촌철살인

다시 만나는 개념

<기하와 벡터> 1. 이차곡선

Team SPC

Orbi by move

Orbi Class 인강, 강남점

BLACK BAG

촌철살인 수학 관리자

(최 준 호)

#1-1. 다시 만나는 개념 : 이차곡선과 자취

1. 포물선과 자취, 자취와 해석

기본 포물선과 자취

촌철살인 1)좌표평면 위의 세 점 $A(5,\ 3)$, $B(1,\ 5)$, $C(1,\ -2)$에 대하여 점 A를 초점으로 하고 직선 BC를 준선으로 하는 포물선이 점 $(a,\ 7)$을 지난다. 상수 a의 값은?

촌철살인 2)원 $(x-2)^2+y^2=1$의 중심을 초점으로 하고, 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이 있다. 이 포물선이 점 $(a,4)$를 지날 때, 상수 a의 값은?

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ $\sqrt{2}$ ☐ $\sqrt{3}$

춘천살인 2014 EBS 수능완성

3)좌표평면 위의 점 $(3,\ a)$를 초점으로 하고 준선의 방정식이 $x=-1$인 포물선이 x축과 만나는 점의 x좌표가 3일 때, 양수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

춘천살인 4)점 $(6,5)$를 지나고 초점이 $(3,1)$이며, 준선이 y축에 평행한 포물선의 방정식은 $4x=ay^2+by+c$ $(a,b,c$는 서로소인 정수)와 $16x=fy^2+gy+h$ $(f,g,h$는 서로소인 정수)이다. 이 때, $a+b+c+f+g+h$의 값을 구하여라.

기본 포물선과 자취의 해석

춘천살인 2014 EBS 수능완성

5)두 포물선 $x^2-2x-4y+1=0$, $y^2+4y-px+4=0$의 초점을 각각 F, F′이라 하자. $\overline{\mathrm{FF'}}=\sqrt{10}$일 때, 양수 p의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

촌철살인 2014 EBS 수능완성

6)두 포물선 $y^2-2y-4x+5=0$, $x^2+mx-4y+n=0$의 두 준선이 각각 서로 다른 포물선의 초점을 지날 때, 두 포물선의 초점 사이의 거리는? (단, m, n은 상수이다.)

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $2\sqrt{3}$

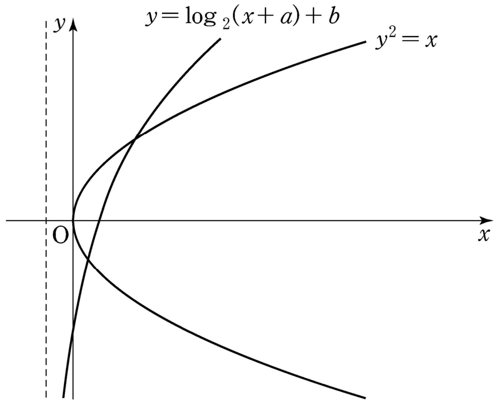
촌철살인 2015 EBS 수능특강

7)포물선 $y^2-4x-2y+17=0$ 위의 점 중에서 초점에 이르는 거리가 5인 두 점을 각각 P, Q라 할 때, 삼각형 POQ의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

촌철살인 2007. 11. 가형(86%). 5번. 3점

8)로그함수 $y=\log_2(x+a)+b$의 그래프가 포물선 $y^2=x$의 초점을 지나고, 이 로그함수의 그래프의 점근선이 포물선 $y^2=x$의 준선과 일치할 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?



① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{13}{8}$ ③ $\frac{9}{4}$ ④ $\frac{21}{8}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

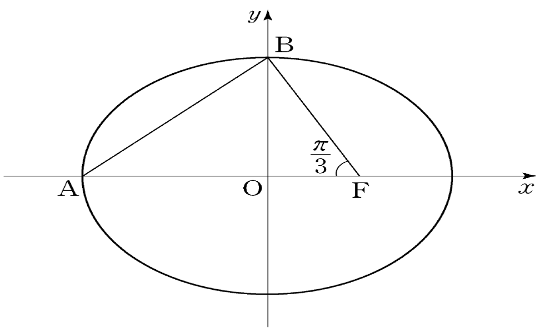
2. 타원과 자취, 자취와 해석

기본 타원과 자취

촌철살인 9)두 점 $F(4,1), F'(-2,1)$로부터의 거리의 합이 10인 자취의 방정식을 구하여라.

촌철살인 2013. 9. B형(90%). 9번. 3점

10)타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 의 한 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$ $(c>0)$,
이 타원이 x 축과 만나는 점중에서 x 좌표가 음수인 점을 A,
y 축과 만나는 점 중에서 y 좌표가 양수인 점을 B 라 하자.
$\angle \mathrm{AFB}=\frac{\pi}{3}$ 이고 삼각형 AFB 의 넓이는 $6\sqrt{3}$ 일 때,
a^2+b^2 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)



① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

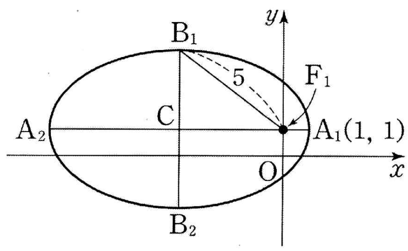
춘천살인 2014 EBS 수능완성

11)두 초점이 $\mathrm{F}(0,\ 4)$, $\mathrm{F}'(0,\ -4)$인 타원 위의 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 삼각형 $\mathrm{FF}'\mathrm{P}$의 둘레의 길이와 넓이가 각각 18, $8\sqrt{2}$일 때, 선분 OP의 길이는? (단, O는 원점이다.)

① $\dfrac{\sqrt{97}}{3}$ ② $\sqrt{11}$ ③ $\dfrac{\sqrt{101}}{3}$ ④ $\dfrac{\sqrt{103}}{3}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{105}}{3}$

춘천살인 2015 EBS 수능특강

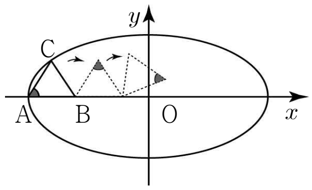
12)그림과 같이 선분$\mathrm{A_1A_2}$가 장축, 선분 $\mathrm{B_1B_2}$가 단축, 중심이 C인 타원 $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}+\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$ 의 한 초점 $\mathrm{F_1}$이 y축 위에 놓인다. 꼭짓점 $\mathrm{A_1}$의 좌표가 $(1,\ 1)$이고, $\overline{\mathrm{B_1F_1}}=5$일 때, 네 상수 $a,\ b,\ m,\ n$에 대하여 $ab+mn$의 값은? (단, 점 C는 제 2 사분면 위의 점이다.)



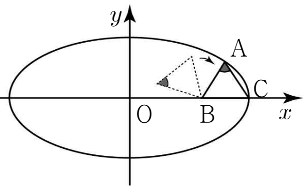
① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

촌철살인 2013. 7. B형(59%). 28번. 4점

13) [그림 1]과 같이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$과 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC가 있다. 변 AB는 x축 위에 있고 꼭짓점 A, C는 타원 위에 있다. 한 변이 x축 위에 놓이도록 정삼각형 ABC를 x축을 따라 양의 방향으로 미끄러짐 없이 회전시킨다. 처음 위치에서 출발한 후 변 BC가 두 번째로 x축 위에 놓이고 꼭짓점 C는 타원 위에 놓일 때가 [그림 2]이다. a^2+3b^2의 값을 구하시오.



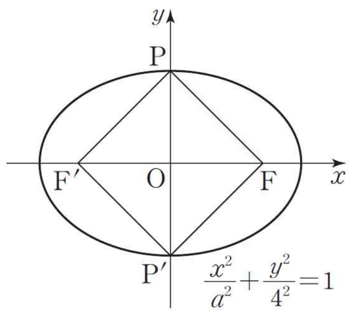
[그림 1]



[그림 2]

촌철살인 2014 EBS 수능완성

14)그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$의 두 초점을 F, $\mathrm{F'}$이라 하고, 이 타원이 y축과 만나는 두 점을 P, $\mathrm{P'}$이라 하자. 사각형 $\mathrm{FPF'P'}$의 넓이가 a^2일 때, a^2의 값은? (단, $a>4$)



① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

기본 타원과 자취의 해석

촌철살인 2015 EBS 수능특강

15)타원 $x^2+5y^2-4x+10y+4=0$의 두 초점을 $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$라 할 때, 삼각형 $\mathrm{OF}_1\mathrm{F}_2$의 넓이는?
(단, O는 원점이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

촌철살인 2014 EBS 수능완성

16)타원 $2x^2+3y^2+12x+6y+15=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니 타원의 중심이 원점이 되었다. $m+n$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 쌍곡선과 자취, 자취와 해석

기본 쌍곡선과 자취

촌철살인 2015 EBS 수능특강

17)두 초점이 $\mathrm{F}(2,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-2,\ 0)$인 쌍곡선이 제1사분면 위의 두 점 $\mathrm{P}(2,\ 3)$, $\mathrm{Q}(k,\ 6)$을 지날 때, 실수 k의 값은?

① $\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{13}$ ④ $\sqrt{14}$ ⑤ $\sqrt{15}$

촌철살인 2015 EBS 수능특강

18)쌍곡선 $\dfrac{x^2}{k}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 위의 점 P와 두 초점 F_1, F_2에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}_1}<\overline{\mathrm{PF}_2}$이고 $\overline{\mathrm{PF}_1}=5$이다.

이 쌍곡선의 점근선의 방정식이 $y=\dfrac{1}{3}x$와 $y=-\dfrac{1}{3}x$일 때, 선분 PF_2의 길이는? (단, k는 상수이다.)

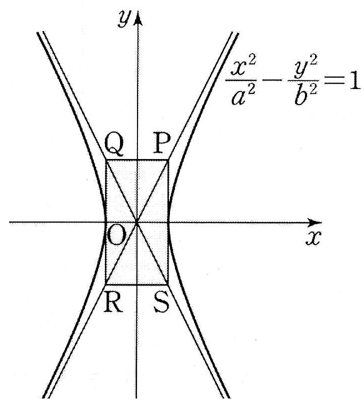
① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

촌철살인 2013. 7. B형(74%). 24번. 3점

19)점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{3}{4}x$ 이고, 한 초점의 좌표가 $(10,\ 0)$인 쌍곡선의 주축의 길이를 구하시오.

촌철살인 2015 EBS 수능특강

20)그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0, b>0)$의 꼭짓점을 지나고 x축에 수직인 직선이 쌍곡선의 점근선과 만나는 네 점을 제1사분면 위의 점부터 제4사분면 위의 점까지 차례로 P, Q, R, S라 하자. $2\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PS}}$이고, 직사각형$\mathrm{PQRS}$에 외접하는 원의 넓이가 20π일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?



① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

기본 쌍곡선과 자취의 해석

촌철살인 2014. 9. B형(80%). 25번. 3점

21)1보다 큰 실수 a에 대하여 타원 $x^2+\frac{y^2}{a^2}=1$의 두 초점과 쌍곡선 $x^2-y^2=1$의 두 초점을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이가 12일 때, a^2의 값을 구하시오.

촌철살인 2014 EBS 수능완성

22)쌍곡선 $5x^2-4y^2=20$의 제 1사분면 위의 점 P와 두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)\ (c>0)$에 대하여 삼각형 PFF′의 둘레의 길이가 22일 때, 선분 PF의 길이는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

촌철살인 2015 EBS 수능특강

23)좌표평면 위에 두 쌍곡선 $C_1 : \dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$, $C_2 : (x-m)^2-\dfrac{y^2}{a^2}=1\ (a>0)$이 있다.

쌍곡선 C_1의 한 점근선과 쌍곡선 C_2의 한 점근선이 점$(3,\ 3)$에서 만난다.

쌍곡선 C_1의 한 초점이 쌍곡선 C_2의 중심이 되도록 두 상수 a, m의 값을 정할 때, $a+m$의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -25 ② -20 ③ -15 ④ -10 ⑤ -5

4. 이차곡선의 도형적 성질 - 이차곡선의 정의

기본 이차곡선의 도형적 성질 - 이차곡선의 정의

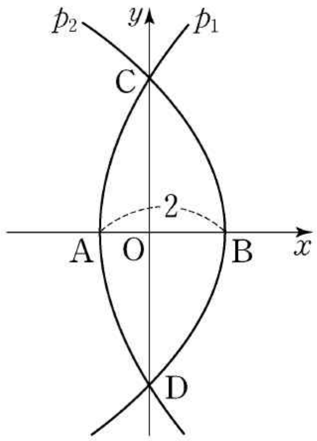
촌철살인 2012. 11. 가형(51%). 18번. 4점

24)자연수 n에 대하여 포물선 $y^2 = \frac{x}{n}$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PF} = 1$이고 $\overline{FQ} = a_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{a_n}$의 값은?

