촌철살인

다시 만나는 개념

〈수학2〉 4. 지수와 로그



Team SPC

Orbi by move

Orbi Class 인강, 강남점

BLACK BAG



촌철살인 수학 관리자

(최 준 호)

#1-1. 다시 만나는 개념 : 지수와 로그

1. 거듭제곱근 정의 성질

기본 a의 n제곱근

초현실인 1) -64의 세제곱근을 구하여라.

초현실인 2) $\frac{1}{16}$의 네제곱근을 구하여라.

기본 a의 n제곱근 중 실수

촌철살인 3)다음 거듭제곱근 중 실수인 것을 구하여라.

(1) 5의 세제곱근 (2) -5의 세제곱근 (3) 5의 네제곱근 (4) -5의 네제곱근

촌철살인 (고2) 2009. 11 가형. 나형. 24번. 3점

4)임의의 실수 a에 대하여 $N(a,\ n)$을 a의 n제곱근($n \geq 2$) 중 실수인 것의 개수라 정의하자.

이때, 양의 실수 p에 대하여 $\sum_{n=2}^{100} N(-p,\ n)$의 값을 구하시오.

촌철살인 (고2) 2014. 6 A형. 7번. 3점

5)자연수 $n\ (n \geq 2)$에 대하여 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f_n(a)$라 할 때,

$f_2(-3)+f_3(-2)+f_4(5)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1) 양수조건

$a>0, b>0$이고, m, n이 2이상의 자연수일 때

⇨ $\sqrt[n]{a}$와 a^n은 같은 규칙을 따른다.

단지 $\sqrt[n]{a}$의 n은 분모의 역할을 a^n의 n은 분자의 역할을 한다.

① 왔다갔다 : $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

② 제곱근과 제곱 : ②-1) $(a^m)^n = a^{mn}$ ⇨ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

②-2) 분모와 분자처럼 약분과 통분가능 ⇨ $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$

③ 합치기와 분배 : ③-1) $(ab)^n = a^n b^n = (ab)^n$ ⇨ $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

③-2) $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ ⇨ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

참고) $\sqrt{\ } = \sqrt[2]{\ }$ (2만 생략가능) : 예를 들어 $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{2}} = \sqrt[3\times 2]{2} = \sqrt[6]{2}$ 이다.

2) 실수조건 (음수가능)

① 짝수제곱근과 홀수제곱근 - $\sqrt[홀수]{-3} = -\sqrt[홀수]{3}$ 이고 ⇨ $\sqrt[홀수]{-3}$ 은 실수(음수)이다.

- $\sqrt[짝수]{-3} \neq -\sqrt[짝수]{3}$ 이고 ⇨ $\sqrt[짝수]{-3}$ 은 허수이다.

② $(\sqrt[n]{a})^n$과 $\sqrt[n]{a^n}$의 계산 - $(\sqrt[n]{a})^n$은 a의 부호에 상관없이 무조건 a (정의)

- $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & (n\text{이 홀수}) \\ |a| & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$

EX1) $(\sqrt[3]{-3})^3 = -3$

EX2) $(\sqrt[4]{-3})^4 = -3$

EX3) $\sqrt[4]{3^4}$: $\sqrt[4]{3^4} = 3$

EX4) $\sqrt[3]{(-3)^3}$: $\sqrt[3]{(-3)^3} = \sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -\sqrt[3]{3^3} = -3$

EX5) $\sqrt[4]{(-3)^4}$: $\sqrt[4]{(-3)^4} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

기본 제곱근의 성질

초현실인 6) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} \times \sqrt[6]{8}$ 의 값은?

초현실인 7) $a>0$일 때, $\sqrt[5]{\sqrt{a} \times \frac{1}{32\sqrt[3]{a}}} \div \sqrt[3]{\sqrt{a} \times \frac{1}{8\sqrt[5]{a}}} \times \sqrt{\sqrt[3]{a} \times \frac{1}{4\sqrt[5]{a}}}$ 을 간단히 하여라.

거듭제곱근의 성질 2 - 실수와 허수

촌철살인 8)다음 중 실수가 아닌 것은?

□ $\sqrt[3]{-2}$ □ $\sqrt[4]{8}$ □ $\sqrt[3]{-\frac{3}{2}}$ □ $\sqrt[4]{\frac{3}{-2}}$ □ $\sqrt[4]{\frac{-3}{-2}}$

촌철살인 9)다음 중 옳은 것은?

