을 정할 때,
a^2+b^2의 값을 구하시오.

촌철살인 (고1) 2008. 9. 11번. 3점

11) 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해가 $\frac{1}{8}<x<\frac{1}{2}$일 때, 이차부등식 $cx^2+bx+a \leqq 0$의 해 중에서 정수의 개수는?

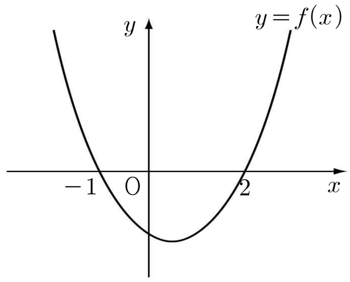
① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

연계 그릴 수 있는 그래프 - 치환

춘천살인 (고1) 2009. 11. 14번. 4점

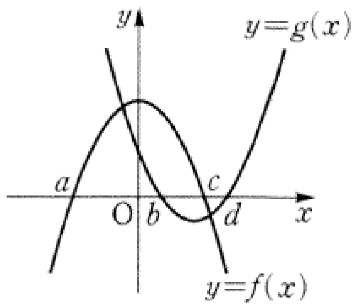
12)그림은 두 점 $(-1, 0)$, $(2, 0)$을 지나는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 나타낸 것이다. 부등식 $f\left(\frac{x+k}{2}\right) \leq 0$의 해가 $-3 \leq x \leq 3$일 때, 상수 k의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4



연계 그릴 수 있는 그래프 - 부등식의 성질

춘천살인 13)이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 부등식 $f(x)g(x) \geqq 0$의 해를 구하여라. (단, $a<b<c<d$)



3. 부등식의 성립조건, 방정식의 근의 조건

: 부등식의 상황 ⇔ 함수의 상황 ⇔ 상황과 동치가 되는 관계식

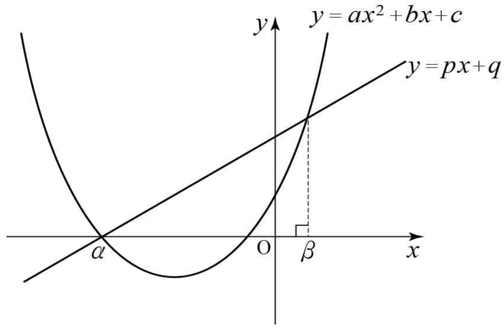
- 함수의 상황 : 지나는 점, 만나는 점, 꼭짓점, 접하는 상황

Tip. 그래프를 그리는 네 가지 관점

- x절편을 기준으로 그리는 방법 (인수분해)
- 함수를 고정시키고 상수함수를 움직이는 방법
- 근 분리의 논리 : 그래프의 케이스 나누기 – 함숫값의 부호, 대칭축, 판별식
- 꼭짓점의 x좌표를 기준으로 케이스 분류

촌철살인 (고1) 2014. 9. (68%). 11번. 3점

14)직선 $y=px+q$와 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



<보기>

ㄱ. $b^2-4ac>0$　　ㄴ. $aq^2+bq+c>0$

ㄷ. 부등식 $ax^2+(b-p)x+c-q\le 0$의 해는 $\alpha\le x\le\beta$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

춘천살인 (고1) 2012. 9. 13번. 3점

15) x에 대한 이차부등식 $x^2-2kx-2k^2+k+4>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

춘천살인 (고2) 2008. 3. 25번. 3점

16) 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 두 직선 $y=-x+4$와 $y=5x+7$에 동시에 접할 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오.

춘천살인 17) 이차방정식 $x^2-2kx+4=0$의 두 근이 모두 1보다 클 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $k>1$ ② $k\leqq-2$ 또는 $k\geqq 2$ ③ $-2\leqq k<1$ ④ $1<k\leqq 2$ ⑤ $2\leqq k<\frac{5}{2}$

촌철살인 (고1) 2014. 9. (48%). 15번. 4점 (세트형)

18) 두 다항식 $P(x)=3x^3+x+11$, $Q(x)=x^2-x+1$에 대하여 x에 대한 이차방정식 $P(x)-3(x+1)Q(x)+mx^2=0$이 2보다 작은 한 근과 2보다 큰 한 근을 갖도록 하는 정수 m의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

촌철살인 19)이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 두 근 중 적어도 한 근이 0과 3사이에 있도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $-3<a<0$ ② $-3<a\le 0$ ③ $-3<a<1$ ④ $-3<a\le 1$ ⑤ $0<a\le 1$

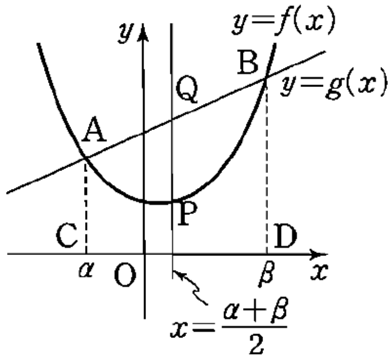
촌철살인 (고1) 2011. 11. 25번. 3점

20) $-1 \le x \le 1$에서 이차부등식 $x^2-2x+3 \le -x^2+k$가 항상 성립할 때, 실수 k의 최솟값을 구하시오.

4. 미정계수가 쓸데없이 많으면 미정계수에 상관없이 구해지는 값이 있다.

연계 뺀 결합함수와 이차함수의 최고차항의 계수

촌철살인 21)이차함수 $f(x)=3x^2+px+q$와 일차함수 $g(x)$에 대하여 다음 그림과 같이 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 두 점 $A(\alpha,\ f(\alpha))$, $B(\beta,\ f(\beta))$에서 만나고, 직선 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$가 두 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라고 한다. $C(\alpha,\ 0)$, $D(\beta,\ 0)$이라 하고 $\overline{PQ}=6$일 때, $\overline{CD}$의 길이는?



① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{3}+1$ ④ $\sqrt{3}+2$ ⑤ $2\sqrt{2}+1$

#1-2. 함수의 상황 MAP

#1-3. 동치인 관계식 - 기본은 어렵다.

방정식의 상황과 관계식

1) $f(x) = ax^2 + bx + c$이고, 방정식 $f(x) = 0$는 두 실근을 가진다.

2) $f(x) = ax^2 + bx + c$이고, 방정식 $f(x) = 0$는 두 실근 α와 β를 가진다.

함수의 상황과 관계식

3) 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(x) = ax^2 + bx + c$일 때, $y = f(x)$는 $(\alpha,\ \beta)$를 지난다.

4) 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(x) = ax^2 + bx + c$일 때, $y = f(x)$의 꼭짓점은 $(\alpha,\ \beta)$이다.

5) 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(x) = ax^2 + bx + c$일 때, $y = f(x)$은 최솟값 α를 가진다.

6) 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(x) = ax^2 + bx + c$이고, 일차함수 $g(x) = mx + n$일 때,
$y = f(x)$와 $y = g(x)$는 $x = \alpha$에서 만난다.

7) 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)=ax^2+bx+c$이고, 일차함수 $g(x)=mx+n$일 때, $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 $x=\alpha$에서 접한다.

8) 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)=ax^2+bx+c$이고, 일차함수 $g(x)=mx+n$일 때, $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 $(\alpha,\ \beta)$에서 만난다.

9) 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)=ax^2+bx+c$이고, 일차함수 $g(x)=mx+n$일 때, $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 $(\alpha,\ \beta)$에서 접한다.

10) 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)=ax^2+bx+c$이고, 일차함수 $g(x)=mx+n$일 때, $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

11) 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)=ax^2+bx+c$이고, 일차함수 $g(x)=mx+n$일 때, $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 서로 다른 두 점 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 만난다.

방 · 부등식의 상황과 관계식

12) 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$가 항상 성립한다.

13) 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq 0$가 항상 성립한다.

14) 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$가 성립하지 않는다.

15) 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq 0$가 성립하지 않는다.

16) 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq 0$의 해는 $\alpha\leq x\leq\beta$이다. (단, $\alpha\neq\beta$)

17) $a>0$일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 서로 다른 두 양근을 가진다.

18) $a>0$일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 1보다 큰 서로 다른 두 근을 가진다.

19) $a>0$일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 양근 하나와 음근 하나를 가진다.

20) $a>0$일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 α와 β 사이에서 오직 한 근을 가진다.

21) $a>0$일 때 이차부등식 $ax^2+bx+c \geq 0$은 $\alpha \leq x \leq \beta$에서 항상 성립한다.