① 210 ② 205 ③ 200 ④ 195 ⑤ 190

촌철살인 2010. 11. 가형(61%). 14번. 4점

25)그림과 같이 좌표평면에서 x축 위의 두 점 A, B에 대하여 꼭짓점이 A인 포물선 p_1과 꼭짓점이 B인 포물선 p_2가 다음 조건을 만족시킨다. 이때, 삼각형 ABC의 넓이는?

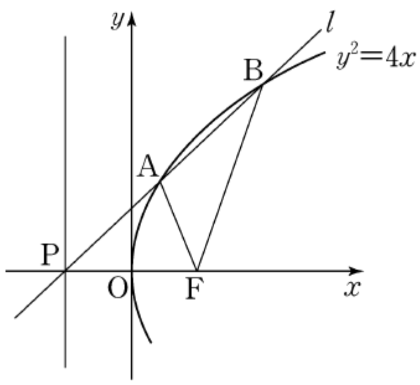


(가) p_1의 초점은 B이고, p_2의 초점은 원점 O이다.
(나) p_1과 p_2는 y축 위의 두 점 C, D에서 만난다.
(다) $\overline{AB}=2$

① $4(\sqrt{2}-1)$ ② $3(\sqrt{3}-1)$ ③ $2(\sqrt{5}-1)$
④ $\sqrt{3}+1$ ⑤ $\sqrt{5}+1$

촌철살인 2012. 6. 가형(73%). 20번. 4점

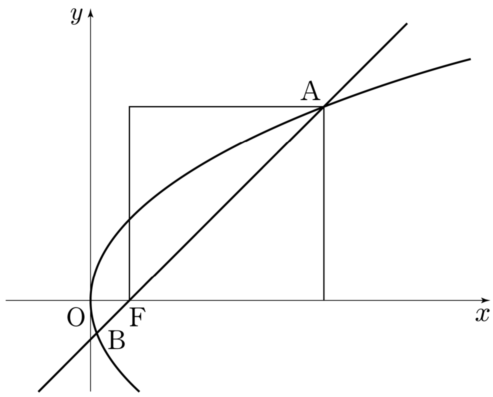
26)포물선 $y^2=4x$의 초점을 F, 준선이 x축과 만나는 점을 P, 점 P를 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B 라 하자. $\overline{FA}:\overline{FB}=1:2$일 때, 직선 l의 기울기는?



① $\frac{2\sqrt{6}}{7}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

촌철살인 2012. 9. 가형(37%). 26번. 4점

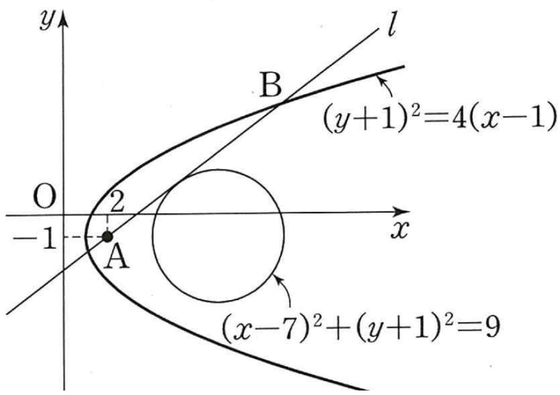
27)그림과 같이 좌표평면에서 꼭짓점이 원점 O이고 초점이 F인 포물선과 점 F를 지나고 기울기가 1인 직선이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AF를 대각선으로 하는 정사각형의 한 변의 길이가 2일 때, 선분 AB의 길이는 $a+b\sqrt{2}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 정수이다.)



연계 기울기의 기하학적 의미

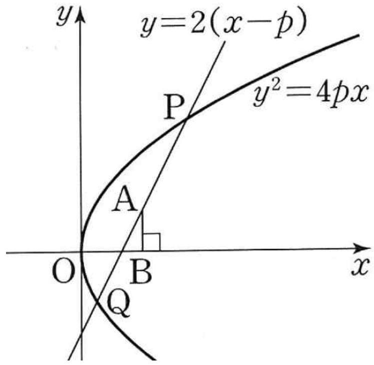
촌철살인 2015 EBS 수능특강 Level 3

28)그림과 같이 점 $\mathrm{A}(2,\ -1)$을 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 원 $(x-7)^2+(y+1)^2=9$에 접한다. 직선 l이 제1사분면에서 포물선 $(y+1)^2=4(x-1)$과 만나는 점을 B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.



촌철살인 2015 EBS 수능특강 Level 3

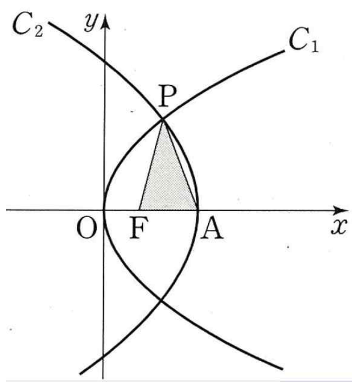
29)그림과 같이 포물선 $y^2=4px\,(p>0)$와 직선 $y=2(x-p)$의 두 교점 P, Q에 대하여 선분 PQ의 중점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=3$일 때, 선분 PQ의 길이는? (단, p는 상수이다.)



① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

촌철살인 2015 EBS 수능특강

30)그림과 같이 x축을 축으로 하고 x축 위의 점 F를 초점으로 하는 두 포물선 C_1, C_2가 제1사분면 위의 점 P에서 만난다. 두 포물선 C_1, C_2의 꼭짓점이 각각 원점 O와 점 A이고, $\overline{\mathrm{OF}}=3$, $\overline{\mathrm{PF}}=8$일 때, 삼각형 PFA의 넓이는? (단, 점 F는 선분 OA 위의 점이다.)



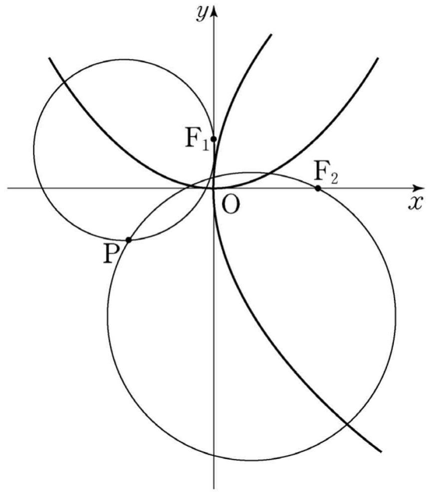
① 15 ② $5\sqrt{10}$ ③ $10\sqrt{3}$
④ 18 ⑤ $5\sqrt{15}$

촌철살인 2014. 6 B형(52%). 28번. 4점

31)좌표평면에서 포물선 $C_1 : x^2 = 4y$ 의 초점을 F_1,
포물선 $C_2 : y^2 = 8x$ 의 초점을 F_2 라 하자. 점 P 는 다음 조건을 만족시킨다.

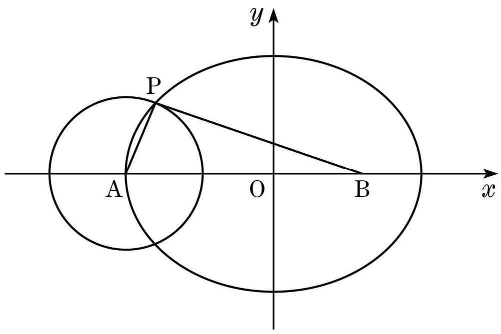
> (가) 중심이 C_1 위에 있고 점 F_1 을 지나는 원과 중심이 C_2 위에 있고 점 F_2 를 지나는 원의 교점이다.
> (나) 제 3 사분면에 있는 점이다.

원점 O 에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}^2$ 의 최댓값을 구하시오.



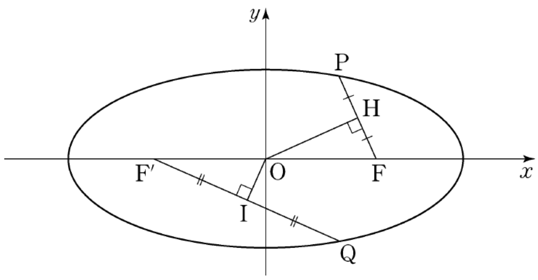
촌철살인 2013. 10. B형(40%). 27번. 4점

32)그림과 같이 점 $\mathrm{A}(-5,\ 0)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r 인 원과 타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 의 한 교점을 P 라 하자.
점 $\mathrm{B}(3,\ 0)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=10$ 일 때, $10r$ 의 값을 구하시오.



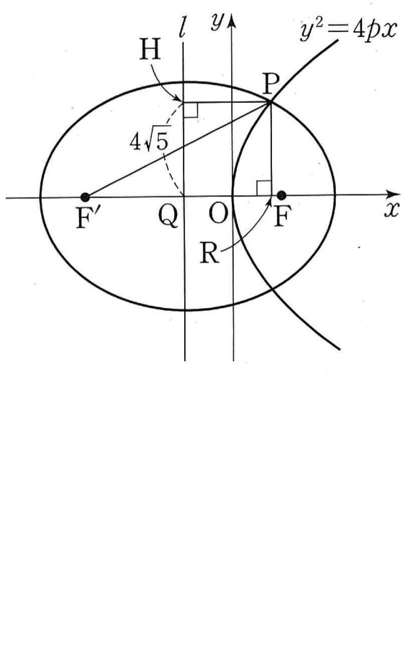
촌철살인 2012. 6. 가형(39%). 27번. 4점

33)두 점 $F(5,0), F'(-5,0)$을 초점으로 하는 타원 위의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 원점 O에서 선분 PF와 선분 QF'에 내린 수선의 발을 각각 H와 I라 하자. 점 H와 점 I가 각각 선분 PF와 선분 QF'의 중점이고, $\overline{OH} \times \overline{OI} = 10$일 때, 이 타원의 장축의 길이를 l이라 하자. l^2의 값을 구하시오. (단, $\overline{OH} \neq \overline{OI}$)



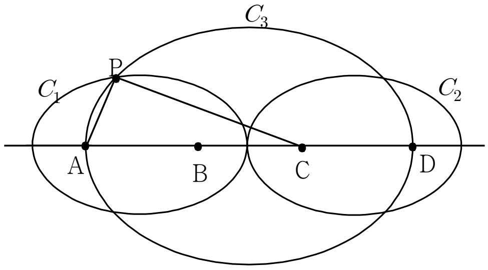
촌철살인 2015 EBS 수능특강 Level3

34)그림과 같이 x축 위의 두 점 F, F′이 초점이고 장축의 길이가 30인 타원이 있다. 초점이 F인 포물선 $y^2 = 4px\ (p > 0)$와 타원의 교점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하고, 점 P에서 포물선의 준선 l과 x축에 내린 수선의 발을 각각 H, R라 하자. 준선 l이 x축과 만나는 점을 Q라 할 때, 점 Q는 선분 F′F의 중점이고, $\overline{\mathrm{HQ}} = 4\sqrt{5}$이다. 삼각형 PF′R의 넓이가 $38\sqrt{5}$일 때, 타원의 단축의 길이는 m이다. m^2의 값을 구하시오. (단, p는 상수이다.)



촌철살인 2007. 사관학교. 이과. 18번. 4점

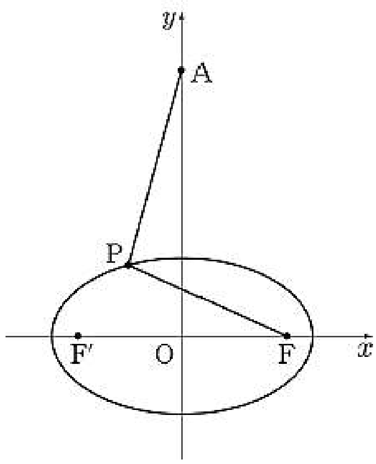
35)그림과 같이 서로 합동인 두 타원 C_1, C_2가 외접하고 있다. 두 점 A, B는 타원 C_1의 초점, 두 점 C, D는 타원 C_2의 초점이고, 네 점 A, B, C, D는 모두 한 직선 위에 있다. 두 점 B, C를 초점, 선분 AD를 장축으로 하는 타원을 C_3이라 하고, 두 타원 C_1, C_3의 교점을 P라 하자. $\overline{AB}=8$이고 $\overline{BC}=6$일 때, $\overline{CP}-\overline{AP}$의 값은?



① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

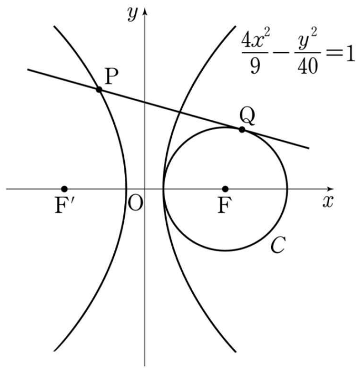
촌철살인 2013. 11. B형(55%). 27번. 4점

36)그림과 같이 y축 위의 점 $\mathrm{A}(0,\ a)$와 두 점 F, F'을 초점으로 하는 타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{FP}}$의 최솟값이 1일 때, a^2의 값을 구하시오.



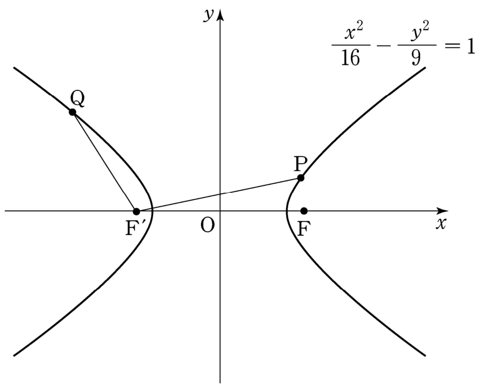
촌철살인 2013. 6. B형(81%). 12번. 3점

37)그림과 같이 쌍곡선 $\frac{4x^2}{9}-\frac{y^2}{40}=1$ 의 두 초점은 F, F' 이고, 점 F를 중심으로 하는 원 C는 쌍곡선과 한 점에서 만난다. 제 2 사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 P에서 원 C에 접선을 그었을 때 접점을 Q라 하자. $\overline{PQ}=12$ 일 때, 선분 PF' 의 길이는?



촌철살인 2007. 11. 가형(75%). 21번. 3점

38)그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 제1사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 P와 제2사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 Q에 대하여 $\overline{PF'}-\overline{QF'}=3$일 때, $\overline{QF}-\overline{PF}$의 값을 구하시오.

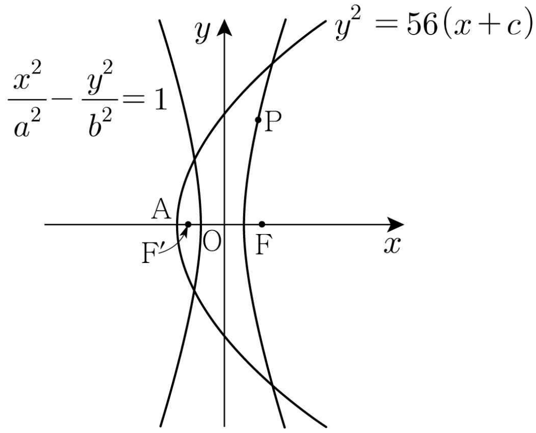


촌철살인 2009. 10. 가형(77%). 8번. 4점

39)그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(k, 0)$, $\mathrm{F}'(-k, 0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 과 점 F 를 초점으로 하는 포물선 $y^2=56(x+c)$ 가 있다. 쌍곡선 위의 임의의 점 P 에 대하여 $|\overline{PF}-\overline{PF'}|=10$ 이 성립하고, 포물선의 꼭짓점 A 에 대하여 $\overline{AF'}:\overline{FF'}=1:6$이 성립한다. 이때, $\frac{c^2}{a^2-b^2}$ 의 값은?

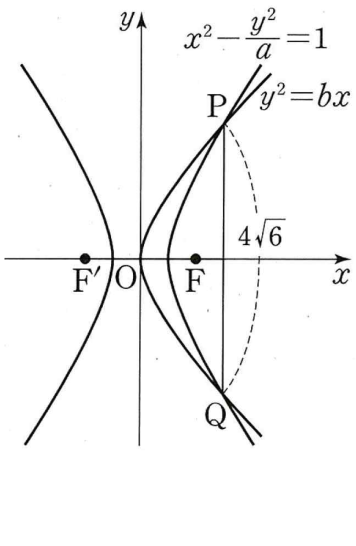
(단, $0<k<c$ 이다.)

① $\frac{53}{14}$ ② $\frac{55}{14}$ ③ $\frac{30}{7}$ ④ $\frac{32}{7}$ ⑤ $\frac{34}{7}$



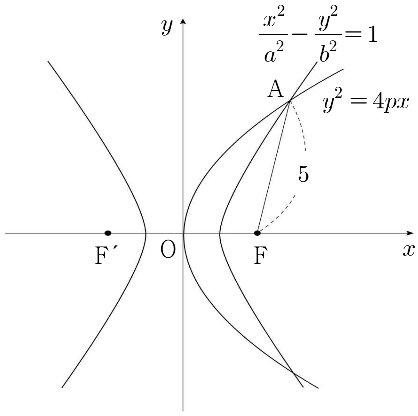
촌철살인 2015 EBS 수능특강

40)그림과 같이 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{a}=1$과 초점이 F인 포물선 $y^2=bx$ $(b>0)$가 두 점P, Q에서 만난다.
$\overline{\mathrm{PQ}}=4\sqrt{6}$ 일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오.
(단, 점 P의 x좌표는 점 F의 x좌표보다 크다.)



촌철살인 2012. 7. 가형(57%). 20번. 4점

41)그림과 같이 $\mathrm{F}(p,\ 0)$을 초점으로 하는 포물선 $y^2=4px$와 $\mathrm{F}(p,\ 0)$과 $\mathrm{F}'(-p,\ 0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$이 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. $\overline{\mathrm{AF}}=5$, $\cos(\angle \mathrm{AFF}')=-\dfrac{1}{5}$일 때, ab의 값은?



① 1　② $\sqrt{3}$　③ $\sqrt{5}$　④ $\sqrt{7}$　⑤ 3

연계 자취의 방정식

촌철살인 2006. 사관학교. 이과. 7번. 4점

42)쌍곡선 $4x^2-9y^2=36$ 이 x 축과 만나는 점을 각각 A,B 라 하고, 직선 $x=t$ (단, $t>3$) 가 이 쌍곡선과 만나는 점을 각각 C,D 라 하자. t 의 값이 변함에 따라 두 직선 AC 와 BD 의 교점 P 는 곡선을 그린다. 이 때, 이 곡선의 두 초점 사이의 거리는?

① $2\sqrt{3}$　② $2\sqrt{5}$　③ $2\sqrt{13}$　④ $2\sqrt{15}$　⑤ $4\sqrt{2}$

촌철살인 2013. 6. B형(44%). 29번. 4점

43)좌표평면에서 포물선 $y^2=16x$ 위의 점 A 에 대하여 점 B 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 A 가 원점이면 점 B 도 원점이다. (나) 점 A 가 원점이 아니면 점 B 는 점 A, 원점 그리고 점 A 에서의 접선이 y 축과 만나는 점을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심이다.

점 A 가 포물선 $y^2=16x$ 위를 움직일 때 점 B 가 나타내는 곡선을 C 라 하자.
점 $(3,\ 0)$ 을 지나는 직선이 곡선 C 와 두 점 P, Q 에서 만나고 $\overline{PQ}=20$ 일 때,
두 점 P, Q 의 x 좌표의 값의 합을 구하시오.

5. 이차곡선과 접선의 방정식

기본 직선과의 위치관계

촌철살인 2014. 9. B형(90%). 11번. 3점

44)자연수 n 에 대하여 직선 $y=nx+(n+1)$ 이 꼭짓점의 좌표가 $(0,\ 0)$ 이고 초점이 $(a_n,\ 0)$ 인 포물선에 접할 때, $\sum_{n=1}^{5} a_n$ 의 값은?

① 70 ② 72 ③ 74 ④ 76 ⑤ 78

촌철살인 2015 EBS 수능특강

45)쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. 직선 $y=\frac{4}{3}(x-k)$는 쌍곡선과 한 점에서 만난다. (단, k는 0이 아닌 상수이다.)

ㄴ. 점 $(1,\ 0)$에서 쌍곡선에 그을 수 있는 접선은 4개이다.

ㄷ. 점 $(0,\ a)$ $(a\neq 0)$에서 쌍곡선에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 $|m|>\frac{4}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

촌철살인 2006. 10. 가형(69%). 8번. 3점

46)쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{18}=1$과 직선 $y=ax+b$ $(a,b$는 상수)의 교점의 개수에 대한 설명 중 옳은 내용을 <보기>에서 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $a=-4$이고 $b=0$일 때 교점은 없다.

ㄴ. $a=3$이고 $b>0$일 때 교점은 1개이다.

ㄷ. $a=\frac{1}{3}$이고 $b<0$일 때 교점은 2개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

촌철살인 2007. 9. 가형(58%). 9번. 3점

47)쌍곡선 $x^2-y^2=1$에 대한 옳은 설명을 <보기>에서 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 점근선의 방정식은 $y=x,\ \ y=-x$이다.

ㄴ. 쌍곡선 위의 점에서 그은 접선 중 점근선과 평행한 접선이 존재한다.

ㄷ. 포물선 $y^2=4px$ $(p\neq 0)$는 쌍곡선과 항상 두 점에서 만난다.

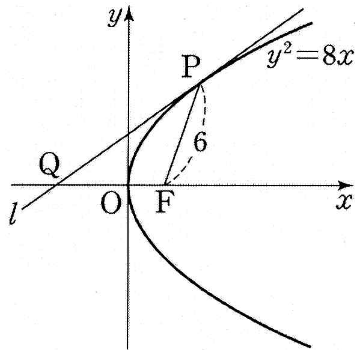
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

기본 접점을 알 때 접선의 방정식

촌철살인 2015 EBS 수능특강

48)그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 한 점 P에서의 접선을 l이라 하고, 직선 l이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{FP}}=6$일 때, $\cos(\angle \mathrm{PQF})$의 값은? (단, 점 P는 제1사분면의 점이다.)



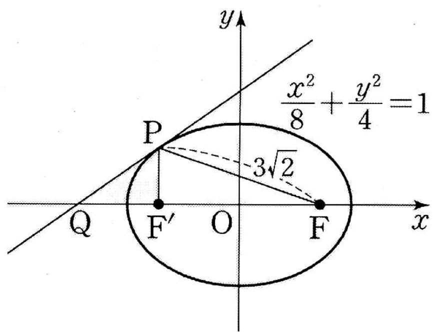
① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

준Tip. 삼각형의 세변의 길이가 나오면 직각삼각형인지 궁금해야 한다.

촌철살인 2015 EBS 수능특강

49)그림과 같이 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$이 있다. 제2사분면에서 타원 위에 놓은 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}=3\sqrt{2}$일 때, 삼각형 PQF′의 넓이는?



① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ③ $\sqrt{2}$

④ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

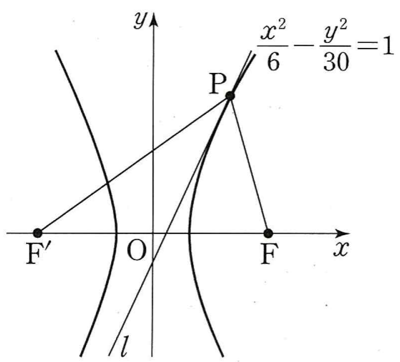
춘천살인 2012. 11. 가형(89%). 6번. 3점

50)쌍곡선 $x^2-4y^2=a$ 위의 점 $(b, 1)$ 에서의 접선이 쌍곡선의 한 점근선과 수직이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 양수이다.)