□ $\sqrt[3]{-7} = -\sqrt[3]{7}$ □ $\sqrt[4]{-7} = -\sqrt[4]{7}$ □ $\sqrt[3]{-8} = 2$

□ $\sqrt[4]{(-2)^4} = -2$ □ $\sqrt[3]{(-2)^4} = -\sqrt[3]{2^4}$

촌철살인 (고2) 2009. 11 나형. 6번. 3점

10)두 실수 a, b에 대하여 거듭제곱근의 성질로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $ab \neq 0$)

<보기>

ㄱ. $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ ㄴ. $\sqrt[4]{(ab)^2} + \sqrt[4]{(-ab)^2} = 0$ ㄷ. $\sqrt[5]{(ab)^2} = \sqrt[5]{a^2}\sqrt[5]{b^2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

촌철살인 (고2) 2009. 6 가형. 8번. 3점

11)집합 $X=\{-2,\ -1,\ 1,\ 2\}$에 대하여 두 집합 $A,\ B$를

$A=\{\sqrt{x}\,|x\in X,\ \sqrt{x}$는 실수$\}$

$B=\{\sqrt[3]{x}\,|x\in X,\ \sqrt[3]{x}$는 실수$\}$

라 하자. 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 곱은?

① $2^{\frac{1}{2}}$ ② $2^{\frac{2}{3}}$ ③ $2^{\frac{5}{6}}$ ④ 2 ⑤ $2^{\frac{7}{6}}$

촌철살인 12)다음 설명 중 옳은 것은?

① 64의 세제곱근은 $\sqrt[3]{64}$뿐이다.

② -8의 세제곱근 중 실수인 것은 없다.

③ 8의 네제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[4]{8}$이다.

④ n이 홀수일 때, 3의 n제곱근 중 실수인 것은 한 개.

⑤ n이 짝수일 때, -4의 n제곱근 중 실수인 것은 두 개이다.

촌철살인 13)다음 중 옳은 것은?

□ $a<0$일 때, $(\sqrt[3]{-a})^3=a$이다.

□ $\sqrt{(-4)^2}$의 제곱근은 4이다.

□ 16의 네제곱근인 실수는 2뿐이다.

□ n이 짝수일 때, 2의 n제곱근인 실수는 $\pm\sqrt[n]{2}$이다.

□ n이 홀수일 때, $x^n=a$를 만족하는 실근은 n개 이다.

2. 확장된 지수법칙

1. 지수가 자연수일 때 지수법칙과 지수의 확장

1) 지수가 자연수일 때 지수법칙

a, b가 실수이고, m, n이 자연수일 때,

① $a^m a^n = a^{m+n}$ ② $a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n) \end{cases}$ (단, $a \neq 0$) ③ $(a^m)^n = a^{mn}$ ④ $(ab)^m = a^m b^m$

1) 지수를 정수로 확장

$a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n) \end{cases}$ 에서 m과 n의 크기에 상관없이 $a^m \div a^n = a^{m-n}$로 정한다.

⇨ $a^0 = 1$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$로 정의될 수밖에 없다.

3) 지수를 유리수로 확장

$(\sqrt[n]{a})^n = a$라는 사실에서 $\sqrt[n]{a}$을 지수로 표현할 수 있다고 가정 + $(a^m)^n = a^{mn}$의 지수법칙이 성립한다고 가정.

⇨ $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$으로 정의될 수밖에 없다.

즉, $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

4) 지수를 무리수로 확장

지수가 $\sqrt{2}$, π등의 무리수인 경우에도 지수법칙이 성립한다. 이 부분은 따로 필요한 설명도 없다.

증명도 없다. 그냥 받아들여야 할 뿐이다. ⇨ 2^{π}, $2^{\sqrt{2}}$와 같은 무리수 지수는 그대로 둔다.

2. 확장된 지수법칙과 지수계산의 원칙

1) 음수 지수 : 밑의 역수

① $a^0 = 1$

② $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$, $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{-n}$

2) 분모 지수 : 거듭제곱근

① $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

② $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

3) 확장된 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고, m, n이 실수일 때,

① $a^m a^n = a^{m+n}$ ② $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ③ $(a^m)^n = a^{mn}$ ④ $(ab)^m = a^m b^m$

기본 확장된 지수법칙

촌철살인 14)2009. 7. 나형(89%). 18번. 3점

$a>0$, $a\neq 1$에 대하여 $\left\{\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}}\times\sqrt{\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-4}}\right\}^6=a^k$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

촌철살인 15)2004. 4. 나형(82%). 18번. 3점

$(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}}\div a^3\times(\sqrt[3]{a})^6=a^k$ 일 때, k의 값을 구하시오. (단, $a>0$, $a\neq 1$)

다항식의 연산

촌철살인 16)2012. 3. 나형(77%). 23번. 3점

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=10$을 만족시키는 양수 a에 대하여 $a+a^{-1}$의 값을 구하시오.