22) 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)=ax^2+bx+c$이고, 일차함수 $g(x)=mx+n$일 때,
$y=f(x)$는 $y=g(x)$보다 항상 위에 있다.

1) $a \neq 0$, $D \geq 0$ (판별식)

2-1) $a \neq 0$, $D \geq 0$ (판별식), $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ (근과 계수)

2-2) $a \neq 0$, $D \geq 0$ (판별식), $f(\alpha) = 0$, $f(\beta) = 0$ (근과 계수)

3) $a \neq 0$, $f(\alpha) = \beta$ (지나는 점)

4) $a \neq 0$, $f(\alpha) = \beta$ (지나는 점), $-\frac{b}{2a} = \alpha$ (꼭짓점의 x좌표)

5) 사실 이차함수는 꼭짓점의 x좌표에 대한 공식을 알고 있으므로 $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \alpha$
하지만 일반적인 함수의 상황처럼 식을 세워보면 꼭짓점의 x좌표를 t라고 두고 (둔 문자)
4)처럼 관계식을 2개 세운다. ⇨ $-\frac{b}{2a} = t$, $f(t) = \alpha$

6) $a \neq 0$, $m \neq 0$, $f(\alpha) = g(\alpha)$ (만나는 점의 x좌표)

7) $a \neq 0$, $m \neq 0$, $f(\alpha) = g(\alpha)$ (만나는 점의 x좌표), $f-g$의 $D = 0$ (접하는 상황)

8) $a \neq 0$, $m \neq 0$, $f(\alpha) = g(\alpha)$ (만나는 점의 x좌표),
$\beta = g(\alpha)$와 $\beta = f(\alpha)$중에서 간단한 식으로 택일 (지나는 점)

9) $a \neq 0$, $m \neq 0$, $f(\alpha) = g(\alpha)$ (만나는 점의 x좌표), $f-g$의 $D = 0$ (접하는 상황)
$\beta = g(\alpha)$와 $\beta = f(\alpha)$중에서 간단한 식으로 택일 (지나는 점)

10) $a \neq 0$, $m \neq 0$, $f-g$의 $D > 0$ (서로 다른 두 점에서 만나는 상황)

11) $a \neq 0$, $m \neq 0$, $f-g$의 $D > 0$ (서로 다른 두 점에서 만나는 상황)
$f(\alpha) = g(\alpha)$ (만나는 점의 x좌표), $f(\beta) = g(\beta)$ (만나는 점의 x좌표)
($f(\alpha) = g(\alpha)$와 $f(\beta) = g(\beta)$ 대신에 $f(x) - g(x) = 0$에서 α와 β를 가지고
근과 계수와의 관계로 2개의 관계식을 만들어도 된다.)

12) 1 단계 : 부등식의 상황을 함수의 상황으로 고친다.
즉, 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$는 모든 실수 x에 대하여 항상 x축 위에 있어야 한다.
2 단계 : 함수는 아래로 볼록이어야 하므로 $a > 0$
x축과 만나지 않아야 하므로 $D < 0$

13) 1 단계 : 부등식의 상황을 함수의 상황으로 고친다.
즉, 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$는 모든 실수 x에 대하여 항상 x축 위에 있어야 한다.
2 단계 : 함수는 아래로 볼록이어야 하므로 $a > 0$
x축과 접하거나 만나지 않아야 하므로 $D \leq 0$

14) 관용적으로 〈이차부등식 $ax^2+bx+c>0$가 성립하지 않는다.〉의 말은
〈이차부등식 $ax^2+bx+c>0$는 모든 x에 대해서 성립하지 않는다.〉는 뜻이다.
1 단계 : 부등식의 상황을 함수의 상황으로 고친다.
즉, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$는 모든 실수 x에 대하여 x축 위에 있는 부분이 없어야 한다.
이 말은 이차함수 $y=ax^2+bx+c$은 위로 볼록이고, x축과 접하거나 x축 아래에 있어야 한다는 말이다.
2 단계 : 함수는 위로 볼록이어야 하므로 $a<0$
x축과 접하거나 만나지 않아야 하므로 $D\le 0$

15) 관용적으로 〈이차부등식 $ax^2+bx+c\ge 0$가 성립하지 않는다.〉의 말은
〈이차부등식 $ax^2+bx+c\ge 0$는 모든 x에 대해서 성립하지 않는다.〉는 뜻이다.
1 단계 : 부등식의 상황을 함수의 상황으로 고친다.
즉, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$는 모든 실수 x에 대하여 x축 위에 있거나 만나는 부분이 없어야 한다.
이 말은 이차함수 $y=ax^2+bx+c$은 위로 볼록이고, x축 아래에 있어야 한다는 말이다.
2 단계 : 함수는 위로 볼록이어야 하므로 $a<0$
x축과 만나지 않아야 하므로 $D<0$

16) 1 단계 : 부등식의 상황을 함수의 상황으로 고친다.
즉, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$가 x축 위에 있는 x의 범위가 $\alpha\le x\le\beta$라는 뜻이다.
이 말은 이차함수 $y=ax^2+bx+c$은 위로 볼록이고, x축과 서로 다른 두 점 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 만난다.

2 단계 : 함수는 위로 볼록이어야 하므로 $a<0$,
이 〈함수의 상황〉을 다시 〈방정식의 상황〉으로 고치면 ⇨ $ax^2+bx+c=0$는 서로 다른 두 실근 α와 β를 가진다.
즉, $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

17) 서로 다른 두 양근은 서로 다른 두 실근이므로 $D>0$를 만족해야 한다.
$D>0$을 만족하는 상태에서 $\alpha\beta>0$라면 두 근은 모두 양근이거나 음근이다.
$D>0$, $\alpha\beta>0$를 만족하는 상태에서 $\alpha+\beta>0$라면 서로 다른 두 양근이다.
즉, $D>0$, $\alpha\beta>0$, $\alpha+\beta>0$

18) 핵심 : 근과 계수와의 관계로는 어떻게 식을 세우더라도 주어진 방정식의 상황과 동치인 관계식을 세울 수 없다.

즉, 주어진 〈방정식의 상황〉을 〈함수의 상황〉으로 바꾼다.
이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$은 x축과 x좌표가 $x=1$보다 큰 서로 다른 두 점에서 만난다.
즉, $f(1)>0$, $D>0$, $-\frac{b}{2a}>1$

19) $\frac{c}{a}<0$ 즉, $c<0$

20) 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$라고 할 때, $\begin{cases} f(\alpha)<0 \text{ and } f(\beta)>0 \\ \text{or} \\ f(\alpha)>0 \text{ and } f(\beta)<0 \end{cases}$

21) 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$라고 하자.
$D\le 0$ or $D>0$, $-\frac{b}{2a}<\alpha$, $f(\alpha)>0$ or $D>0$, $-\frac{b}{2a}>\beta$, $f(\beta)>0$

22) $a>0$, $f-g$의 $D<0$

#2-1. 다시 만나는 개념 : 그래프 특강

미정계수가 그래프의 모양과 위치를 결정한다.
: 일차, 이차

절댓값 1 : ‘기하학적 정의’와 ‘절댓값을 풀다’

절댓값 2 : 절댓값의 성질

절댓값 3 : 절댓값 함수의 그래프와 식
- 일차 + 절댓값의 결합

절댓값 4 : 절댓값 함수의 그래프와 식
- $|x|$와 $|f(x)|$

절댓값 5 : 일반적인 상황
- 절댓값을 풀다.

가우스 1 : ‘기하학적인 정의’와
‘가우스를 풀다.’

가우스 2 : 가우스의 성질과
표현 (가우스 방정식)

가우스 3 : 가우스의 그래프

그래프, 동치변형 후 그래프
- 어디까지 식 변형할지 결정하는 것이 핵심

#2-2. 다시 만나는 개념 : 그래프 특강

촌철살인 22)부등식 $|2x-5| \leq 3$을 만족하는 실수 x의 최댓값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

촌철살인 23)부등식 $|x+2|+|x-1|<4$의 해가 $a<x<b$일 때, $a+b$의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

촌철살인 24)부등식 $|2x-4| \leq |x|+1$을 만족하는 정수 x의 개수는?

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

촌철살인 25)부등식 $|x-2|+2|x-1| \le 5$의 해를 구하시오.

촌철살인 26)부등식 $2|x-1|+3|x+1| < 9$을 만족하는 정수 x의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

촌철살인 27)이차방정식 $x^2-[x]=x$ $(0 < x < 3)$의 모든 근의 합은?