① 68 ② 77 ③ 86 ④ 95 ⑤ 104

춘천살인 2015 EBS 수능특강

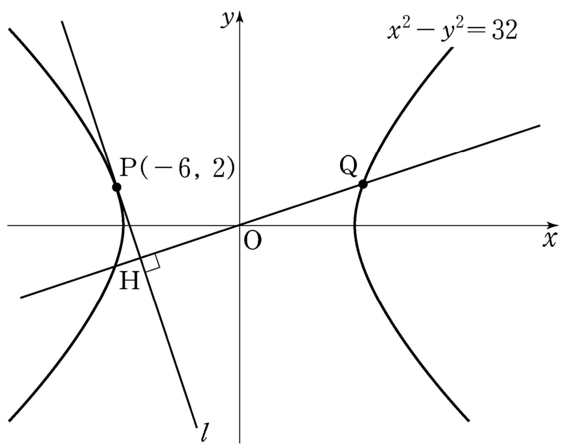
51)그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{30}=1$의 두 초점 F, F′과 쌍곡선 위의 점 P에 대하여 삼각형 PF′F의 넓이는 $30\sqrt{2}$이다. 점 P에서의 접선을 l이라 할 때, 직선 l은 쌍곡선 $\frac{(x-m)^2}{4}-\frac{y^2}{n}=1$의 한 점근선이다. 두 상수 m, n에 대하여 mn의 값은? (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)



① 44 ② 48 ③ 52
④ 56 ⑤ 60

촌철살인 2008. 9. 가형(69%). 20번. 3점

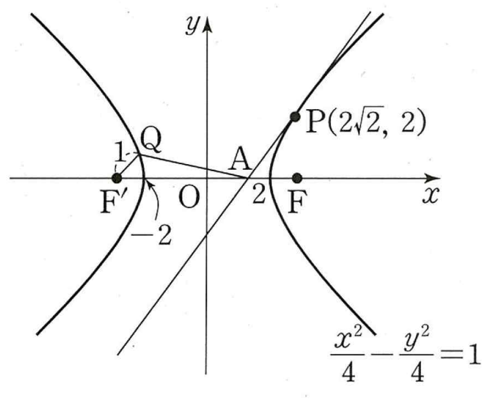
52)쌍곡선 $x^2-y^2=32$ 위의 점 $P(-6,\ 2)$에서의 접선 l에 대하여 원점 O에서 l에 내린 수선의 발을 H 직선 OH와 이 쌍곡선이 제1사분면에서 만나는 점을 Q라 하자. 두 선분 OH와 OQ의 길이의 곱 $\overline{OH}\cdot\overline{OQ}$를 구하시오.



심화 - 제2코사인

촌철살인 2015 EBS 수능특강

53)그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하고 쌍곡선 위의 점 $\mathrm{P}(2\sqrt{2},\ 2)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 A라 하자. 제2사분면에서 쌍곡선 위의 한 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{F'Q}}=1$일 때, $\overline{\mathrm{QA}}^2$의 값을 구하시오.



기본 기울기를 이용한 접선의 방정식

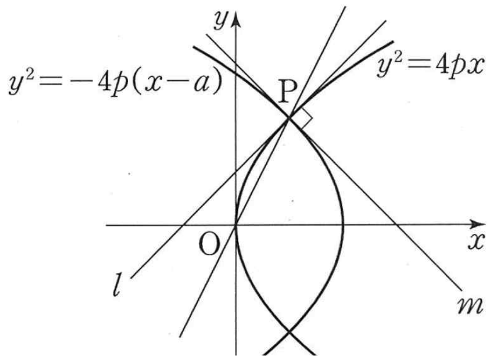
촌철살인 2013. 11. B형(87%). 8번. 3점

54)좌표평면에서 포물선 $y^2=8x$에 접하는 두 직선 l_1, l_2의 기울기가 각각 m_1, m_2이다. m_1, m_2가 방정식 $2x^2-3x+1=0$의 서로 다른 두 근일 때, l_1과 l_2의 교점의 x좌표는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

촌철살인 2015 EBS 수능특강

55)그림과 같이 포물선 $y^2=4px\ (p>0)$와 포물선 $y^2=-4p(x-a)\ (a>0)$는 서로 다른 두 점에서 만나고, 제1사분면에서의 교점 P에서 두 포물선에 그은 접선을 각각 l, m이라 하자. 두 직선 l, m이 서로 수직일 때, 원점 O에 대하여 직선 OP의 기울기는? (단, a, p는 상수이다.)



① $\frac{7}{2}$ ② 3 ③ $\frac{5}{2}$

④ 2 ⑤ $\frac{3}{2}$

촌철살인 2013. 11. B형(87%). 8번. 3점

56)좌표평면에서 포물선 $y^2=8x$에 접하는 두 직선 l_1, l_2의 기울기가 각각 m_1, m_2이다. m_1, m_2가 방정식 $2x^2-3x+1=0$의 서로 다른 두 근일 때, l_1과 l_2의 교점의 x좌표는?

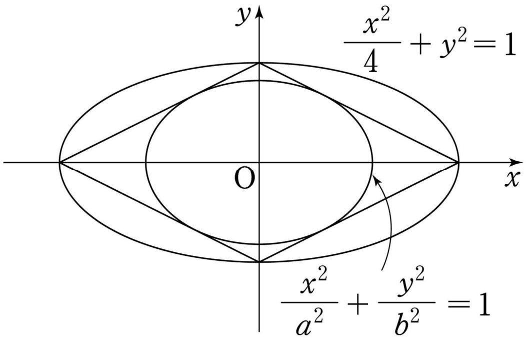
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

촌철살인 2008. 11. 가형(30%). 19번. 3점

57)타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$의 네 꼭짓점을 연결하여 만든 사각형에 내접하는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 있다.

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 $F(b, 0)$, $F'(-b, 0)$일 때, $a^2b^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

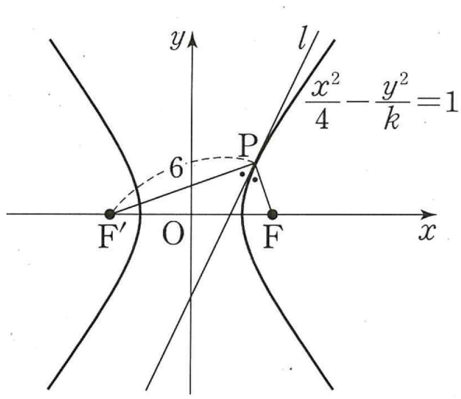
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



촌철살인 2015 EBS 수능특강

58)그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$, $(c>0)$이 초점인 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{k}=1$이 있다. 제1사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 P에서의 접선 l은 기울기가 2이고, $\angle\mathrm{F'PF}$의 크기를 이등분한다. $\overline{\mathrm{PF'}}=6$일 때, 상수 k의 값은?

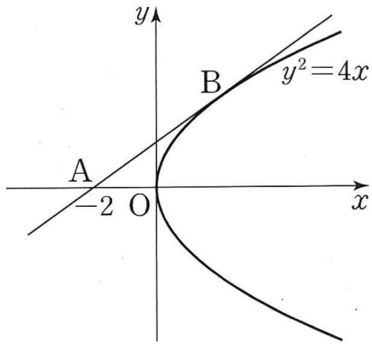
① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8



기본 외부의 한 점이 주어진 경우 - 가기울기, 가접점

춘천살인 2015 EBS 수능특강

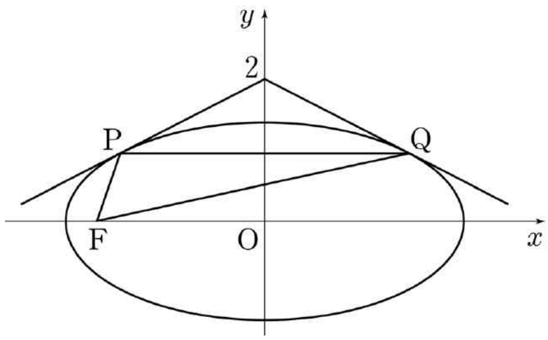
59)그림과 같이 점 $A(-2,\ 0)$에서 포물선 $y^2=4x$에 그은 접선이 제1사분면에서 포물선과 만나는 점을 B라 할 때, 선분 OB의 길이는? (단, O는 원점이다.)



① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $\sqrt{10}$
④ $\sqrt{11}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

춘천살인 2011. 6. 가형(61%). 28번. 4점

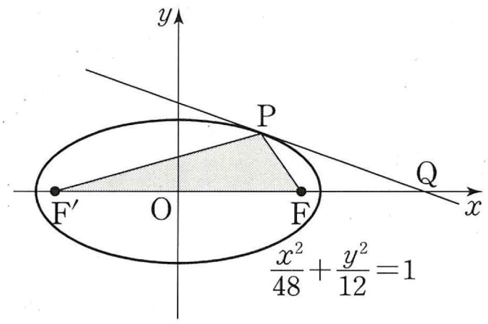
60)점 $(0,2)$에서 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라 하고, 타원의 두 초점 중 하나를 F라 할 때, 삼각형 PFQ의 둘레의 길이는 $a\sqrt{2}+b$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.)



촌철살인 2015 EBS 수능특강

61)그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{12}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하고 제1사분면에 있는 타원 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{F'F}}:\overline{\mathrm{FQ}}=2:1$일 때, 삼각형 PF′F의 넓이는?

① $8\sqrt{2}$ ② $8\sqrt{3}$ ③ $10\sqrt{2}$
④ $12\sqrt{2}$ ⑤ $12\sqrt{3}$



기본 외부의 한 점이 주어진 경우 - 가기울기, 가접점

촌철살인 2013. 6. B형(66%). 19번. 4점

62)직선 $y=2$ 위의 점 P에서 타원 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$에 그은 두 접선의 기울기의 곱이 $\frac{1}{3}$이다.
점 P의 x좌표를 k라 할 때, k^2의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

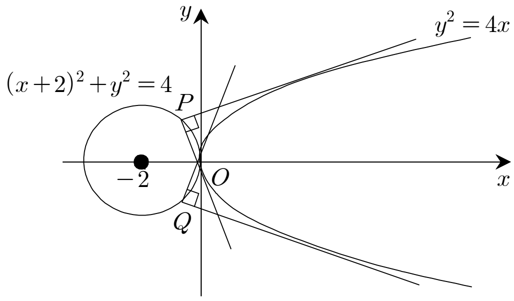
촌철살인 2010. 11. 가형(58%). 5번. 3점

63)좌표평면에서 점 $A(0,4)$와 타원 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$위의 점 P에 대하여
두 점 A와 P를 지나는 직선이 원 $x^2+(y-3)^2=1$과 만나는 두 점 중에서
A가 아닌 점을 Q라 하자. 점 P가 타원 위의 모든 점을 지날 때,
점 Q가 나타내는 도형의 길이는?

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{2}{3}\pi$ ⑤ $\frac{3}{4}\pi$

연계 직교접선의 교점의 자취

촌철살인 64)그림과 같이 원 $(x+2)^2+y^2=4$ 위의 두 점 P, Q에서 각각 포물선 $y^2=4x$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 두 점 P, Q사이의 거리는?



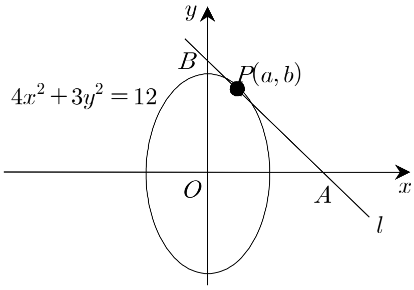
① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ 4

촌철살인 2014 EBS 수능완성

65)기울기가 $\dfrac{1}{2}$인 직선 l과 포물선 $y^2=16x$가 접할 때, 직선 l과 포물선의 접점을 A, 직선 l과 포물선의 준선의 교점을 B라 하자. 점 B에서 이 포물선에 그은 접선의 접점 중 점 A가 아닌 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

연계 타원과 절대부등식

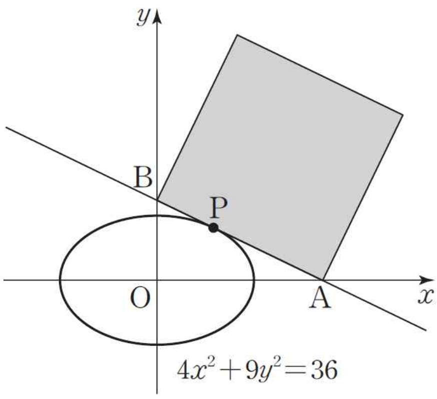
촌철살인 66)타원 $4x^2+3y^2=12$ 위의 점 $P(a,\ b)$에서의 접선을 l이라 할 때, 직선 l의 x절편을 A, y절편을 B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값은? (단, $a>0$, $b>0$이고, O는 원점이다.)



① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $2\sqrt{5}$

촌철살인 2014 EBS 수능완성

67)그림과 같이 타원 $4x^2+9y^2=36$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이의 최솟값을 구하시오.