촌철살인 17)$x>0$이고 $x^2+x^{-2}=34$일 때, $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}}{x+x^{-1}}$의 값을 구하여라.

촌철살인 18) $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}=4$, $x=a+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$, $y=b+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$일 때, $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}$의 값을 구하여라.

촌철살인 19)2004. 4. 나형(70%). 6번. 3점

$x=2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}}$일 때, $\sqrt{x^2-4}+x$의 값은?

촌철살인 20) $x=\sqrt[4]{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$일 때, $2(x+\sqrt{x^2-4})$ 의 값은?

촌철살인 21) $x=\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{n}}-a^{-\frac{1}{n}})$일 때, $(x+\sqrt{1+x^2})^n$의 값을 a로 나타내어라. (단, $a>0$)

음수지수 처리법

촌철살인 22) $f(x)=\dfrac{1+x+x^2+\cdots+x^{10}}{x^{-2}+x^{-3}+\cdots+x^{-12}}$ 일 때, $f(\sqrt[6]{2})$의 값은?

촌철살인 (고2) 2005. 11 가형. 나형. 24번. 3점

23) $a^{8x}=3+\sqrt{8}$ 일 때, $\dfrac{a^x+a^{2x}+a^{3x}}{a^{-x}+a^{-2x}+a^{-3x}}=m+\sqrt{n}$ 을 만족하는 유리수 m , n 에 대하여 $100m+n$ 의 값을 구하시오. (단, $a>0$)

이중근호

촌철살인 24) $2^x=(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}})^{\frac{1}{3}}$을 만족시키는 x의 값을 구하여라.

3. 로그의 성질

〈로그의 정의〉

촌철살인 25)방정식 $\log_4(\log_2 x)=1$을 만족시키는 x의 값을 구하시오.

〈로그의 정의를 이용하여 구하기〉

촌철살인 26)로그의 정의를 이용하여 다음 값을 구하여라.

(1) $\log_4 16$ (2) $\log_4 2$ (3) $\log_{\frac{1}{4}} 8$ (4) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{2}$

〈정의를 이용하여 판단해보기〉

촌철살인 27)다음 표현 중 옳은 것은?

☐ $\log_1 0=0$ ☐ $\log_1 1=1$ ☐ $\log_1 2=1$ ☐ $\log_2 10=3$ ☐ $\log_{100} 1=0$

〈로그가 정의될 조건〉

촌철살인 28) $\log_{(x-3)}(-x^2+11x-24)$가 정의되기 위한 모든 정수 x의 합을 구하시오.

촌철살인 29) 2006. 3. 가형(48%). 나형(28%) 26번. 3점

실수 a 의 값에 관계없이 로그가 정의될 수 있는 것을 〈보기〉에서 모두 고른 것은?

〈보 기〉
ㄱ. $\log_{a^2-a+2}(a^2+1)$ ㄴ. $\log_{2\lvert a\rvert+1}(a^2+1)$ ㄷ. $\log_{a^2+2}(a^2-2a+1)$

〈선행공식과 성질공식〉

촌철살인 30) 2012. 3. 가형(93%) 나형(88%). 1번. 2점

$\frac{1}{2}\log_3 6-\log_9 2$의 값은?

촌철살인 31) $\log_3\sqrt{6}-3\log_9 2+\log_3 2$의 값은?

촌철살인 (고2) 2009. 9 나형. 5번. 3점

32)1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여, a^2은 b의 세제곱근이고 c^3은 b의 네제곱근이다.

$\log_a b+\log_b c=\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

① 81 ② 82 ③ 83 ④ 84 ⑤ 85

〈밑 변환 공식의 원리 : 몫의 공식, 역수공식, 소거공식, 밑 교환 공식〉

촌철살인 33)2006. 11. 나형(68%). 8번. 3점

1보다 큰 세 실수 a, b, c에 대하여 $\log_a c$: $\log_b c=2$: 1일 때, $\log_a b+\log_b a$의 값은?

촌철살인 34)2006. 3. 가형(94%). 나형(85%). 18번. 3점

등식 $\frac{1}{\log_3 2}+\frac{1}{\log_5 2}+\frac{1}{\log_6 2}=\frac{1}{\log_k 2}$이 성립할 때, 상수 k의 값을 구하시오.