(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① $3+\sqrt{3}$ ② $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ ③ $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ ④ $\frac{6-\sqrt{6}}{2}$ ⑤ $\frac{6+\sqrt{6}}{2}$

촌철살인 28)방정식 $2x^2-[x]-2=0$의 모든 근의 합은?
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대정수이다.)

① $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ ③ $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{2}$ ④ $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}\pm\sqrt{2}}{2}$

촌철살인 29)구간 $0<x<5$ 에서 $x=\dfrac{1}{x-[x]}$ 를 만족시키는 x 의 개수는?
(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

① 0 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 무수히 많다.

촌철살인 30)두 함수 $y=\left|x^2-a\right|$, $y=x-2$의 그래프가 $3\le x\le 4$인 부분에서
두 개의 교점을 갖도록 하는 자연수 a의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

촌철살인 31)x에 대한 방정식 $|x^2-3|-x+k=0$이 서로 다른 세 실근을 가질 때, 모든 실수 k의 값의 곱은?

① $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{13\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{17\sqrt{3}}{4}$ ④ $\frac{21\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{25\sqrt{3}}{4}$

촌철살인 32)x에 대한 방정식 $|x^2-1|+x-k=0$이 서로 다른 네 실근을 가질 때, k의 값은 $a<k<b$이다. $b-a$의 값을 구하면?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

촌철살인 33)$y=x^2-4|x|+3$과 $y=x+k$이 서로 다른 세 점에서 만날 때, 모든 실수 k의 값의 곱은?

① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

촌철살인 34)다음 중 이차방정식 $x^2-[x^2]=x-[x]$ $(1 \le x < 2)$ 의 근을 모두 구하면?
(단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수)

① 1 ② $\frac{\sqrt{5}+1}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}+2}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}-2}{3}$

촌철살인 35)$[\,x\,]=1$일 때, 방정식 $x^2-x=[\,x^2\,]-1$은 두 개의 근을 가진다. 두 근 중 큰 것을 α라 할 때, $(2\alpha-1)^3$의 값은? (단, $[\,x\,]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $2\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{3}$ ③ 5 ④ 8 ⑤ $5\sqrt{5}$

촌철살인 36)연립 부등식 $\begin{cases} 2[x]^2+5[x]-3<0 \\ x^2+3|x|-18 \le 0 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x의 합을 구하면?
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

촌철살인 37)연립부등식 $\begin{cases} x^2-3x \le 0 \\ 1 \le [\,x\,] < 4 \end{cases}$의 해가 $\alpha \le x \le \beta$일 때, $\alpha\beta$의 값을 구하면?

(단, $[\,x\,]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

촌철살인 38)실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=-x^2+2x+8$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\frac{f(x)+|f(x)|}{2}$$

라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $y=g(x)$의 그래프를 그리시오. (단, x절편, y절편, 꼭짓점이 있으면 숫자와 좌표로 명확하게 나타내시오.) (4점)

(2) 위 (1)을 이용하여 부등식 $g(x) \le 0$의 해를 구하시오. (2점)

촌철살인 39)함수 $y=\frac{1}{2}\{x^2+x+2-|x^2-x-2|\}$와 직선 $y=mx$가 서로 다른 세 점에서 만나기 위한 m의 값의 범위는?

많아진 수학적 도구 - 당신의 선택은?

촌철살인 40) x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+(a^2+2a-3)=0$의 두 근이 서로 다른 부호의 실근을 갖고 양의 근의 절댓값이 음의 근의 절댓값보다 클 때, 정수 a의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

촌철살인 41) 이차방정식 $x^2+(a+2)x+a+5=0$의 두 실근 중 적어도 하나가 양수이기 위한 실수 a값의 범위를 구하는 과정을 보이시오.

촌철살인 42) 이차방정식 $x^2-6x+3k=0$의 한 근이 1과 3 사이에, 다른 한 근은 3과 5 사이에 있도록 하는 실수 k값의 범위는?

① $k<\frac{5}{3}$ ② $\frac{5}{3}<k<3$ ③ $\frac{5}{3}<k<9$ ④ $k>3$ ⑤ $3<k<9$

춘천살인 43)삼차방정식 $x^3+(1-2\alpha)x^2+(\alpha^2-\alpha+1)x-\alpha=0$이 실근을 한 개만 가지도록 실수 α의 범위를 구하시오.
(단, 삼중근은 한 개의 실근으로 처리한다.)

춘천살인 44)삼차방정식 $x^3+3x^2-2(k+2)x+2k=0$이 서로 다른 세 실근을 가질 때의 k의 범위를 구하는 과정을 보이시오.

춘천살인 45)삼차방정식 $x^3-10x^2+(a+16)x-2a=0$의 세 근이 어떤 이등변삼각형의 세 변의 길이일 때,
이 이등변삼각형의 넓이를 구하여라.

춘천살인 46)$0 \le x \le 2$인 범위에서 이차함수 $y=-x^2+2ax-a^2+8$의 최댓값이 7이 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

춘천살인 47)$1 \le x \le 4$의 범위에서 이차함수

$$f(x)=-x^2+2kx+k+4$$

가 최댓값 4를 가질 때, 모든 k값의 곱은?

① 0 ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{6}{5}$ ④ $\frac{18}{5}$ ⑤ 4

촌철살인 48) x값의 범위가 $a \le x \le b$인 함수 $y=x^2-3x+3$의 최댓값이 b, 최솟값이 a이다. 상수 $4a+b$의 값은? (단, $a \neq b$)

① -3 ② 0 ③ 3 ④ 6 ⑤ 9

촌철살인 49) x 에 관한 함수

$$f(x)=x^2+2mx-2m+3$$

이 $0 \le x \le 4$ 인 모든 실수 x 에 대하여 항상 $f(x)>0$ 이도록 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

① $m<-\frac{19}{6}$ ② $-3<m<-1$ ③ $-3<m<0$ ④ $0<m<\frac{3}{2}$ ⑤ $-3<m<\frac{3}{2}$

1) 정답 7

$y=x^2+ax+3$의 그래프와 직선 $y=2x+b$의 두 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+(a-2)x+3-b=0$의 두 근이다.
이때, 주어진 조건에서 $x^2+(a-2)x+3-b=0$의 두 근이 -2와 1이므로 근과 계수의 관계로부터
$-2+1=-a+2$, $(-2)\times1=3-b$이다. 그러므로 $a=3$, $b=5$이다. 따라서 $2b-a=7$

2) 정답 $x=-4$

$y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 -4, -1이므로 $f(x)=x^2+bx+c=(x+4)(x+1)$
$y=g(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 -4, 2이므로 $g(x)=-x^2+dx+e=-(x+4)(x-2)$
이므로 방정식 $2f(x)+g(x)=0$은 $2(x+4)(x+1)-(x+4)(x-2)=0$
$x^2+8x+16=0$, $(x+4)^2=0$ $\quad\therefore x=-4$

3) 정답 ③

$x^2-1=ax+b$에서 $x^2-ax-1-b=0$
이 이차방정식의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $1+\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{3}$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여 $(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=a$
$(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=-1-b$ 이므로 $a=2$, $-2=-1-b$
$\therefore a=2$, $b=1$ $\therefore a+b=3$

4) 답 : ③

이차방정식 $x^2-2xf(t)+f(t)=0$의 판별식 D에 대하여
$\frac{D}{4}=f(t)\{f(t)-1\}$이므로
ㄱ. $f(t)$의 값이 최대일 때 $\frac{D}{4}=2(2-1)>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)
ㄴ. 중근을 갖게 하려면 $f(t)=0$ 또는 $f(t)=1$이므로
$f(t)=0$인 t의 개수는 4, $f(t)=1$인 t의 개수는 3이다.
따라서 서로 다른 실수 t는 7개다. (참)
ㄷ. $|t|>2$일 때, $f(t)<0$이므로 $\frac{D}{4}>0$이다. 따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다. (거짓)

5) 정답 ⑤

ㄱ. $x=-q$ 일 때, $f(q)=0$
$x=-r$ 일 때, $f(r)=0$ 이므로 $f(-x)=0$ 의 근은 $x=-q$ 또는 $x=-r$ $\therefore$ 참
ㄴ. $f(x)-2=0$의 두 근은 p, s 이다. $p+s=q+r$ 이므로 두 근의 합은 $-\frac{b}{a}$ $\quad\therefore$ 참
ㄷ. 대칭축을 이용하면 $\frac{p+s}{2}=\frac{q+r}{2}$, $\quad p+s=q+r$ $\quad\therefore$ 참

6) 정답 ④

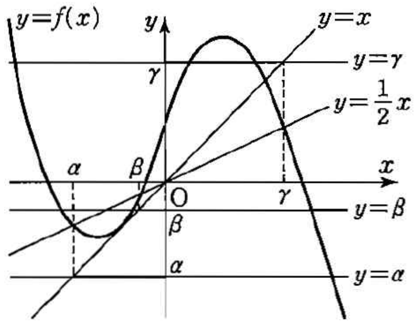
$f(f(x))=\frac{1}{2}f(x)$에서 $f(x)=t$라고 하면 $f(t)=\frac{1}{2}t$

방정식 $f(t)=\frac{1}{2}t$의 근은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x$의 교점의 x좌표이므로
위 그림과 같이 세 실근 α, β, γ를 갖는다고 하면(단, $\alpha<\beta<\gamma$)
$f(x)=\alpha$를 만족하는 x는 1개
$f(x)=\beta$를 만족하는 x는 3개

$f(x)=\gamma$를 만족하는 x는 3개

따라서 방정식 $f(f(x))=\frac{1}{2}f(x)$의 실근의 개수는

$1+3+3=7$(개)이다.