#1-2. 이차곡선 MAP

1) $a=5$

해설) 결국 초점이 $A(5,\ 3)$이고 준선은 $x=1$이다. 꼭짓점의 좌표는 초점과 준선의 중점이다. 즉, 꼭짓점은 $(3,3)$이고, p = 초−꼭 = 2이다. 이 곡선은 $y^2=4px$형태의 1-1. 이차곡선이므로 $(y-3)^2=8(x-3)$ 이 포물선이 $(a,\ 7)$을 지나므로 대입하여 a를 구하면 $(7-3)^2=8(a-3) \Leftrightarrow a=5$

2) 답. ②

3) [정답] ④

포물선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$, 초점을 $\mathrm{F}(3,\ a)$, 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$이므로

$\sqrt{(x-3)^2+(y-a)^2}=|x+1|$

양변을 제곱하면 $(x-3)^2+(y-a)^2=(x+1)^2$ ⋯ ㉠

포물선이 x축과 만나는 점의 x좌표가 3이므로 $x=3,\ y=0$을 ㉠에 대입하면 $a^2=16$

∴ $a=4$ 또는 $a=-4$

a는 양수이므로 $a=4$

4) 정답은 120

해설) 조건에서 $y^2=4px$의 꼴의 포물선을 구하라는 것이므로 준선을 $x=k$라고 잡는다.

꼭짓점의 좌표는 초점과 준선의 중점이다. 즉, 꼭짓점은 $\left(\frac{k+3}{2},\ 1\right)$ / p = 초−꼭 $= 3-\frac{k+3}{2} = \frac{3-k}{2}$

즉, 우리가 구하는 포물선의 방정식은 $(y-1)^2=2(3-k)\left(x-\frac{k+3}{2}\right) \Leftrightarrow (y-1)^2=(3-k)\{2x-(k+3)\}$

이고 여기에 지나는 점 (6,5)를 대입하여 정리하면

$(5-1)^2=(3-k)\{12-(k+3)\} \Leftrightarrow 16=(3-k)(9-k) \Leftrightarrow k^2-12k+11=0$

그러므로 $k=1$ or $k=11$ 결국 우리가 구하는 포물선의 방정식은

$k=1$: $(y-1)^2=2(2x-4) \Leftrightarrow 4x=y^2-2y+9$

$k=11$: $(y-1)^2=-8(2x-14) \Leftrightarrow 16x=-y^2+2y+111$ 즉, 정답은 120

범위를 나누어서 푸는 것은 아직 해석기하의 핵심을 모르는 것. 해석기하의 핵심은 여러 가지 상황을 하나의 식으로 표현할 수 있다는 것.

5) [정답] ①

포물선 $x^2-2x-4y+1=0$, 즉 $(x-1)^2=4y$는 포물선 $x^2=4y$를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 포물선 $x^2=4y$의 초점의 좌표가 $(0,\ 1)$이므로 포물선 $(x-1)^2=4y$의 초점 F의 좌표는 $\mathrm{F}(1,\ 1)$이다.

또한 포물선 $y^2+4y-px+4=0$, 즉 $(y+2)^2=px$는 포물선 $y^2=px$를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이고, 포물선 $y^2=px$의 초점의 좌표가 $\left(\frac{p}{4},\ 0\right)$이므로 포물선 $(y+2)^2=px$의 초점 F'의 좌표는 $\mathrm{F}'\left(\frac{p}{4},\ -2\right)$이다.

$\overline{\mathrm{FF}'}=\sqrt{10}$ 이므로 $\sqrt{\left(\frac{p}{4}-1\right)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{10}$

양변을 제곱하여 간단히 하면 $\left(\frac{p}{4}-1\right)^2=1$에서 $\frac{p}{4}-1=1$ 또는 $\frac{p}{4}-1=-1$ ∴ $p=8$ 또는 $p=0$

p는 양수이므로 $p=8$

6) [정답] ③

$y^2-2y-4x+5=0$에서 $(y-1)^2=4(x-1)$이므로 초점을 F_1이라 하면 $\mathrm{F}_1(2,\ 1)$이고 준선의 방정식은 $x=0$이다.

$x^2+mx-4y+n=0$에서 $\left(x+\frac{m}{2}\right)^2=4\left(y-\frac{n}{4}+\frac{m^2}{16}\right)$이므로 초점을 F_2라 하면 $\mathrm{F}_2\left(-\frac{m}{2},\ 1+\frac{n}{4}-\frac{m^2}{16}\right)$

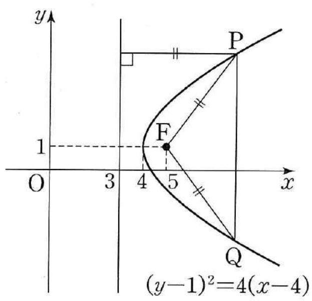
준선의 방정식은 $y=-1+\frac{n}{4}-\frac{m^2}{16}$ $\cdots$ ㉠

초점 $F_2\left(-\frac{m}{2},\ 1+\frac{n}{4}-\frac{m^2}{16}\right)$이 준선 $x=0$ 위의 점이므로 초점의 x좌표는 0이다. 즉 $m=0$

㉠이 점 $F_1(2,\ 1)$을 지나야 하므로 $-1+\frac{n}{4}=1$ $\therefore\ n=8$

따라서 $F_1(2,\ 1)$, $F_2(0,\ 3)$이므로 두 초점 F_1, F_2사이의 거리는 $\sqrt{2^2+(1-3)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

7) 정답 ⑤



$y^2-4x-2y+17=0$에서 $y^2-2y+1=4x-16$, $(y-1)^2=4(x-4)$

이므로 주어진 포물선은 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 주어진 포물선의 준선의 방정식은 $x=3$이고,

포물선의 정의에 의하여 두 점 P, Q에서 준선에 이르는 거리가 5이므로 두 점 P, Q의 x좌표는 모두 8이다.

$(y-1)^2=4(x-4)$에서 $x=8$일 때, $(y-1)^2=16$ $\therefore\ y=5$ 또는 $y=-3$

두 점 P, Q의 좌표를 각각 $P(8,\ 5)$, $Q(8,\ -3)$으로 놓으면 구하는 삼각형 POQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\{5-(-3)\}\times 8=32$

8) 답 : ①

$y=\log_2(x+a)+b$의 점근선은 $x=-a$, 포물선$y^2=x$의 준선은 $x=-\frac{1}{4}$ 이므로 $a=\frac{1}{4}$

$y=\log_2(x+a)+b$가 $y^2=x$의 초점$\left(\frac{1}{4},0\right)$을 지나므로 $0=\log_2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+b=\log_2\frac{1}{2}+b=-1+b$

$\therefore\ b=1$ $\therefore\ a+b=\frac{5}{4}$

9) 답. $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$

10) 정답 ④

원점에서 초점까지의 거리를 c라고 하면 $\angle OFB=\frac{\pi}{3}$이므로 $\therefore b=\sqrt{3}c$, $c^2=a^2-b^2=a^2-3c^2$ $\therefore a=2c$

$\triangle AFB=\frac{(a+c)b}{2}=\frac{3\sqrt{3}c^2}{2}=6\sqrt{3}$ $\therefore c=2, a=4, b=2\sqrt{3}$ $\therefore a^2+b^2=28$

11) [정답] ①

두 초점이 $F(0,\ 4)$, $F'(0,\ -4)$인 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$이라 하면 $\overline{FF'}=8$이고 삼각형 $FF'P$의 둘레의 길이는

$\overline{FF'}+\overline{PF}+\overline{PF'}=18$이므로 $\overline{PF}+\overline{PF'}=10$

타원의 정의에 의하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}$=(장축의 길이)이므로 $2b=10$ $\therefore\ b=5$

$5^2=a^2+4^2$이므로 $a^2=9$ $\therefore\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

타원 위의 제1사분면에 있는 점 P의 좌표를 $P(\alpha,\ \beta)$라 하면 삼각형 $FF'Q$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 8\times\alpha=8\sqrt{2}$ $\therefore\ \alpha=2\sqrt{2}$

점 P는 타원 위의 점이므로 $\frac{\alpha^2}{9}+\frac{\beta^2}{25}=1$, $\frac{8}{9}+\frac{\beta^2}{25}=1$, $\beta^2=\frac{25}{9}$ $\therefore\ \beta=\frac{5}{3}$

즉, 점 P의 좌표는 $P\left(2\sqrt{2},\ \frac{5}{3}\right)$이다. $\therefore\ \overline{OP}=\sqrt{8+\frac{25}{9}}=\frac{\sqrt{97}}{3}$

12) **정답** ①

타원 $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$의 다른 한 초점을 F_2라 하면

$\overline{B_1F_1}=\overline{B_1F_2}=5$

$\overline{B_1F_1}+\overline{B_1F_2}=10$

타원의 장축의 길이는 10이므로

$2a=10$에서 $a=5$

$\overline{CA_1}=5$, $\overline{F_1A_1}=1$이므로 $\overline{CF_1}=4$

삼각형 B_1CF_1에서 $\overline{B_1C}=\sqrt{5^2-4^2}=3$이므로 타원의 단축의 길이는 6이고, $2b=6$에서 $b=3$

초점F_1의 좌표는 $(0,1)$, 중심C의 좌표는 $(-4,1)$이므로 타원 $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$은 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서, $m=-4$, $n=1$이므로

$ab+mn=5\times3+(-4)\times1=11$

13) 정답 50

장축의 길이는 정삼각형의 한 변의 길이의 5배와 같으므로 $a^2=25$이고 [그림2]에서 점 A의 좌표가 $(4,\ \sqrt{3})$이므로 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 대입하여 정리하면 $b^2=\frac{25}{3}$ $\therefore a^2+3b^2=50$

14) **[정답]** ②

$a>4$이므로 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$의 두 초점 F, F′의 좌표를 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면 이 타원이 y축과 만나는 두 점 P, P′의 좌표는 $P(0,\ 4)$, $P'(0,\ -4)$이다.

타원의 정의에 의하여 $a^2-4^2=c^2$ …… ㉠

사각형 FPF′P′의 넓이가 a^2이므로 $4\times\left(\frac{1}{2}\times c\times4\right)=a^2$, $a^2=8c$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$8c-4^2=c^2$, $c^2-8c+16=0$

$(c-4)^2=0$ $\therefore\ c=4$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$a^2=32$

15) **정답** ②

타원의 방정식을 정리하면 $(x-2)^2+5(y+1)^2=5$, $\frac{(x-2)^2}{5}+(y+1)^2=1$이고,

이 타원은 타원 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

타원 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$의 초점의 좌표는 $(2, 0)$, $(-2, 0)$이므로 주어진 타원의 초점의 좌표는 $(4, -1)$, $(0, -1)$이다.

$F_1(4, -1)$, $F_2(0, -1)$이라 하면 $\overline{OF_2}=1$, $\overline{F_1F_2}=4$, $\angle OF_2F_1=90°$이므로 삼각형OF_1F_2의 넓이는 $\frac{1}{2}\times1\times4=2$

16) [정답] ④

타원 $2x^2+3y^2+12x+6y+15=0$에서

$2(x^2+6x)+3(y^2+2y)=-15$

$2(x^2+6x+9)+3(y^2+2y+1)=-15+18+3$

$2(x+3)^2+3(y+1)^2=6$

$\frac{(x+3)^2}{3}+\frac{(y+1)^2}{2}=1$ …… ㉠

타원 ㉠을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 타원의 중심의 좌표는 $(-3+m, -1+n)$이다.
이 타원의 중심이 원점이므로

$-3+m=0$, $-1+n=0$

$\therefore\ m=3$, $n=1$

$\therefore\ m+n=4$

17) 정답 ③

$\overline{PF'}-\overline{PF}=\sqrt{4^2+3^2}-3 \ =5-3 \ =2$이므로 쌍곡선의 주축의 길이가 2이다.