촌철살인 35)2007. 7. 나형(~%). 18번. 3점

$\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8}$의 값을 구하시오.

촌철살인 36)2007. 3. 가형(91%). 나형(84%). 2번. 2점

$\log_2(\log_2 3)+\log_2(\log_3 4)$의 값은?

〈정의 공식〉

촌철살인 2014. 7. A형(67%). 17번. 4점

37)$a>1$인 실수 a에 대하여 $a^{\log_5 16}$이 $2^n\,(n=1,2,3,\cdots)$이 되도록 하는 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, k번째 수를 a_k라 하자. $\sum_{k=1}^{40}\log_5 a_k$의 값은?

① 185 ② 190 ③ 195 ④ 200 ⑤ 205

촌철살인 (고2) 2005. 6 가형. 나형. 7번. 3점

38)세 양수 A, B, C에 대하여 $A:B:C=4:5:2$일 때, $3^{2\log_3 A+\log_3 B-3\log_3 C}$의 값은?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

〈두 가지 표현법〉

촌철살인 2013. 3. A형(77%). 12번 3점

39)두 실수 x, y에 대하여 $75^x=\frac{1}{5}$, $3^y=25$일 때, $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

촌철살인 (고2) 2012. 11 A형. 6번. 3점

40)두 실수 a, b가 $2^{2a+b}=27$, $4^{a-3b}=\frac{1}{25}$을 만족시킬 때, 2^{3a-2b}의 값은?

① $\frac{18}{5}$ ② $\frac{21}{5}$ ③ $\frac{24}{5}$ ④ $\frac{27}{5}$ ⑤ 6

〈비례상수의 활용〉

촌철살인 41)0이 아닌 세 실수 a, b, c가 $\frac{a+b}{4}=\frac{b+c}{7}=\frac{c+a}{9}$ 를 만족시킬 때, $\left(2^a\times 2^b\right)^{\frac{1}{c}}$의 값은?

촌철살인 42)세 양수 a, b, c가 $a^x=b^{2y}=c^{3z}=7$, $abc=49$를 만족할 때, $\frac{6}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{z}$의 값은?

촌철살인 43) 1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여 $a=b^2=c^3$이 성립할 때, $\log_a b+\log_b c+\log_c a$의 값은?

촌철살인 2013. 7 A형(50%). 26번. 4점

44) 0이 아닌 세 실수 α, β, γ가 이 순서대로 등차수열을 이룬다. $x^{\frac{1}{\alpha}}=y^{-\frac{1}{\beta}}=z^{\frac{2}{\gamma}}$일 때, $16xz^2+9y^2$의 최솟값을 구하시오. (단, x, y, z는 1이 아닌 양수이다.)

#1-2. 지수와 로그 MAP

1) 해설) $x^3=-64 \Leftrightarrow x^3+64=0 \Leftrightarrow (x+4)(x^2-4x+16)=0$ 즉, $-4, 2\pm 2\sqrt{3}i$

2) 해설) $x^4=\frac{1}{16} \Leftrightarrow x^4-\frac{1}{2^4}=0 \Leftrightarrow \left(x^2+\frac{1}{2^2}\right)\left(x^2-\frac{1}{2^2}\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^2+\frac{1}{2^2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$ 즉, $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}i$

3) 해설) 실수인 근을 찾는 것은 인수분해가 필요 없다. 그래프를 떠올려서 바로 답을 적는다.
(1) $\sqrt[3]{5}$ (2) $-\sqrt[3]{5}$ (3) $\pm\sqrt[4]{5}$ (4) 없다.

4) 정답 49
4) 정답 49
$-p$가 음수이므로 n이 짝수일 때, $N(-p,\ n)=0$
n이 홀수일 때, $N(-p,\ n)=1$, $\sum_{n=2}^{100} N(-p,\ n)=49$

5) 정답 ③
5) 정답 ③
-3의 거듭제곱근 중 실수는 없으므로 $f_2(-3)=0$이다.
-2의 세제곱근 중 실수는 $\sqrt[3]{-2}$ 오직 한 개이므로
$f_3(-2)=1$이다.
5의 네제곱근 중 실수는 $\sqrt[4]{5}$, $-\sqrt[4]{5}$로 두 개이므로
$f_4(5)=2$이다.
따라서 $f_2(-3)+f_3(-2)+f_4(5)=3$이다.

6) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\times\sqrt[6]{8}=\sqrt[3]{\sqrt{2^3}}\times\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{2^3}\times\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$

7) 해설) $\sqrt[5]{\sqrt{a}\times\frac{1}{32\sqrt[3]{a}}}\div\sqrt[3]{\sqrt{a}\times\frac{1}{8\sqrt[5]{a}}}\times\sqrt{\sqrt[3]{a}\times\frac{1}{4\sqrt[5]{a}}}=\frac{\sqrt[10]{a}}{\sqrt[5]{32}\sqrt[15]{a}}\div\frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{8}\sqrt[15]{a}}\times\frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt{4}\sqrt[10]{a}}$
$=\frac{\sqrt[10]{a}}{2\sqrt[15]{a}}\times\frac{2\sqrt[15]{a}}{\sqrt[6]{a}}\times\frac{\sqrt[6]{a}}{2\sqrt[10]{a}}=\frac{1}{2}$

8) 해설) □과 □은 홀수제곱근 안에 음수가 있으므로 마이너스 기호는 얼마든지 밖으로 나올 수 있고 이것은 〈실수〉이다. □은 짝수제곱근 안에 양수가 있으므로 〈실수〉이다. □은 지수제곱근 안을 계산할 경우 $\sqrt[4]{\frac{3}{2}}$와 마찬가지이므로 〈실수〉이다. 정답은 짝수제곱은 안에 음수가 있는 □이다.

9) 해설) □의 좌변은 〈허수〉, 우변은 〈실수〉이다. □ $\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-2$ □ $\sqrt[4]{(-2)^4}=\sqrt[4]{2^4}=2$
□ $\sqrt[3]{(-2)^4}=\sqrt[3]{2^4}$ 즉, 정답은 □

10) 정답 ③
10) 정답 ③
ㄱ. $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ (참)

ㄴ. $\sqrt[4]{(ab)^2}=\sqrt[4]{(-ab)^2}$ 이므로 $\sqrt[4]{(ab)^2}+\sqrt[4]{(-ab)^2}=2\sqrt[4]{(ab)^2}$
(거짓)

ㄷ. $\sqrt[5]{(ab)^2}=(ab)^{\frac{2}{5}}=a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{a^2}\sqrt[5]{b^2}$ (참)

11) 정답 ⑤

11) 정답 ⑤

$A=\{1,\sqrt{2}\}$, $B=\{\sqrt[3]{-2},\sqrt[3]{-1},1,\sqrt[3]{2}\}$이므로
$A\cup B=\{\sqrt[3]{-2},\sqrt[3]{-1},1,\sqrt[3]{2},\sqrt{2}\}$
(모든 원소의 곱)$=-2^{\frac{1}{3}}\times(-1)\times1\times2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{7}{6}}$

12) 해설) ① 64의 세제곱근은 방정식 $x^3=64$의 근이므로 3개이다.
② -8의 세제곱근 중 실수인 것은 -2이다.
③ 8의 네제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[4]{8}$ 이다.
⑤ n이 짝수일 때, -4의 n제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않는다.
정답은 ④

13) 해설) □ a의 부호에 상관없이 $(\sqrt[3]{-a})^3=-a$이다.
□ $\sqrt{(-4)^2}=4$이므로 4의 제곱근은 $x^2=4$이고 $x=\pm2$이다.
□ 그래프를 생각하면 16의 네제곱근인 실근은 ±2
□ n이 홀수일 때, $x^n=a$를 만족하는 실근은 1개
정답은 ④

14) 해설) $a>0$, $a\neq1$인 a에 대하여, $\left\{\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[3]{\sqrt{a^4}}}\times\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^{-4}}\right\}^6=\left(a^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}+2}\right)^6=\left(a^{\frac{17}{6}}\right)^6=a^{17}$ $\therefore\ k=17$

15) 해설) $(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}}\div a^3\times(\sqrt[3]{a})^6=a^6\div a^3\times a^2=a^6\times\frac{1}{a^3}\times a^2=a^5$ 정답은 5

16) 해설) $\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=a+2+a^{-1}$이므로 $a+a^{-1}=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2-2=100-2=98$

17) 해설) $(x+x^{-1})^2=x^2+x^{-2}+2=34+2=36$에서 $x+x^{-1}=6$ $(\because\ x+x^{-1}>0)$
또 $(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+x^{-1}+2=6+2=8$에서 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}\ (\because\ x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}>0)$
$\therefore\ \frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}}{x+x^{-1}}=\frac{2\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

18) 해설) $x+y=a+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b=\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^3$
$x-y=a-3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}-b=\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)^3$
즉, $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)^2=2\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)=8$ 정답은 8