7) 정답 13

갑은 상수항을 바르게 보았으므로 g_1의 상수항 $b=-24$ ($\because$ 두 근의 곱) 을은 일차항의 계수를 바르게 보았으므로 g_2의 일차항 $a=10$($\because$ 대칭축의 방정식은 $x=-\frac{a}{2}=-5$)

이 때, $x^2+ax+b<0$에 a, b를 대입하면 $x^2+10x-24<0$, $(x+12)(x-2)<0$ $\therefore -12<x<2$

따라서 만족하는 정수는 13(개)

8) 정답 ⑤

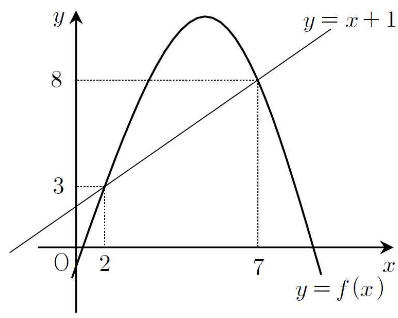
[출제의도] 이차함수와 이차부등식의 관계를 이해하기

직선 $y=x+1$에서 $y=3$일 때 $x=2$, $y=8$일 때 $x=7$이므로 직선 $y=x+1$과

이차항의 계수가 음수인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같이 $(2,\ 3)$과 $(7,\ 8)$에서 만난다.

이때, 이차부등식 $f(x)>x+1$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x+1$보다 위쪽에 있을 때, x값의 범위와 같으므로 $2<x<7$이다.

따라서 이차부등식 $f(x)-x-1>0$을 만족시키는 정수 x는 $3,\ 4,\ 5,\ 6$이므로 모든 정수 x의 값의 합은 18



9) 정답 ②

x에 대한 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq 0$의 해가 오직 $x=3$뿐이므로 $a<0$, $a(x-3)^2\geq 0$가 되어야 한다.

$ax^2+bx+c=a(x-3)^2=ax^2-6ax+9a$ $\therefore$ $b=-6a$, $c=9a$

$bx^2+cx+6a=-6ax^2+9ax+6a=-3a(2x^2-3x-2)$

$=-3a(2x+1)(x-2)<0$ $\therefore$ $-\frac{1}{2}<x<2$

따라서 정수 x는 0과 1뿐이므로 개수는 2이다.

10) 정답 13

이차항의 계수가 1이고 해가 $-1<x<3$인 이차부등식은

$(x+1)(x-3)<0$ 즉, $x^2-2x-3<0$이므로

$a^2+b^2=(-2)^2+(-3)^2=13$

11) 정답 ②

이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해가 $\frac{1}{8}<x<\frac{1}{2}$이므로

$ax^2+bx+c=a\left(x-\frac{1}{8}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=a\left(x^2-\frac{5}{8}x+\frac{1}{16}\right)$ (단, $a>0$)$=ax^2-\frac{5}{8}ax+\frac{1}{16}a$ $\therefore$ $b=-\frac{5}{8}a$, $c=\frac{1}{16}a$

$cx^2+bx+a\leqq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{16}ax^2-\frac{5}{8}ax+a\leqq 0$

$\Leftrightarrow\ a(x-2)(x-8) \leqq 0 \Leftrightarrow 2 \leqq x \leqq 8$
따라서 정수 x 의 개수는 $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 의 7 개다.

12) 정답 ②
이차함수와 이차부등식의 관계에 의하여 주어진 그림으로부터 이차부등식 $f(x) \leq 0$의 해는 $-1 \leq x \leq 2$이다.
이때, $f\left(\frac{x+k}{2}\right) \leq 0$에서 $\frac{x+k}{2}=t$라 하면 $f(t) \leq 0$이고, 이차부등식 $f(t) \leq 0$의 해는 $-1 \leq t \leq 2$이다.
그러므로 $-1 \leq \frac{x+k}{2} \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x+k \leq 4$
$\Leftrightarrow -2-k \leq x \leq 4-k\ \cdots$ ①이다.
또한, $f\left(\frac{x+k}{2}\right) \leq 0$의 해가 $-3 \leq x \leq 3\ \cdots$ ②
이라 하였으므로 ①의 식과 ②의 식은 같아야 한다.
따라서 $-2-k=-3,\ 4-k=3$에서 $k=1$이다.

13) 정답 $a \leqq x \leqq b$ 또는 $c \leqq x \leqq d$
$f(x)g(x) \geqq 0$에서
$f(x) \geqq 0,\ g(x) \geqq 0$ 또는 $f(x) \leqq 0,\ g(x) \leqq 0$
(ⅰ) $f(x) \geqq 0,\ g(x) \geqq 0$을 만족하는 x의 값의 범위는
$a \leqq x \leqq b$
(ⅱ) $f(x) \leqq 0,\ g(x) \leqq 0$을 만족하는 x의 값의 범위는
$c \leqq x \leqq d$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(x)g(x) \geqq 0$의 해는
$a \leqq x \leqq b$ 또는 $c \leqq x \leqq d$

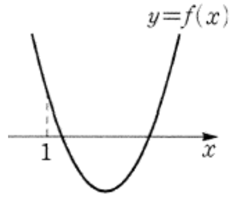
14) 해설코드 : HIH120140911
정답 ⑤
ㄱ. 이차함수의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 $b^2-4ac>0$ (참)
ㄴ. $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 $x>0$일 때, $f(x)>0$
직선의 y절편 q가 양수이므로 $f(q)=aq^2+bq+c>0$ (참)
ㄷ. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=px+q$의 교점의 x좌표는 α, β
$ax^2+(b-p)x+c-q\ =a(x-\alpha)(x-\beta) \leq 0$
$a>0$이므로 $\alpha \leq x \leq \beta$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

15) 답. ①
$x^2-2kx-2k^2+k+4$
$=(x-k)^2+(-3k^2+k+4)$이므로 모든 실수 x에 대하여 이차부등식이 항상 성립하기 위해서는 $-3k^2+k+4>0$이어야 한다.
$\therefore -1<k<\frac{4}{3}$
그러므로 모든 정수 k의 값의 합은 1이다.

16) 정답 24
(ⅰ) $y=x^2+ax+b$와 $y=-x+4$가 접할 때
$x^2+ax+b=-x+4$에서 $x^2+(a+1)x+b-4=0$
$D=(a+1)^2-4(b-4)=0 \quad \cdots\cdots$㉠
(ⅱ) $y=x^2+ax+b$와 $y=5x+7$이 접할 때,

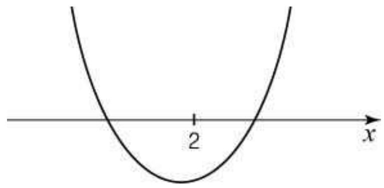
$x^2+ax+b=5x+7$ 에서 $x^2+(a-5)x+b-7=0$
$D=(a-5)^2-4(b-7)=0$ ……㉡
㉠-㉡에서 $12a-36=0$ $\therefore$ $a=3$
또, ㉠에서 $b=8$ $\therefore$ $ab=3\times8=24$

17) 정답 ⑤
$f(x)=x^2-2kx+4$라고 하면
$f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 크므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

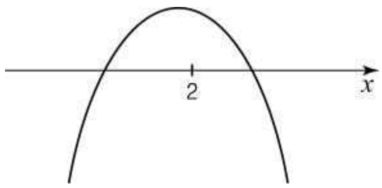


(ⅰ) $f(x)=0$의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-k)^2-4\geq0$, $(k+2)(k-2)\geq0$
$\therefore k\leq-2$ 또는 $k\geq2$
(ⅱ) $f(1)>0$에서 $1-2k+4>0$ $\therefore k<\frac{5}{2}$
(ⅲ) $f(x)=x^2-2kx+4=(x-k)^2+4-k^2$에서
대칭축의 방정식은 $x=k$ $\therefore k>1$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 공통 범위를 구하면 $2\leq k<\frac{5}{2}$

18) 해설코드 : HIH120140915
정답 ②
$P(x)-3(x+1)Q(x)+mx^2=mx^2+x+8$
이차방정식 $mx^2+x+8=0$의 근은 이차함수
$f(x)=mx^2+x+8$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표이다. 한 근이 2보다 크고 다른 한 근이 2보다 작은 경우는 다음과 같다.