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$이라 하면

$2a=2$에서 $a=1$

$a^2+b^2=2^2$에서 $b^2=4-1=3$

따라서 쌍곡선의 방정식은 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$이고 점 $Q(k,\ 6)$은 쌍곡선 위의 점이므로 $k^2-\frac{36}{3}=1$에서 $k^2=13$

$k>0$이므로 $k=\sqrt{13}$

[다른풀이]

$\overline{PF'}-\overline{PF}=\sqrt{4^2+3^2}-3 \ =5-3 \ =2$

이므로 쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{QF'}-\overline{QF}=2$이다. 즉, $\sqrt{(k+2)^2+36}-\sqrt{(k-2)^2+36}=2$

$\sqrt{k^2+4k+40}=2+\sqrt{k^2-4k+40}$

양변을 제곱하면 $k^2+4k+40=4+4\sqrt{k^2-4k+40}+k^2-4k+40$

$2k-1=\sqrt{k^2-4k+40}$

다시 양변을 제곱하면 $4k^2-4k+1=k^2-4k+40$

$3k^2=39$, $k^2=13$

$k>0$이므로 $k=\sqrt{13}$

18) 정답 ④

쌍곡선 $\frac{x^2}{k}-\frac{y^2}{9}=1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{3}{\sqrt{k}}x$이므로 $\frac{3}{\sqrt{k}}=\frac{1}{3}$에서 $\sqrt{k}=9$ $\therefore\ k=81$

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{9}=1$의 주축의 길이는 $2\times9=18$

$\overline{PF_1} < \overline{PF_2}$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = 18$

$\overline{PF_1} = 5$이므로 $\overline{PF_2} = 5 + 18 = 23$

19) 정답 16

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0,\ b > 0)$이라 할 때, 주어진 조건에 의해서 $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$, $a^2 + b^2 = 100$ 이므로 $a = 8$

∴주축의 길이는 16

20) 정답 ③

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$의 꼭짓점의 좌표가 $(a,\ 0)$, $(-a,\ 0)$이고,

점근선의 방정식이 $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$ 이므로

$P(a,\ b)$, $Q(-a,\ b)$, $R(-a,\ -b)$, $S(a,\ -b)$이다.

$\overline{PQ} = 2a$, $\overline{PS} = 2b$ 이고 $2 \times 2a = 2b$ 이므로 $b = 2a$ ……㉠

직사각형PQRS의 외접원의 반지름의 길이는 $\overline{OP} = \sqrt{a^2 + b^2}$ 이므로

외접원의 넓이는 $(a^2 + b^2)\pi = 20\pi$ 에서

$a^2 + b^2 = 20$

㉠에 대입하면

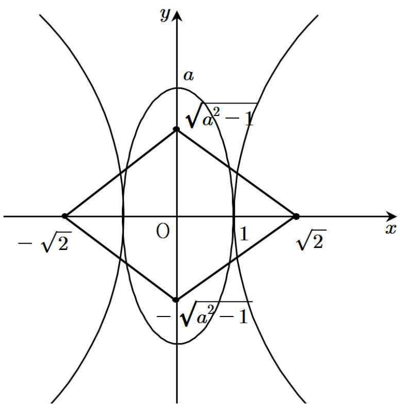
$a^2 + 4a^2 = 20$, $a^2 = 4$ $\quad\quad$ ∴ $a = 2$

$a = 2$를 ㉠에 대입하면 $b = 4$

∴ $a + b = 2 + 4 = 6$

21) 해설코드 : HIH3201409EE25

정답19



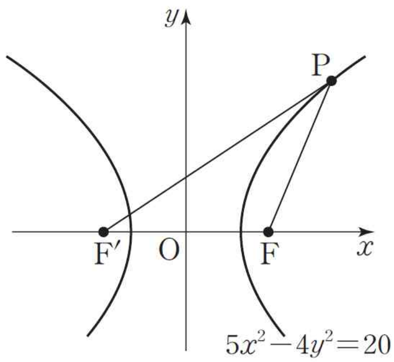
타원의 두 초점의 좌표는 $(0,\ \pm\sqrt{a^2 - 1})$이고

쌍곡선의 두 초점의 좌표는 $(\pm\sqrt{2},\ 0)$이므로

사각형의 넓이$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{a^2 - 1} = 12$

$2(a^2 - 1) = 36 \Leftrightarrow a^2 - 1 = 18$ $\therefore a^2 = 19$

22) [정답] ④



$5x^2 - 4y^2 = 20$ 의 양변을 20으로 나누면 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

점 P가 제1사분면 위의 점이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2 \times 2 = 4$ ……㉠

$c^2 = 4 + 5 = 9$에서 두 초점의 좌표는 $F(3,\ 0)$, $F'(-3,\ 0)$이므로

$\overline{FF'} = 6$

삼각형 PFF′의 둘레의 길이가 22이므로

$\overline{PF} + \overline{PF'} + \overline{FF'} = 22$

∴ $\overline{PF} + \overline{PF'} = 16$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\overline{PF} = 6$

23) 정답 ①

쌍곡선 C_1의 초점의 좌표는 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$이고 점근선의 방정식은 $y=\pm x$ 이다.

또 쌍곡선C_2는 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{a^2}=1$을 x축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 것이므로 중심의 좌표는 $(m,\ 0)$이고 점근선의 방정식은 $y=\pm a(x-m)$이다.

(i) 점$(4,\ 0)$이 쌍곡선 C_2의 중심인 경우

$m=4$이므로 쌍곡선 C_2의 점근선의 방정식은 $y=\pm a(x-4)$

점근선이 점$(3,\ 3)$을 지나고 $a>0$이므로 직선 $y=-a(x-4)$가 점$(3, 3)$을 지나고

$3=-a\times(-1)$에서 $a=3$ $\quad\therefore\ a+m=7$

(ii) 점$(-4,\ 0)$이 쌍곡선 C_2의 중심인 경우

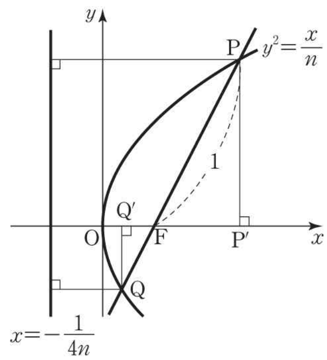
$m=-4$이므로 쌍곡선 C_2의 점근선의 방정식은 $y=\pm a(x+4)$

점근선이 점$(3,\ 3)$을 지나고 $a>0$이므로 직선 $y=a(x+4)$가 점$(3,\ 3)$을 지나고 $3=7a$에서 $a=\dfrac{3}{7}$

$\therefore\ a+m=-\dfrac{25}{7}$

(i), (ii)에 의하여 $a+m$의 최댓값과 최솟값의 곱은 $7\times\left(-\dfrac{25}{7}\right)=-25$

24) 답. ①



포물선과 이 포물선의 초점 F를 지나는 직선이 만나는 두 점이 P, Q이므로 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′이라 하자. 두 삼각형 FP′P, FQ′Q는 닮음이므로 $\overline{\mathrm{FP}}:\overline{\mathrm{FQ}}=\overline{\mathrm{FP'}}:\overline{\mathrm{FQ'}}$이 성립한다.

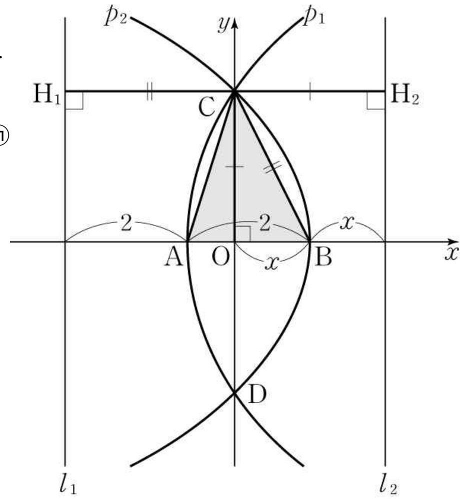
한편, 자연수 n에 대하여 포물선 $y^2=\dfrac{x}{n}$의 준선의 방정식은 $x=-\dfrac{1}{4n}$이고 초점 F의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{4n},\ 0\right)$이므로 포물선의 정의에 의하여 각 선분의 길이를 구하면

$1:a_n=1-\dfrac{1}{2n}:\dfrac{1}{2n}-a_n$

$a_n\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)=\dfrac{1}{2n}-a_n,\ a_n=\dfrac{1}{4n-1}$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}(4n-1)=220-10=210$

25) 답. ③



위의 그림과 같이 포물선 p_1의 준선을 l_1, 포물선 p_2의 준선을 l_2, $\overline{\mathrm{OB}}=x\,(x>0)$라 두자.
점 C에서 준선 l_1, l_2에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하면 포물선의 정의에 의해

$\overline{\mathrm{CH_2}}=\overline{\mathrm{CO}}$, $\overline{\mathrm{CH_1}}=\overline{\mathrm{CB}}$ …… ㉠

이고, 점 A에서 준선 l_1에 이르는 거리는 2,
점 B에서 준선 l_2에 이르는 거리는 x이다.

㉠에서 $\overline{\mathrm{CO}}=2x$, $\overline{\mathrm{CB}}=2+(2-x)=4-x$
이고, 삼각형 COB는 직각삼각형이므로
$(4-x)^2=(2x)^2+x^2$, $x^2+2x-4=0$
$\therefore\ x=\sqrt{5}-1\,(\because\ x>0)$
따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\overline{AB} \times \overline{CO} \times \frac{1}{2} = 2 \times 2(\sqrt{5}-1) \times \frac{1}{2} = 2(\sqrt{5}-1)$

26) 답. ⑤

A에서 준선에 내린 수선의 발을 Q, x축에 내린 수선의 발을 C, B에서 준선에 내린 수선의 발을 R, x축에 내린 수선의 발을 D라 하면 $\overline{AQ}$: $\overline{BR} = 1:2$, $\overline{AC}$: $\overline{BD} = 1:2$ 이므로

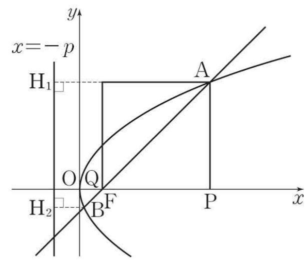
A의 x좌표를 a라 하면 $\overline{PC}$의 길이는 $a+1$이므로 D의 x좌표는 $1+2a$가 된다

이때 A의 y좌표는 $\sqrt{4a}$ B의 y좌표는 $\sqrt{1+2a}$가 된다

$\therefore \sqrt{4a} : \sqrt{4(1+2a)} = 1:2$

정리하면 $a = \frac{1}{2}$ A의 좌표는 $(\frac{1}{2}, \sqrt{2})$가 된다 $\therefore \overleftrightarrow{PA}$의 기울기는 $(-1,0)$에서 $(\frac{1}{2}, \sqrt{2})$까지의 기울기 이므로 $\dfrac{\sqrt{2}-0}{\frac{1}{2}-(-1)} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

27) 답 : 128



초점 F의 좌표를 $F(p,\ 0)(p>0)$이라 하면

직선 AB의 방정식은 $y = x - p$ ……㉠

포물선의 방정식은 $y^2 = 4px$ ……㉡

이 직선이 포물선과 만나는 두 점 A, B의 좌표를 각각 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$라 하자.

이때, ㉠과 ㉡을 연립하면

$(x-p)^2 = 4px$, $x^2 - 6px + p^2 = 0$

이 이차방정식의 두 실근이 x_1, x_2이므로 근과 계수의 관계에 의해 $x_1 + x_2 = 6p$

한편, 그림의 정사각형의 한 변의 길이가 2이므로 $x_1 - p = 2$ 즉, $x_1 = p+2$이고, $y_1 = 2$이다.

이때, 점 $A(x_1,\ y_1)$는 포물선 위의 점이므로

$2^2 = 4p(p+2)$, $p^2 + 2p - 1 = 0$

$\therefore\ p = -1 + \sqrt{2}\ (\because\ p>0))$

두 점 A, B에서 포물선의 준선 $x = -p$에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면

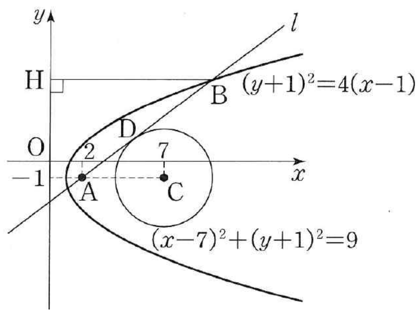
$\overline{AF} = \overline{AH_1} = x_1 + p$, $\overline{BF} = \overline{BH_2} = x_2 + p$이므로

$\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF} = \overline{AH_1} + \overline{BH_2} = x_1 + x_2 + 2p = 8p = -8 + 8\sqrt{2}$

따라서 $a = -8$, $b = 8$이므로 $a^2 + b^2 = 128$이다.

28) 정답 10

포물선 $(y+1)^2 = 4(x-1)$은 포물선 $y^2 = 4x$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 포물선 $(y+1)^2 = 4(x-1)$의 초점은 $A(2,\ -1)$이고 준선은 y축$(x=0)$이다.