19) 해설) $x^2-4=\left(2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}}\right)^2$ 이므로 $\sqrt{x^2-4}+x=\left(2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}}\right)+\left(2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}}\right)=2\times2^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{5}{4}}$

20) 해설) $x=\sqrt[4]{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, 즉 $x=2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}}$의 양변을 제곱하면 $x^2=2^{\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}+2$

$\therefore\ x^2-4=2^{\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}-2=(2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}})^2$

$\therefore\ 2(x+\sqrt{x^2-4})=2\left\{2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}}+\sqrt{(2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}})^2}\right\}=2(2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}})\quad=2\cdot2\cdot2^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{9}{4}}$

21) 해설) $x^2+1=\frac{1}{4}\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{-\frac{1}{n}}\right)^2+1\ =\ \frac{1}{4}\left\{\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{-\frac{1}{n}}\right)^2+4\right\}\ =\ \frac{1}{4}\left\{\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{-\frac{1}{n}}\right)^2+4a^{\frac{1}{n}}a^{-\frac{1}{n}}\right\}\ =\ \frac{1}{4}\left(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}\right)^2$

즉, $(x+\sqrt{1+x^2})^n\ =\ \left\{\frac{1}{2}\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{-\frac{1}{n}}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}\right)^2}\right\}^n\ =\ \left\{\frac{1}{2}\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{-\frac{1}{n}}\right)+\frac{1}{2}\left(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}\right)\right\}^n$

$=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n\ =\ a$ 정답은 a

22) 해설) 분모와 분자에 x^{12}을 곱하면 $\frac{(1+x+x^2+\cdots+x^{10})x^{12}}{(x^{-2}+x^{-3}+\cdots+x^{-12})x^{12}}\ =\ \frac{(1+x+x^2+\cdots+x^{10})x^{12}}{x^{10}+x^9+x^8+\cdots+1}\ =\ x^{12}$

즉, $f(x)=x^{12}$ 그러므로 $f(\sqrt[6]{2})=(\sqrt[6]{2})^{12}=4$ 정답은 4

23) 정답 102

분자, 분모에 a^{4x}을 곱하면

$\frac{a^{4x}(a^x+a^{2x}+a^{3x})}{a^x+a^{2x}+a^{3x}}=a^{4x}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$ 에서

$m=1$, $n=2$이므로 $\therefore\ 100m+n=102$

24) 해설) $(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}})^{\frac{1}{3}}\ =\ \left(\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}-\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\ =\ \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

$=\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\ =\ (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\ =\ 2^{\frac{1}{6}}$ 정답은 $\frac{1}{6}$

25) 해설) 간단한 로그의 정의를 이용하면 $\log_4(\log_2 x)=1\ \Leftrightarrow\ \log_2 x=4^1\ \Leftrightarrow\ x=2^4$ 즉, $x=16$

26) 해설) <정의를 이용해서 푼다.>는 것은 $\log$로 표현되어 있는 숫자를 x라고 둔 후, 로그의 정의를 이용하여 지수로 표현해서 푸는 것을 말한다.

(1) $\log_4 16=x\ \Leftrightarrow\ 16=4^x\ \Leftrightarrow\ x=2$ (2) $\log_4 2=x\ \Leftrightarrow\ 2=4^x\ \Leftrightarrow\ 2^1=2^{2x}\ \Leftrightarrow\ x=\frac{1}{2}$

(3) $\log_{\frac{1}{4}}8=x\ \Leftrightarrow\ 8=\left(\frac{1}{4}\right)^x\ \Leftrightarrow\ 2^3=2^{-2x}\ \Leftrightarrow\ x=-\frac{3}{2}$

(4) $\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{2}=x\ \Leftrightarrow\ \sqrt{2}=\left(\frac{1}{4}\right)^x\ \Leftrightarrow\ 2^{\frac{1}{2}}=2^{-2x}\ \Leftrightarrow\ x=-\frac{1}{4}$

27) 해설) 밑 조건과 진수조건을 만족하는 것은 ④, ⑤이고, 이중에서 로그의 정의를 통해서 표현했을 때, ④은 $10=2^3$이므로 성립하는 식이 아니다. 즉, 정답은 ⑤이다.