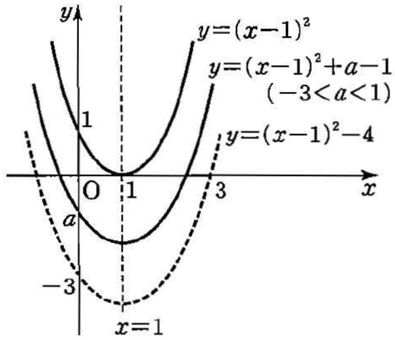


ⅰ) $m>0$일 때
$f(2)=4m+10<0$이므로 만족하는 정수 m은 존재하지 않는다.



ⅱ) $m<0$일 때
$f(2)=4m+10>0$이므로 $-\frac{5}{2}<m<0$
ⅰ), ⅱ)에 의하여 $-\frac{5}{2}<m<0$ 따라서 정수 m의 개수는 2

5-19) 정답 ④
$f(x)=x^2-2x+a$라고 하면
$f(x)=(x-1)^2+a-1$
$y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ a-1)$이므로 a의 값에 따라 $y=(x-1)^2+a-1$의 그래프는 다음과 같다.



즉, $a-1\leq0$에서 $a\leq1$ …㉠
$f(3)>0$에서 $f(3)=3^2-2\cdot3+a=3+a>0$이므로 $a>-3$ …㉡
따라서 ㉠, ㉡에 의해 $-3<a\leq1$

20) 정답 7
$x^2-2x+3\leq-x^2+k$를 정리하면 $2x^2-2x+3-k\leq0$이므로

$f(x)=2x^2-2x+3-k$라 하면 $f(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}-k$이다.

$-1\le x\le 1$에서 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값을 갖고

그 최댓값이 0보다 작거나 같아야 하므로

$f(-1)=-k+7\le 0$ $\therefore$ $k\ge 7$ 따라서 실수 k의 최솟값은 7이다.

21) 정답 ①

$f(x)-g(x)=3x^2+px+q-g(x)\ =3(x-\alpha)(x-\beta)$

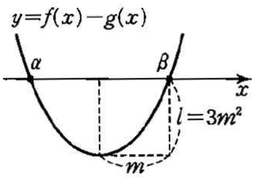
이때 $\overline{PQ}=6$이므로 $g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=6$

$-3\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)=6$, $\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha-\beta}{2}=-2$ $\qquad(\alpha-\beta)^2=8$

$\therefore$ $\overline{CD}=\square\alpha-\beta\square=2\sqrt{2}$

다른 풀이

$y=3(x-\alpha)(x-\beta)$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



그림에서 l, m의 관계는 $3m^2=l$이고, $l=\overline{PQ}=6$이므로 $3m^2=6$에서

$m=\sqrt{2}$ $\therefore$ $\overline{CD}=2\sqrt{2}$

22) 정답 ⑤

$|2x-5|\le 3$

$-3\le 2x-5\le 3$

$2\le 2x\le 8$

$1\le x\le 4$

23) 정답 ②

$|x+2|+|x-1|<4$

(i) $x<-2$일 때,

$-x-2-x+1<4$

$2x>-5$ $\qquad\therefore -\frac{5}{2}<x<-2$

(ii) $-2\le x<1$일 때,

$x+2-x+1=3<4$ $\qquad\therefore -2\le x<1$

(iii) $x\ge 1$일 때,

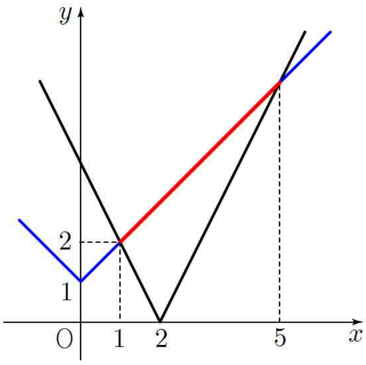
$x+2+x-1<4$

$2x<3$ $\qquad\therefore 1\le x<\frac{3}{2}$

(i), (ii), (iii) 범위를 모두 합집합 하면 $-\frac{5}{2}<x<\frac{3}{2}$

그러므로 $a+b=-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=-1$

24) 정답 ①



위 그림에서 빨간색 선으로 표시된 부분이므로 $1 \le x \le 5$
따라서 정수 x의 개수는 1, 2, 3, 4, 5로 다섯 개다.

25) 정답 $-\frac{1}{3} \le x \le 3$

$|x-2|+2|x-1| \le 5$

(i) $x<1$일 때,

$-3x+4 \le 5$, $-\frac{1}{3} \le x$

$\therefore -\frac{1}{3} \le x < 1$

(ii) $1 \le x < 2$일 때,

$x \le 5$ $\quad\therefore 1 \le x < 2$

(iii) $2 \le x$일 때,

$3x-4 \le 5$, $3x \le 9$

$\therefore\ 2 \le x \le 3$

그러므로 $-\frac{1}{3} \le x \le 3$

26) 정답 ③

(i) $x < -1$일 때, $-2x+2-3x-3<9$ $\quad\therefore x>-2$

(ii) $-1 \le x < 1$일 때, $-2x+2+3x+3<9$ $\quad\therefore x<4$

(iii) $x \ge 1$일 때, $5x+1<9$ $\quad\therefore x<\frac{8}{5}$

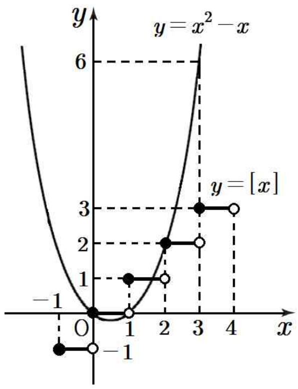
(i), (ii), (iii)의 합집합은 $-2<x<\frac{8}{5}$이므로 정수는 -1, 0, 1 3개다.

27) 정답 ③

$x^2-x=[x]$

$\begin{cases} y=x^2-x \\ y=[x] \end{cases}$ 의 교점을 구하면 된다.

두 함수의 그래프를 그려보면



그림과 같이 두 함수는 $x=0,\ 1<x<2,\ x=2$에서 교점이 발생한다.
이때 $1<x<2$에서 $[x]=1$이므로
$x^2-x=1$
$x^2-x-1=0$의 근을 구하면 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
$1<x<2$이므로 $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
따라서 모든 근의 합은 $0+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+2=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$

[다른 풀이]
(ⅰ) $0<x<1$: $[x]=0$
$x^2=x$ $\quad\therefore$ 해 없다.
(ⅱ) $1\le x<2$: $[x]=1$
$x^2-x-1=0,\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ $\quad\therefore\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
(ⅲ) $2\le x<3$: $[x]=1$
$x^2-x-2=0$ $\quad\therefore\ x=2$
$\therefore$ (근의 합)$=2+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$

28) 정답 ②
$x=n+h$ (단, n은 정수, $0\le h<1$)로 놓고, 주어진 식에 대입하여 정리하면
$2x^2-[x]-2=0$
$2(n+h)^2-n-2=0$
$2h^2+4nh+2n^2-n-2=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
㉠식을 만족하는 정수 n과 음 아닌 소수 h가 존재한다.
㉠식을 h에 관한 이차방정식으로 볼 때, h는 실수이므로, 판별식에서 $D/4=2n+4\ge 0$이므로
$n\ge -2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
근의 공식을 이용하여 ㉠식을 계산하면,
$h=\dfrac{-2n\pm\sqrt{2n+4}}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢
(ⅰ) $n\ge 0$일 때, $h=\dfrac{-2n+\sqrt{2n+4}}{2}$이고, 이것이 $0\le h<1$ 조건을 만족해야 하므로,
$0\le\dfrac{-2n+\sqrt{2n+4}}{2}<1$
만족하는 음아닌 정수는 $n=1$, 이것을 ㉢에 대입하면,