원 $(x-7)^2 + (y+1)^2 = 9$의 중심 C의 좌표는 $(7,\ -1)$이므로 $\overline{AC} = 5$

직선 l과 원의 접점을 D라 하면 $\overline{CD} = 3$ $\therefore$ $\overline{AD} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

점 B의 좌표를 $(p,\ q)$라 하고 $\overline{BD} = a$라 하자.

점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{BH} = \overline{AB}$이므로

$p = 4 + a$ …… ㉠

삼각형 BDC에서 $\overline{BC}^2 = 3^2 + a^2$이므로 $(p-7)^2 + (q+1)^2 = 9 + a^2$ …… ㉡

점 B는 포물선 위의 점이므로 $(q+1)^2 = 4(p-1)$ …… ㉢

㉠, ㉢을 ㉡에 대입하면 $(p-7)^2 + 4(p-1) = 9 + (p-4)^2$, $p^2 - 10p + 45 = p^2 - 8p + 25$, $2p = 20$

$\therefore\ p = 10$ $\therefore$ $\overline{AB} = p = 10$

[다른 풀이]

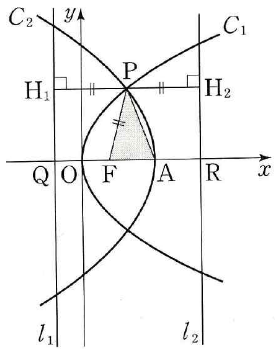
직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은 $y+1=m(x-2)$
즉, $mx-y-2m-1=0$
원의 중심 $\mathrm{C}(7,\ -1)$에서 직선 l에 이르는 거리가 3이므로 $\dfrac{|5m|}{\sqrt{m^2+1}}=3$
양변을 제곱하여 정리하면 $25m^2=9(m^2+1)$, $m^2=\dfrac{9}{16}$ $\quad\therefore\ m=\dfrac{3}{4}\ (\because\ m>0)$
따라서 직선 l의방정식은 $y+1=\dfrac{3}{4}(x-2)$이고 포물선 $(y+1)^2=4(x-1)$과의 교점의 좌표를 구하면 $\dfrac{9}{16}(x-2)^2=4(x-1)$
$9x^2-100x+100=0$, $\ (x-10)(9x-10)=0$ $\qquad\therefore\ x=\dfrac{10}{9}$ 또는 $x=10$
따라서 점 B의 좌표는 $(10,\ 5)$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{8^2+6^2}=10$

29) **정답** ②
두 점 P, Q의 x좌표를 각각 $x_1,\ x_2$라 하면 $x_1,\ x_2$는 이차방정식 $\{2(x-p)\}^2=4px$ $\quad$ 즉, $x^2-3px+p^2=0$의 두 근이다.
따라서 근과 계수와의 관계에 의하여 $x_1+x_2=3p$
점 A는 선분 PQ의 중점이므로 점 A의 x좌표는 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{3p}{2}$ 이고, 점 A의 y좌표는 $2\left(\dfrac{3}{2}p-p\right)=p$이다.
$\overline{\mathrm{AB}}=3$이므로 $p=3$
포물선 $y^2=4px$의 초점을 $\mathrm{F}(p,\ 0)$이라 하면 직선 $y=2(x-p)$는 점 F를 지난다.
두 점 P, Q에서 포물선 $y^2=4px$의 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1},\ \mathrm{H_2}$라 하면 포물선의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH_1}}=x_1+p$, $\quad\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{QH_2}}=x_2+p$
$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}\ =(x_1+p)+(x_2+p)\ =x_1+x_2+2p\ =5p\ (\because\ x_1+x_2=3p)\ =5\times3\ =15$

[다른 풀이]
두 점 P, Q의 x좌표를 각각 $x_1,\ x_2$라 하면 $x_1,\ x_2$는 이차방정식 $\{2(x-p)\}^2=4px$
즉 $x^2-3px+p^2=0$의 두 근이다.
따라서 근과 계수와의 관계에 의하여 $x_1+x_2=3p$
점 A는 선분 PQ의 중점이므로 점 A의 x좌표는 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{3p}{2}$
이다. 또 $\overline{\mathrm{AB}}=3$이므로 점 A의 y좌표는 3이고, $3=2(x-p)$에서 $x=\dfrac{3}{2}+p$이므로 점 A의 x좌표는 $\dfrac{3}{2}+p$이다.
$\dfrac{3}{2}p=\dfrac{3}{2}+p$에서 $p=3$
세 점 P Q, A에서 포물선 $y^2=4px$의 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1},\ \mathrm{H_2},\ \mathrm{H}$라 하면
$\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{3}{2}+p+p=\dfrac{3}{2}+3+3=\dfrac{15}{2}$이고 직선 $y=2(x-p)$가 포물선의 초점 $\mathrm{F}(p,\ 0)$을 지나므로
$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{PH_1}}+\overline{\mathrm{QH_2}}\ =2\overline{\mathrm{AH}}=2\times\dfrac{15}{2}=15$

30) 정답 ⑤
두 포물선 $C_1,\ C_2$의 준선을 각각 $l_1,\ l_2$라 하고 점 P에서 $l_1,\ l_2$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1},\ \mathrm{H_2}$라 하자.
점 F의 좌표가 $(3,\ 0)$이므로 준선 l_1의 방정식 $x=-3$이다.
점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 $\overline{\mathrm{PH_1}}=\overline{\mathrm{PF}}=8$에서 $x_1-(-3)=8$ $\quad\therefore\ x_1=5$
포물선 C_1의 방정식은 $y^2=12x$이므로 ${y_1}^2=12x_1=60$에서 $y_1=2\sqrt{15}\ (\because\ y_1>0)$
$\overline{\mathrm{FA}}=k$라 하고, 준선 $l_1,\ l_2$와 x축의 교점을 각각 Q, R라 하면 $\overline{\mathrm{AR}}=\overline{\mathrm{FA}}=k$이므로 $\overline{\mathrm{QR}}=6+2k$
한편 $\overline{\mathrm{H_1H_2}}\ =\overline{\mathrm{H_1P}}+\overline{\mathrm{PH_2}}\ =8+8\ =16$
이므로 $6+2k=16$에서 $k=5$

따라서 구하는 삼각형 PFA의 넓이는 $\frac{1}{2}\times5\times2\sqrt{15}=5\sqrt{15}$



31) 정답 5

중심이 C_1위에 있고 점 F_1을 지나는 원을 k_1이라 하고

포물선 $x^2=4y$위의 원 k_1의 중심을 Q_1이라 하면

포물선의 정의에 의하여 $\overline{Q_1F_1}=k_1$의 반지름 $=$ (Q_1으로부터 준선 $y=-1$에 이르는 거리)이므로 원 k_1은 준선 $y=-1$에 접한다. 따라서 원 k_1위의 점 P 의 y 좌표$\geqq -1$이다.

같은 방법으로 중심이 C_2 위에 있고 점 F_2 를 지나는 원을 k_2 라 하고 포물선 $y^2=8x$위의 원k_2의 중심을 Q_2라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{Q_2F_2}=k_2$ 의 반지름$=$(Q_2 로부터 준선 $x=-2$ 까지의 거리)이므로 원 k_2 는 준선 $x=-2$ 에 접한다. 따라서 원 k_2 위의 점 P 의 x 좌표 $\geqq -2$ 이다. 따라서 두 원 k_1, k_2 의 교점 P 는 x 좌표 ≥ -2, y좌표 ≥ -1 이므로

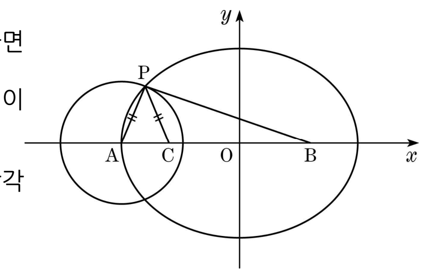
(나) 조건에 의하여 3사분면에서 $\overline{\mathrm{OP}}$ 가 최대일 때는 P 가

$(-2,\ -1)$ 에 있을 때이다. $\mathrm{P}(-2,\ -1)$ 을 지나고 준선에 접하는 두 원이

$(x+2)^2+(y-1)^2=4$과 $\left(x-\frac{1}{8}\right)^2+(y+1)^2=\left(\frac{17}{8}\right)^2$로 존재하므로 $\mathrm{P}(-2,\ -1)$ 은 조건을 만족한다.

따라서 $\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최댓값은 $\sqrt{5}$ 이고 $\overline{\mathrm{OP}}^2$ 의 최댓값은 5 이다.

32) 정답 26



타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점의 좌표를 각각 $(c,0)$, $(-c,0)$ (단, $c>0$)이라 하면

$c^2=25-16=9$에서 $c=3$ 따라서 점 B 는 타원의 한 초점이고 다른 한 초점은 $\mathrm{C}(-3,\ 0)$ 이다. $\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}=10$ 이고, $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=10$ 이므로 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PC}}$

타원의 장축의 길이는 10이므로 점 A의 좌표는 $(-5,0)$이다. 즉, 삼각형 PAC 는 이등변삼각형이므로 점 P의 x좌표는 -4이다.

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 에서 $y^2=16\left\{1-\frac{(-4)^2}{25}\right\}$, $y=\frac{12}{5}$ 또는 $y=-\frac{12}{5}$

$\mathrm{P}\left(-4,\ \frac{12}{5}\right)$ 또는 $\mathrm{P}\left(-4,\ -\frac{12}{5}\right)$ 이므로 $r=\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{(-5+4)^2+\left(0-\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{13}{5}$ $\therefore\ 10r=26$

33) 답. 180

원점에서 $\overline{PF'}$에 내린 수선의 발을 I'이라 하면 $F'O:F'F=1:2$이므로 $\Delta F'OI'$과 $\Delta F'FP$는 $1:2$ 닮음 $\therefore \overline{F'I'}=\overline{I'P}$

때문에 I'은 I의 대칭점 P는 Q의 대칭점이라 할 수 있다. $\therefore OI'=OI$

$\overline{PF}=a$라 하면 $\overline{OI'}=\frac{a}{2}$, $\overline{PF'}=b$라 하면 $\overline{OI'}=\overline{OH}=\frac{b}{2}$, $\frac{a}{2}\times\frac{b}{2}=10$에서 $ab=40$

닮음조건에서 $\angle F'PF=\angle OHF=\frac{\pi}{2}$ 피타고라스정리에 의해 $a^2+b^2=100$

장축의 길이는 $a+b$이므로 $l^2=(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=180$

34) **정답** 500

두 점 F, Q의 좌표는 각각 $\mathrm{F}(p,0)$, $\mathrm{Q}(-p,0)$이고 점 Q가 선분 F′F의 중점이므로 점 F′의 좌표는 $(-3p,0)$이다.

$\overline{\mathrm{PF}}=k$라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PH}}=k$이고, $\overline{\mathrm{F'Q}}=2p$, $\overline{\mathrm{QR}}=k$이므로 삼각형$\mathrm{PF'R}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(2p+k)\times4\sqrt{5}=38\sqrt{5}$

$2p+k=19$ ……㉠

타원의 장축의 길이가 30이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=30$에서 $\overline{\mathrm{PF'}}=30-k$

직각삼각형$\mathrm{PF'R}$에서 $\overline{\mathrm{PF'}}^2=\overline{\mathrm{F'R}}^2+\overline{\mathrm{PR}}^2$이므로 $(30-k)^2=(2p+k)^2+(4\sqrt{5})^2$

㉠에서 $2p+k=19$이므로 $(30-k)^2=361+80=441$, $30-k=21$ $\therefore k=9$ ㉠에서 $p=5$

따라서 주어진 타원을 x축의 방향으로 5만큼 평행이동한 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$이라 하면 $2a=30$에서

$a=15$이고 두 초점의 좌표가 $(10,0)$, $(-10,0)$이므로 $a^2-b^2=10^2$에서 $b^2=15^2-10^2=125$

$b>0$이므로 $b=5\sqrt{5}$

따라서 주어진 타원의 단축의 길이 m은 $m=2b=2\times5\sqrt{5}=10\sqrt{5}$ $\therefore m^2=500$

35) 정답 : ②

타원위의 임의의 점은 두 초점으로부터 거리의 합이 장축의 길이와 같으므로 작은 타원에서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}$ … (1)

이 성립하고, 큰 타원에서 $\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{AD}}=2\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}$ … (2)

이 성립한다. 따라서, 식 (2)에서 식 (1)을 빼면 $\overline{\mathrm{CP}}-\overline{\mathrm{AP}}=(2\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}})-(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}})=\overline{\mathrm{AB}}$

36) 정답 105

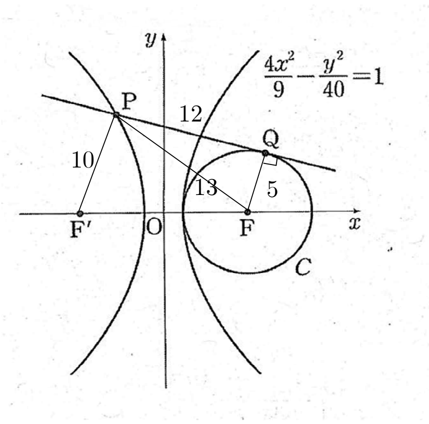
타원의 정의에 의하여 $\overline{FP}+\overline{F'P}=10$이므로 $\overline{FP}=10-\overline{F'P}$

$\overline{AP}-\overline{FP}=\overline{AP}-(10-\overline{F'P})=\overline{AP}+\overline{F'P}-10\geq\overline{AF'}-10$

$\overline{AP}-\overline{FP}$의 최솟값이 1이므로 $\overline{AF'}=11$, $F'(-4,0)$이므로

$\overline{AF'}=\sqrt{16+a^2}=11$, $16+a^2=121$에서 $a^2=105$

37) 정답 ①



$\dfrac{x^2}{\frac{9}{4}}-\dfrac{y^2}{40}=1$에서 원 C와 쌍곡선의 교점은 $\mathrm{R}\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$이다.