28) 해설) 밑 $x-3>0$이고 $x-3\neq1$이므로 $3<x<4$ 또는 $x>4$이다. 진수 $-x^2+11x-24>0$이므로 $3<x<8$이다. 두 조건을 동시에 만족하는 정수는 5, 6, 7이다. $\therefore\ 5+6+7=18$

29)

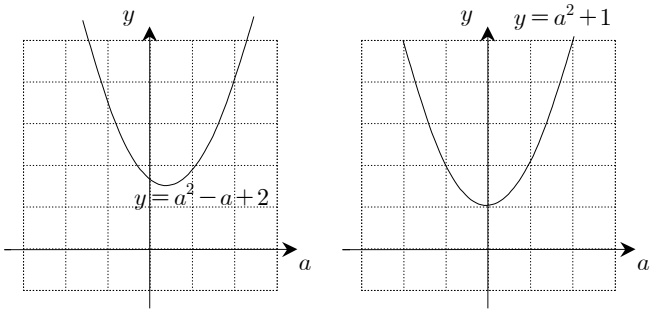
해설) 그래프의 치역을 관찰한다.

ㄱ. 오른쪽 그림에서 치역을 관찰하여 범위를 구한다.

밑의 조건 : $a^2-a+2 \geq \frac{7}{4}$

진수의 조건 : $a^2+1 \geqq 1$

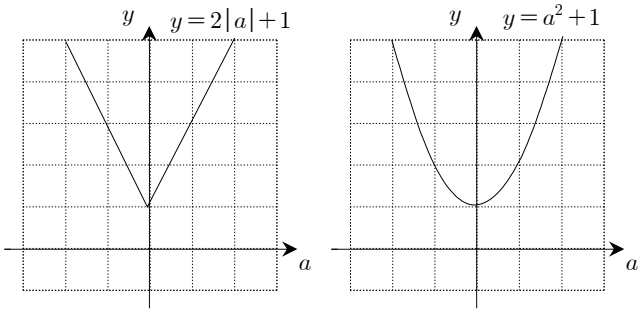
따라서 항상 로그를 정의할 수 있다.



ㄴ. 오른쪽 그림에서 $2|a|+1 \geq 1$이므로

(반례) $a=0$일 때 밑은 $2|a|+1=1$이므로

로그를 정의 할 수 없다.

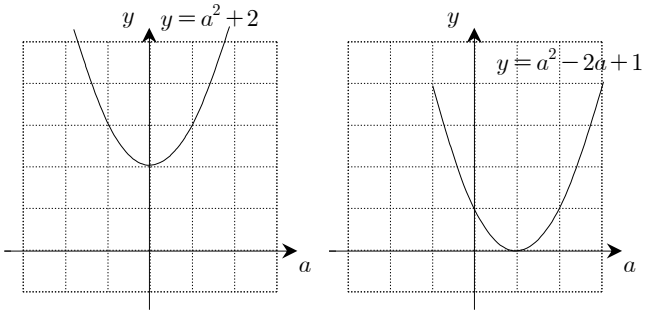


ㄷ. 오른쪽 그림에서 $a^2-2a+1 \geq 0$이므로

(반례) $a=1$일 때 진수는 $a^2-2a+1=0$이므로

로그를 정의 할 수 없다.

따라서 항상 로그를 정의할 수 있는 것은 ㄱ뿐이다.



30) 해설) $\frac{1}{2}\log_3 6-\log_9 2=\frac{1}{2}\log_3 6-\frac{1}{2}\log_3 2 =\frac{1}{2}(\log_3 6-\log_3 2) =\frac{1}{2}\log_3 \frac{6}{2} =\frac{1}{2}\log_3 3=\frac{1}{2}$

31) 해설) 로그끼리 더해져 있거나 빼져있는 경우 <선행공식>으로 <밑과 log앞 계수>를 맞추고 <성질공식>을 적용.

$$\log_3 \sqrt{6}-3\log_9 2+\log_3 2 = \frac{1}{2}\log_3 6-\frac{3}{2}\log_3 2+\log_3 2 = \frac{1}{2}\log_3 6-\frac{1}{2}\log_3 2$$

$$= \log_3 \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

32) 정답 ⑤

32) 정답 ⑤

a^2은 b의 세제곱근이므로 $(a^2)^3=b \ \therefore \ a^6=b$

c^3은 b의 네제곱근이므로 $(c^3)^4=b \ \therefore \ c^{12}=b$

$\log_a b+\log_b c=\log_a a^6+\log_{c^{12}} c=6+\frac{1}{12}=\frac{73}{12}$

$\therefore \ p=12, \ q=73 \ \therefore \ p+q=85$

33) 해설) $\log_a c$: $\log_b c=2:1$ 이므로 $\log_a c=2\log_b c$ 이 때, $\frac{1}{\log_c a}=\frac{2}{\log_c b}$ 이므로 $\frac{\log_c b}{\log_c a}=\log_a b=2$