$h=\dfrac{-2+\sqrt{6}}{2}$ $\quad\therefore\ x=n+h=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

(ⅱ) $n<0$일 때, ㉡에서 만족하는 정수 $n=-1,\ -2$이므로, 각각 대입하여 정리하면, 만족하는 실수 x는

$n=-1$일 때, $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 두 근의 합은 $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

[다른 풀이]

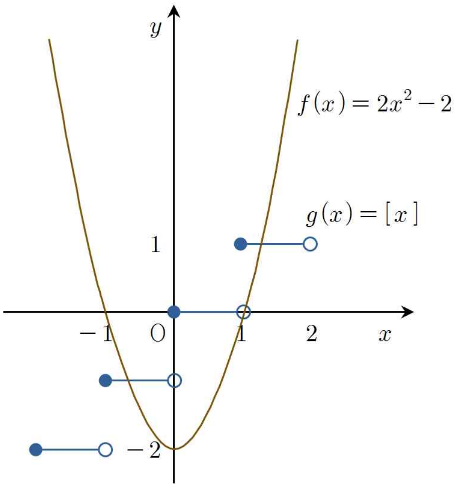
$2x^2-2=[x]$에서 $f(x)=2x^2-2,\ g(x)=[x]$라 하면
두 그래프에서 교점이 $1<x<2$과, $-1<x<0$에 있다.
즉, $1<x<2$에서 준 방정식은

$$2x^2-2=1 \qquad \therefore\ x=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$-1<x<0$에서 준 방정식은

$$2x^2=1 \qquad \therefore\ x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore$ 모든 근의 합은 $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$



29) 정답 ③

(ⅰ) $0<x<1$ 일 때, $[x]=0$이므로

$$x=\frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad x\text{는 없다.}$$

(ⅱ) $1\le x<2$ 일 때, $[x]=1$이므로

$$x=\frac{1}{x-1} \quad \rightarrow \quad x^2-x-1=0$$

$$\rightarrow \quad x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\text{ 로 1개다.}$$

(ⅲ) $2\le x<3$ 일 때, $[x]=2$이므로

$$x=\frac{1}{x-2} \quad \rightarrow \quad x^2-2x-1=0$$

$$\rightarrow \quad x=1+\sqrt{2}\text{ 로 1개다.}$$

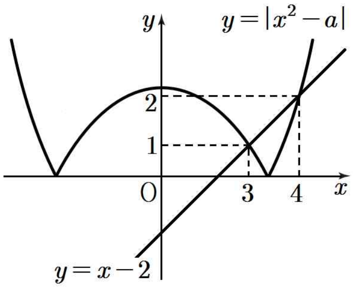
(ⅳ) $3\le x<4$ 일 때, $[x]=3$이므로

$$x=\frac{1}{x-3} \quad \rightarrow \quad x^2-3x-1=0$$

$$\rightarrow \quad x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}\text{ 로 1개다.}$$

이상 (ⅰ) ~ (ⅳ)에서 x의 개수는 3개다.

30) 정답 ⑤



1) $f(x)=-x^2+a$라 하면 $f(3)=-9+a \geq 1$, $\therefore\ a \geq 10$

2) $g(x)=x^2-a$라 하면 $g(4)=16-a \geq 2$, $\therefore\ a \leq 14$

1), 2)에서 $10 \leq a \leq 14$이므로 자연수 a는 $10, 11, 12, 13, 14$

따라서 자연수 a의 총 개수는 5개다.

31) 정답 ②

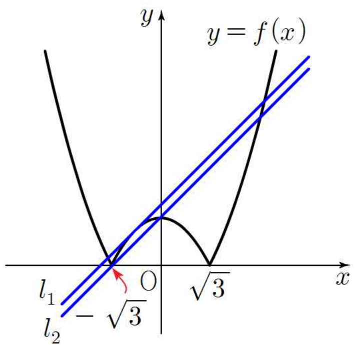
$f(x)=|x^2-3|$, $g(x)=x-k$라 하자.

아래 그림에서 l_1, l_2일 때 교점이 세 개다.

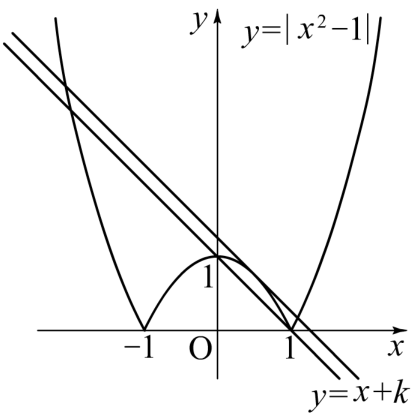
l_1 : $-x^2+3=x-k \rightarrow x^2+x-k-3=0$은 중근이므로 $k=-\dfrac{13}{4}$

l_2 : $-\sqrt{3}$이 x절편이고 기울기가 1이므로 $k=-\sqrt{3}$

따라서 모든 k값의 곱은 $\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$



32) 정답 ④



(ⅰ) $y=-x+k$의 그래프가 $(1, 0)$을 지날 때

$0=-1+k \quad \therefore\ k=1$

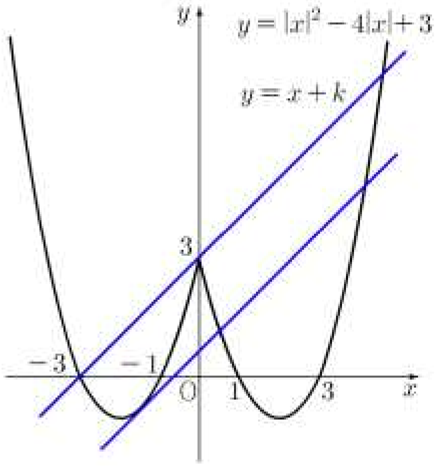
(ⅱ) 두 함수 $y=-x^2+1$, $y=-x+k$의 그래프가 접할 때

$-x^2+1=-x+k$
$x^2-x+k-1=0$에서
$D=1-4(k-1)=-4k+5=0$
$\therefore\ k=\frac{5}{4}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해서 $1<k<\frac{5}{4}$

$\therefore\ a=1,\ b=\frac{5}{4},\ b-a=\frac{1}{4}$

33) 정답 ⑤



$y=|x|^2-4|x|+3$의 그래프를 그려보고 $y=x+k$와의 위치관계를 조사해보면 서로 다른 세 점에서 만나기 위해서는 직선이 $(0,\ 3)$
을 지날 때와, $y=x^2+4x+3$인 이차곡선과 접할 때 임을 알 수 있다.
ⅰ) $y=x+k$이 점$(0,\ 3)$을 지나므로 $k=3$
ⅱ) $x^2+3x+3-k=0$에서 $D=9-12+4k=0$이므로 $k=\frac{3}{4}$

34) 정답 ①, ④

$1\le x<2$에서 $[x]=1$이고

$$[x^2]=\begin{cases}1 & (1\le x<\sqrt{2})\\ 2 & (\sqrt{2}\le x<\sqrt{3})\\ 3 & (\sqrt{3}\le x<2)\end{cases}$$

이다. 따라서
ⅰ) $1\le x<\sqrt{2}$ 일 때,
$x^2-[x^2]=x^2-1$이고 $x-[x]=x-1$이므로
$x^2-1=x-1 \quad\rightarrow\quad x^2-x=0$
$\rightarrow\quad x=0$ 또는 $x=1$
이다. $1\le x<\sqrt{2}$ 이므로 $x=1$ 이다.
ⅱ) $\sqrt{2}\le x<\sqrt{3}$ 일 때,
$x^2-[x^2]=x^2-2$이고 $x-[x]=x-1$이므로
$x^2-2=x-1 \quad\rightarrow\quad x^2-x-1=0$
$\rightarrow\quad x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

이다. $\sqrt{2} \le x < \sqrt{3}$ 이므로 $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 이다.

iii) $\sqrt{3} \le x < 2$ 일 때,

$x^2 - [x^2] = x^2 - 3$이고 $x - [x] = x - 1$이므로

$$x^2 - 3 = x - 1 \quad \to \quad x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0$$

$$\to \quad x = 2 \text{ 또는 } x = -1$$

이다. $\sqrt{3} \le x < 2$ 이므로 해가 없다.