$\therefore \ \log_a b+\log_b a=\log_a b+\frac{1}{\log_a b}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

34) 해설) $\frac{1}{\log_3 2}+\frac{1}{\log_5 2}+\frac{1}{\log_6 2}=\log_2 3+\log_2 5+\log_2 6 \ =\log_2(3\square 5\square 6) \ =\log_2 90=\frac{1}{\log_{90} 2} \ \therefore k=90$

35) 해설) $\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8}=\log_{\frac{1}{2^2}} 3^{2\log_3 8}=2\log_2 2^6=12$

36) 해설) $\log_2(\log_2 3)+\log_2(\log_3 4) \ =\log_2(\log_2 3\times\log_3 4)=\log_2(\log_2 4) \ =\log_2 2=1$

37) 정답 ⑤

37) 정답 ⑤

$a^{\log_5 16}=16^{\log_5 a}=2^{4\log_5 a}$이므로 $2^{4\log_5 a}=2,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots$

$\log_5 a=\frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \cdots \ \therefore a_1=5^{\frac{1}{4}},\ a_2=5^{\frac{2}{4}},\ a_3=5^{\frac{3}{4}},\ \cdots$

따라서 $\sum_{k=1}^{40}\log_5 a_k=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\ \cdots\ +\frac{40}{4}$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{40(40+1)}{2}=205$

38) 정답 ②

38) 정답 ②

$A=4k, B=5k, C=2k\ (k>0)$ 라고 하면

(준식) $=3^{2\log_3 4k+\log_3 5k-3\log_3 2k}=3^{\log_3 10}=10$

39) 정답 ①

39) 정답 ①

$75=5^{-\frac{1}{x}}$, $3=5^{\frac{2}{y}}$ 이므로 $5^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{75}$, $5^{\frac{2}{y}}=3$ 이다.

$5^{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}}=5^{\frac{1}{x}}\times 5^{\frac{2}{y}}=3\times\frac{1}{75}=\frac{1}{25}=5^{-2} \ \therefore \ \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=-2$

40) 정답 ④

$2^{2a+b}=27$이고, $4^{a-3b}=\frac{1}{25}$에서 $2^{2(a-3b)}=\left(\frac{1}{5}\right)^2$이므로

$2^{a-3b}=\frac{1}{5}$이다. 따라서 $2^{3a-2b}=2^{2a+b}\cdot 2^{a-3b}=\frac{27}{5}$

41) 해설) $\frac{a+b}{4}=\frac{b+c}{7}=\frac{c+a}{9}=k(\neq 0)$라 하면 $a+b=4k$, $b+c=7k$, $c+a=9k$이다.

$\therefore a=3k,\ b=k,\ c=6k$ 따라서, (준식) $=2^{\frac{a+b}{c}}=2^{\frac{4k}{6k}}=2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{4}$

42) 해설) $a=7^{\frac{1}{x}}$, $b=7^{\frac{1}{2y}}$, $c=7^{\frac{1}{3z}}$ 즉, $abc=7^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}} \ \Leftrightarrow \ 49=7^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}} \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}=2$

양변에 6을 곱하면 $\frac{6}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{z}=12$

43) 해설) $a=b^2=c^3=k$라 하면 $a=k$, $b=k^{\frac{1}{2}}$, $c=k^{\frac{1}{3}}$이므로

$$\log_a b+\log_b c+\log_c a = \log_k k^{\frac{1}{2}}+\log_{k^{\frac{1}{2}}} k^{\frac{1}{3}}+\log_{k^{\frac{1}{3}}} k = \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+3=\frac{25}{6}$$

44) 정답 24

44) 정답 24

$x^{\frac{1}{\alpha}}=y^{-\frac{1}{\beta}}=z^{\frac{2}{\gamma}}=k$라고 하면, $x=k^{\alpha}$, $y^{-1}=k^{\beta}$, $z^2=k^{\gamma}$ 이고 α, β, γ가 등차수열이면 $k^{\alpha}, k^{\beta}, k^{\gamma}$가 등비수열이므로

$(k^{\beta})^2=k^{\alpha}k^{\gamma}$ $\therefore$ $(y^{-1})^2=xz^2 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2}=xz^2$

$\therefore$ $16xz^2+9y^2=\frac{16}{y^2}+9y^2 \geq 2\sqrt{\frac{16}{y^2}\square 9y^2} = 24$

(단, 등호는 $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $xz^2=\frac{3}{4}$일 때 성립한다.)

$\therefore$ $16xz^2+9y^2$의 최솟값은 24

촌철살인

다시 만나는 개념