이상 i), ii), iii)에서 주어진 이차방정식의 근은 $x = 1$과 $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 이다.

35) 정답 ⑤

$[\,x\,] = 1$이므로 $1 \le x < 2$

(i) $1 \le x < \sqrt{2}$ 일 때, $[\,x^2\,] = 1$이므로

$$x^2 - x = 0 \quad \to \quad x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

그런데 $1 \le x < \sqrt{2}$ 이므로 $x = 1$

(ii) $\sqrt{2} \le x < \sqrt{3}$ 일 때, $[\,x^2\,] = 2$이므로

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \to \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

그런데 $\sqrt{2} \le x < \sqrt{3}$ 이므로 $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(iii) $\sqrt{3} \le x < 2$일 때, $[\,x^2\,] = 3$이므로

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad \to \quad x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

그런데 $\sqrt{3} \le x < 2$이므로 해가 없다.

이상 (i), (ii), (iii)에서 $x = 1$ 또는 $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 이고, $1 < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 이므로 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 이다. 따라서

$$2\alpha - 1 = \sqrt{5} \quad \to \quad (2\alpha - 1)^3 = 5\sqrt{5}$$

이다.

36) 정답 ③

$2[x]^2 + 5[x] - 3 < 0$ 에서 $-3 < [x] < \dfrac{1}{2}$

즉, $[x] = -2, -1, 0$

$$\therefore -2 \le x < 1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x^2 = |x|^2$ 이므로

$|x|^2 + 3|x| - 18 \le 0$, $(|x|+6)(|x|-3) \le 0$에서 $|x| \le 3$

$$\therefore -3 \le x \le 3 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 공통 범위는 $-2 \le x < 1$ 이다.

따라서 정수 x값의 합은 $(-2)+(-1)+0 = -3$ 이다.

37) 정답 3

$x^2 - 3x = x(x-3) \le 0$

$\therefore\ 1 \le x \le 3$

$1 \le [\,x\,] < 4$

$\therefore\ 1 \le x < 4$

연립하면 $1 \le x \le 3 \quad \therefore\ \alpha\beta = 3$

38) 정답 (1) 풀이 참조 (2) $x \le -2$ 또는 $x \ge 4$

(1) $f(x) = -x^2+2x+8 = -(x-1)^2+9$이고,

$f(x) = -x^2+2x+8 = -(x-4)(x+2)$에서

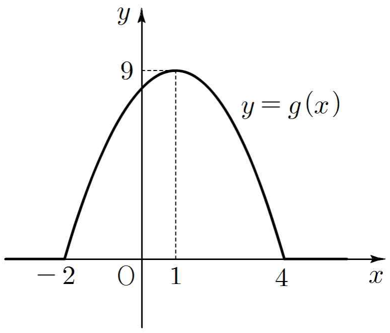
$f(x) \ge 0$일 때의 범위는

$-(x-4)(x+2) \ge 0$, $(x-4)(x+2) \le 0$, $-2 \le x \le 4$

$\therefore\ |f(x)| = \begin{cases} f(x): & -2 \le x \le 4 \\ -f(x): & x < -2 \text{ 또는 } x > 4 \end{cases}$

$\therefore\ g(x) = \dfrac{f(x)+|f(x)|}{2}$

$= \begin{cases} \dfrac{f(x)+f(x)}{2} = f(x): & -2 \le x \le 4 \\ \dfrac{f(x)-f(x)}{2} = 0 & : x < -2 \text{ 또는 } x > 4 \end{cases}$



(2) $g(x) \le 0$의 해는

$\therefore\ x \le -2$ 또는 $x \ge 4$

39) 정답 $1 < m < 2$, $-1 < m < 0$

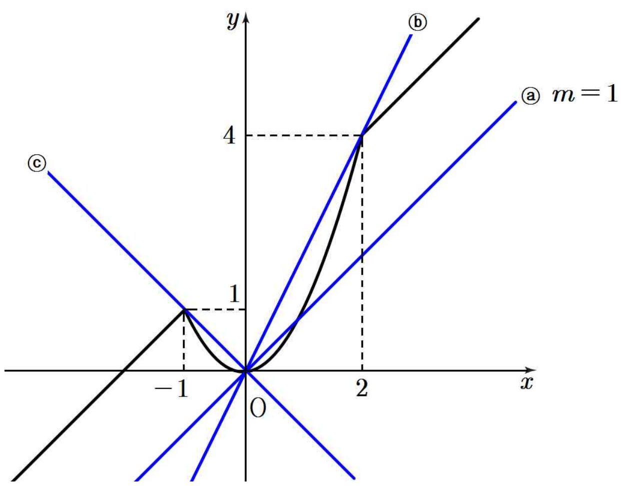
$x^2 - x - 2 \le 0$, $(x+1)(x-2) \le 0$

(ⅰ) $-1 \le x \le 2$

$y = \dfrac{1}{2}(2x^2) = x^2$

(ⅱ) $x < -1$, $x > 2$

$y = \dfrac{1}{2}(2x+4)$



ⓐ인 경우 $m=1$로 교점이 2개

ⓑ인 경우 $(2, 4)$를 지나는 경우 $m=2$ 교점이 3개

ⓐⓑ에 따라 $1 < m < 2$
ⓒ인 경우 $(-1,\ 1)$을 지난 경우 $m = -1$
ⓒ에 따라
$-1 < m < 0$
$\therefore\ -1 < m < 0,\ 1 < m < 2$

40) 정답 ②

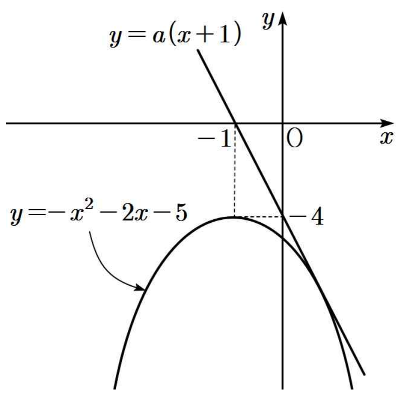
두 근의 곱 : $a^2 + 2a - 3 = (a+3)(a-1) < 0 \quad \therefore\ -3 < a < 1$
두 근의 합 : $-a > 0$
$\therefore\ a = -2,\ -1$

41) 정답 $a \leq -4$

두 근중 적어도 하나가 양수이므로 실근을 갖는다.
ⅰ) 판별식 $D = (a+2)^2 - 4(a+5) \geq 0$
정리하면 $a \geq 4$ 또는 $a \leq -4$
ⅱ) 축의 방정식 $x = -\dfrac{a+2}{2} \geq 0$이면 두 근중 큰 근이 무조건 양수가 되므로 $a \leq -2$
ⅲ) 축의 방정식 $x = -\dfrac{a+2}{2} < 0$이면 y절편이 음수이어야 한다.
그러므로 $a + 5 < 0 \rightarrow a < -5$ (가정에 모순)
따라서 축의 방정식은 0보다 크거나 같고 실근을 가지면 된다.
ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 a의 범위는 $a \leq -4$

[다른 풀이]

준 식을 a에 대하여 다음과 같이 정리하자.
$a(x+1) = -x^2 - 2x - 5$
오른쪽 그림에서 두 그래프가 접할 때 양의 근이 하나 생기고 접할 때보다 기울기가 작아도 $x > 0$범위에서 교점이 반드시 하나 생긴다.
$x^2 + (a+2)x + a + 5 = 0$의 판별식
$D = (a+2)^2 - 4(a+5) = a^2 - 16 = 0$
$a < 0$이므로 $a = -4$
따라서 $a \leq -4$인 경우에 적어도 하나의 양근을 갖게 된다.



42) 정답 ②

$y = x^2 - 6x + 3k$라 하면 축의 방정식은 $x = 3$
서로 다른 두 근이 존재해야 하므로 판별식> 0이므로 $3k < 9$
$\therefore\ k < 3$
또한 $x = 1$일 때의 함숫값> 0를 만족하면 된다.
$\therefore\ 1 - 6 + 3k > 0 \rightarrow k > \dfrac{5}{3}$
따라서 k의 범위는 $\dfrac{5}{3} < k < 3$

43) 정답 $-1 \le \alpha < 3$

$x^3+(1-2\alpha)x^2+(\alpha^2-\alpha+1)x-\alpha=(x-\alpha)\{x^2+(1-\alpha)x+1\}=0$

$x^2+(1-\alpha)x+1=0$

$D=(1-\alpha)^2-4=\alpha^2-2\alpha-3<0$

$\therefore\ -1<\alpha<3$

$x=\alpha$의 중근

$x^2+(1-\alpha)x+1=(x-\alpha)^2$에서

$1-\alpha=-2\alpha,\ \alpha^2=1 \qquad \therefore\ \alpha=-1$

$-1 \le \alpha < 3$

44) 정답 $-2<k<\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}<k$

준식을 k에 대하여 정리하면

$-2(x-1)k+x(x+4)(x-1)=0$

인수분해 하면

$(x-1)(x^2+4x-2k)=0$

서로 다른 세 실근을 가져야 하므로

$x^2+4x-2k=0$의 판별식>0이 되어야 한다.

$\frac{D}{4}=4+2k>0,\ \therefore\ k>-2$

또한 $x^2+4x-2k=0$이 $x\ne 1$이어야 하므로 $k\ne\frac{5}{2}$이다.

따라서 k의 범위는 $-2<k<\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}<k$

45) 정답 $S=\sqrt{15}$

$f(x)=x^3-10x^2+(a+16)x-2a$로 놓으면

$f(2)=8-40+2a+32-2a=0$

이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -10 & a+16 & -2a \\ 2 & & 2 & -16 & 2a \\ \hline & 1 & -8 & a & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore\ f(x)=(x-2)(x^2-8x+a)=0$

$\therefore\ (x-2)(x^2-8x+a)=0$

$\therefore\ x=2$ 또는 $x^2-8x+a=0$

주어진 방정식의 세 근이 어떤 이등변삼각형의 세 변의 길이가 되므로 한 변의 길이는 1이고, 나머지 두 변의 길이는 다음과 같은 경우로 나누어생각할 수 있다.

(ⅰ) 길이가 같은 두 변의 길이가 각각 2이고 나머지 한 변의 길이를 α라 하면 $x^2-8x+a=0$의 두 근은 $2,\ \alpha$이다.

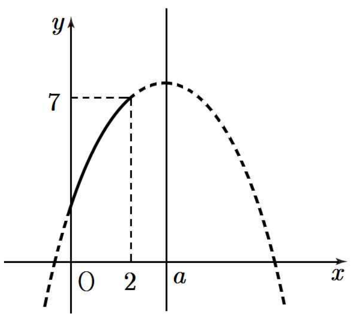
따라서 근과 계수의 관계에 의해 $2+\alpha=8$

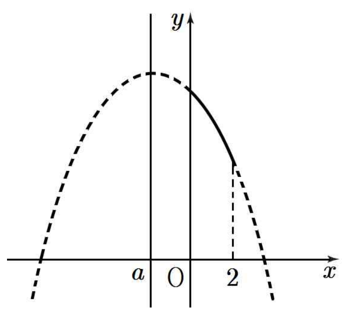
따라서 나머지 한 변의 길이 $\alpha=6$

그런데 삼각형의 결정조건에 의해 가장 긴 변의 길이가 나머지 두 변의 합보다 작아야 하므로 $6<2+2$가 되어야 하므로 모순!

(ii) 길이가 같은 두 변의 길이가 α이고 나머지 한 변의 길이가 2라 하면 $x^2-8x+a=0$은 중근 α를 갖는다.
따라서 근과 계수의 관계에 의해 $2\alpha=8$
따라서 길이가 같은 두 변의 길이는 각각 4이고 나머지 한 변의 길이는 2이다. 또한 이 경우는 삼각형의 결정 조건을 만족한다.
따라서 이 이등변삼각형의 넓이를 구하면
$h=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$
$S=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{15}=\sqrt{15}$

46) 정답 ②

$0\le x\le 2$에서 $y=-(x-a)^2+8$의 최댓값이 7
ⅰ) $a>2$일 때,
$7=-4+4a-a^2+8$
$a^2-4a+3=0 \quad \therefore\ a=3\ (a>2)$
ⅱ) $a<0$일 때,
$7=-a^2+8$
$a^2=1$
$\therefore\ a=-1 \quad (a<0)$
$\therefore\ 3-1=2$
ⅲ) $0\le a<2$일 때,
$x=a$일 때, 최댓값 8이므로 성립 안함
ⅰ)


ⅱ)


47) 정답 ②

$f(x)=-(x^2-2kx)+k+4$
$=-(x-k)^2+k^2+k+4$
(i) $k<1$ 일 때,
꼭짓점의 x좌표 k가 $1\le x\le 4$에 속하지 않으므로 주어진 이차함수는 $x=1$에서 최댓값 4를 갖는다.
$f(1)=-1+2k+k+4=3k+3=4$
$\therefore\ k=\frac{1}{3}\ (\because\ k<1)$
(ii) $1\le k\le 4$일 때,
꼭짓점의 x좌표 k가 $1\le x\le 4$에 속하므로 주어진 이차함수는 $x=k$에서 최댓값 4를 갖는다.
$f(k)=k^2+k+4=4$
$k^2+k=k(k+1)=0$
$k=-1,\ 0$이므로 조건 $1\le k\le 4$에 모순.
(iii) $k>4$ 일 때,

꼭짓점의 x좌표 k가 $1 \le x \le 4$에 속하지 않으므로 주어진 이차함수는 $x=4$에서 최댓값 4를 갖는다.

$f(4)=-16+8k+k+4=4$

$9k=16$

$k=\dfrac{16}{9}$이므로 조건 $k>4$에 모순

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 $k=\dfrac{1}{3}$이므로 모든 k값의 곱은 $\dfrac{1}{3}$이다.

48) 정답 ④

$f(x)=x^2-3x+3$이라 하자.

① $b<\dfrac{3}{2}$일 때, $x=a$일 때 최댓값 b, $x=b$일 때 최솟값 a

$\begin{cases} b=a^2-3a+3 \\ a=b^2-3b+3 \end{cases}$, 연립하여 정리하면 $a+b=2$

$b=a^2-3a+3$에 $b=2-a$를 대입하여 정리하면 $a=b=1$

$a \ne b$이므로 모순

② $a>\dfrac{3}{2}$일 때, $x=a$일 때 최솟값 a, $x=b$일 때 최댓값 b

$\begin{cases} a=a^2-3a+3 \\ b=b^2-3b+3 \end{cases}$, 연립하여 정리하면 $a+b=4$

$a=a^2-3a+3$에 $b=4-a$를 대입하여 정리하면 $a=1$, $b=3$

$a>\dfrac{3}{2}$이므로 모순

③ $a \le \dfrac{3}{2}<b$일 때, $x=\dfrac{3}{2}$일 때 최솟값 a,

$y=x^2-3x+3=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$이므로 $a=\dfrac{3}{4}$

④ $x=a$일 때 최댓값 b를 갖는다고 하면 $f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{21}{16}=b$

⑤ $x=b$일 때 최댓값 b를 갖는다고 하면 $b=b^2-3b+3$

$b^2-4b+3=0$, $\dfrac{3}{2}<b$이므로 $b=3$

④, ⑤에서 최댓값 $b=3$

①, ②, ③에서 $a=\dfrac{3}{4}$, $b=3$이므로 $4a+b=6$

49) 정답 ⑤

주어진 함수 $f(x)$는

$$f(x)=x^2+2mx-2m+3=(x+m)^2-m^2-2m+3$$

이므로

ⅰ) $0<-m<4$ 일 때, $-4<m<0$ 이고

$f(-m)=-m^2-2m+3>0$

$\rightarrow \quad (m+3)(m-1)<0 \quad \rightarrow \quad -3<m<1$

이면 $0 \le x \le 4$ 인 모든 실수 x 에 대하여 항상 $f(x)>0$ 이 성립한다. 즉, $-3<m<0$ 이다.

ⅱ) $-m \le 0$ 또는 $-m \ge 4$ 일 때, $m \le -4$ 또는 $m \ge 0$ 이고

$f(0)=-2m+3>0$ 이고 $f(4)=6m+19>0$

$\rightarrow \quad \frac{-19}{6} < m < \frac{3}{2}$

이면 $0 \leq x \leq 4$ 인 모든 실수 x 에 대하여 항상 $f(x) > 0$ 이 성립한다. 즉, $0 \leq m < \frac{3}{2}$ 이다.

이상 ⅰ), ⅱ)에서 구하는 실수 m 의 범위는 $-3 < m < \frac{3}{2}$ 이다.

촌철살인

다시 만나는 개념