$\mathrm{F}(c,\ 0)$이라 두면 $c^2=\frac{9}{4}+40=\frac{169}{4}=\left(\frac{13}{2}\right)^2$ $\therefore \mathrm{F}\left(\frac{13}{2},\ 0\right)$

따라서, 원 C의 반지름의 길이 $r=\frac{13}{2}-\frac{3}{2}=5$

$\overline{\mathrm{PF}}^2=\overline{\mathrm{PQ}}^2+\overline{\mathrm{FQ}}^2=12^2+5^2=13^2$ $\left(\because \angle PQF=\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{PF}}=13$ 쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PF}}-3=10$

38) 답 : 13

쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 주축의 길이는 $2\times4=8$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'}-\overline{PF}=\overline{QF}-\overline{QF'}=8$

$\therefore$ $\overline{PF'}=\overline{PF}+8$ … ㉠ $\overline{QF'}=\overline{QF}-8$ … ㉡

㉠-㉡에서 $\overline{PF'}-\overline{QF'}=\overline{PF}-\overline{QF}+16$

$\overline{PF'}-\overline{QF'}=3$ 이므로 $\overline{QF}-\overline{PF}=16-3=13$

39) 답 : ④

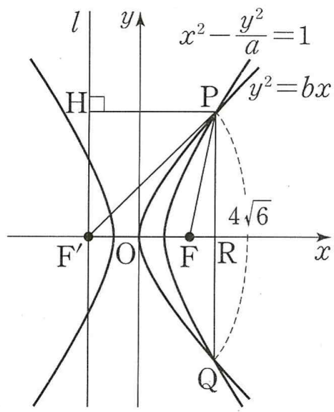
$|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=10$이므로 $a=5$이다.

$y^2=4\times14(x+c)$ 이므로 $\overline{\mathrm{AF}}=14$이다.

$\overline{\mathrm{AF'}}:\overline{\mathrm{FF'}}=1:6$ 이므로 $\overline{\mathrm{AF'}}=2$, $\overline{\mathrm{FF'}}=12$ 이다.

$\dfrac{c^2}{a^2-b^2}=\dfrac{64}{25-11}=\dfrac{32}{7}$

40) **정답** 11



쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{a}=1$의 두 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 0)$, $(-1,\ 0)$이므로 주축의 길이는 2이다.

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2$이므로 $\overline{\mathrm{PF}}=k$라 하면 $\overline{\mathrm{PF'}}=k+2$

포물선 $y^2=bx$의 준선 l은 점 F′을 지나고, 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PF}}=k$

두 점 P, Q는 x축에 대하여 대칭이므로 선분 PQ가 x축과 만나는 점을 R라 하면

$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{HF'}}=2\sqrt{6}$

따라서 삼각형 PHF′에서 $(k+2)^2=k^2+(2\sqrt{6})^2$, $k^2+4k+4=k^2+24$ $\quad\therefore\ k=5$

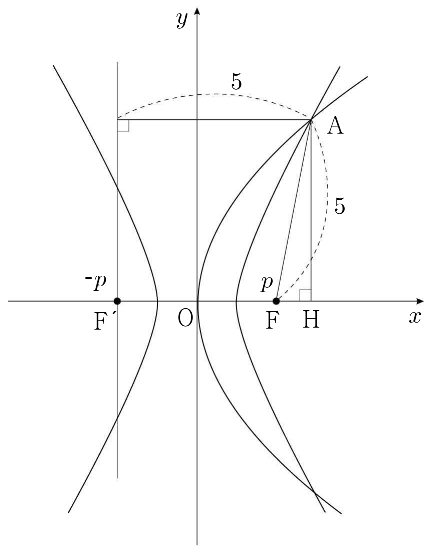
삼각형 PFR에서 $\overline{\mathrm{FR}}=\sqrt{5^2-(2\sqrt{6})^2}=1$이므로 $\overline{\mathrm{F'F}}=5-1=4$

따라서 점 F의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.

점 $\mathrm{F}(2,\ 0)$이 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{a}=1$의 초점이므로 $1+a=2^2$에서 $a=3$

점 $\mathrm{F}(2,\ 0)$이 포물선 $y^2=bx$의 초점이므로 $b=4\times2=8$ $\quad\therefore\ a+b=11$

41) 답. ②



점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면, $\cos(\angle\mathrm{AFH})=\dfrac{1}{5}$이므로 $\overline{\mathrm{FH}}=1$

포물선의 정의에 의하여 $2p+1=5$ $\quad\therefore p=2$

$\mathrm{A}(3,2\sqrt{6})$이므로 $\overline{\mathrm{AF'}}=7$

쌍곡선의 정의에 의하여 $|\overline{\mathrm{AF'}}-\overline{\mathrm{AF}}|=2a=2$

$a=1, b=\sqrt{3}$ $\quad\therefore ab=\sqrt{3}$

42) 정답 : ②

쌍곡선의 꼭지점 A, B는 각각 $(3,0)$, $(-3,0)$ 이다. 직선 $x=t$ $(t>3)$와 쌍곡선의 교점을 C, D라 하면

$$C\left(t,\ \frac{\sqrt{4t^2-36}}{3}\right),\ D\left(t,\ \frac{\sqrt{4t^2-36}}{3}\right)$$

이므로 직선 AC와 직선 BD는 각각

$$y=\frac{2\sqrt{t^2-9}}{3(t+3)}(x+3)\ ,\ y=-\frac{2\sqrt{t^2-9}}{3(t+3)}(x-3)$$

두 직선의 교점을 $P(X,Y)$ 라 하면

$$\frac{2\sqrt{t^2-9}}{3(t+3)}(X+3)=-\frac{2\sqrt{t^2-9}}{3(t+3)}(X-3)$$

관계로부터

$$X=\frac{9}{t}\ \cdots\ (1),\ \ Y=-\frac{2\sqrt{t^2-9}}{3(t+3)}(X-3)\ \cdots\ (2)$$

$t=\dfrac{9}{X}$ 를 식 (2)에 대입하여 정리하면

$\dfrac{X^2}{9}+\dfrac{Y^2}{4}=1$

따라서 두 초점사이의 거리는 $2\sqrt{5}$ 이다.

43) 정답 14

$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$이라 두면 접선 $y_1y=8(x+x_1)$

$x=0$이면 $y=\dfrac{8x_1}{y_1}$, y축과 교점 $\mathrm{D}\left(0,\ \dfrac{8x_1}{y_1}\right)$

${y_1}^2=16x_1$이므로 $\dfrac{y_1}{2}=\dfrac{8x_1}{y_1}$ $\therefore\ \mathrm{D}\left(0,\ \dfrac{y_1}{2}\right)$

따라서, $\Delta\ \mathrm{OAD}$의 무게중심

$\mathrm{B}\left(\dfrac{0+0+x_1}{3},\ \dfrac{0+\dfrac{y_1}{2}+y_1}{3}\right)=\left(\dfrac{x_1}{3},\ \dfrac{y_1}{2}\right)$

$\dfrac{x_1}{3}=x$, $\dfrac{y_1}{2}=y$라 두면 $x_1=3x$, $y_1=2y$, ${y_1}^2=16x_1$이므로 $4y^2=16\times 3x$ 따라서, $y^2=12x$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}=(3+x_1)+(3+x_2)=20$

$x_1+x_2+6=20$ $\therefore\ x_1+x_2=14$

44) 해설코드 : HIH3201409EE11

정답 ①

꼭짓점의 좌표가 $(0,\ 0)$이고 초점이 $(a_n,\ 0)$인 포물선은

$y^2=4a_nx$이고 기울기가 n인 접선의 방정식은 $y=nx+\dfrac{a_n}{n}$이다. 따라서 $\dfrac{a_n}{n}=n+1$이고 $a_n=n(n+1)$이다.

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{5}a_n=\sum_{n=1}^{5}n(n+1)=70$

45) **정답** ③

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$의 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$이고 점근선은 $l_1: y=\dfrac{4}{3}x$, $l_2: y=-\dfrac{4}{3}x$ 이다.

또 쌍곡선은 두 곡선을

$C_1: \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1\ \ (x\geq 3)$

$C_2: \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1\ \ (x\leq -3)$로 구분하자

ㄱ. 직선 $y=\dfrac{4}{3}(x-k)$는 점근선 $y=\dfrac{4}{3}x$를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이므로 곡선 C_1 또는 곡선 C_2와 한 점에서 만나며 두 곡선 C_1, C_2와 동시에 만나지는 않는다.

즉, 쌍곡선과 한 점에서 만난다. (참)

ㄴ. 점$(1,\ 0)$에서 곡선 C_2에 접선을 그으려면 점근선과 만나게 되므로 접선을 그을 수 없다.

또 점$(1,\ 0)$에서 곡선C_1에 두 개의 접선을 그을 수 있다.

그러므로 점$(1, 0)$에서 쌍곡선을 그을 수 있는 접선은 2개이다.(거짓)

ㄷ. (i) $a>0$일 때,, 점$(0,\ a)$에서 곡선C_1에 그은 접선의 기울기가 m_1이면 접선이 점근선 l_2와 제4사분면에서 만나므로

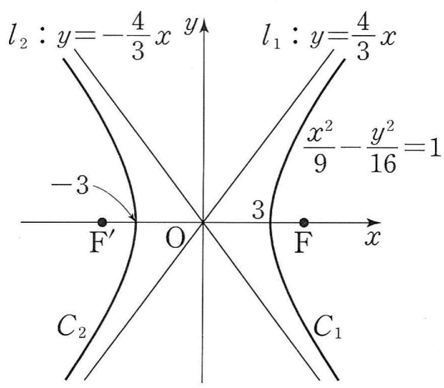
$m_1<-\dfrac{4}{3}$

점$(0,\ a)$에서 곡선C_2에 그은 접선의 기울기가 m_2이면 접선이 점근선 l_1과 제3사분면에서 만나므로

$m_2 > \frac{4}{3}$

$\therefore\ |m_1| > \frac{4}{3},\ |m_2| > \frac{4}{3}$

(ii) $a<0$일 때, (i)과 같은 방법으로 $|m| > \frac{4}{3}$이다.



(i), (ii)에 의하여 $|m| > \frac{4}{3}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

46)

쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{18}=1$의

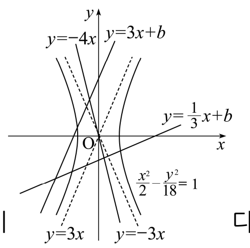
점근선의 방정식은 $y=\pm 3x$이다.

ㄱ. $a=-4,\ b=0$이면 교점 0개

ㄴ. $a=3,\ b>0$이면

점근선과 평행이므로 교점 1개

ㄷ. $a=\frac{1}{3},\ b<0$이면 교점이 2 개이 다.



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

47) 답 : ③

쌍곡선 $x^2-y^2=1$에서

ㄱ. 점근선의 방정식은 $y=\pm x$이다. (참)

ㄴ. 쌍곡선 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$x_1x-y_1y=1 \quad \therefore\ y=\frac{x_1}{y_1}x-\frac{1}{y_1}$

이 접선이 점근선과 평행하려면 $\frac{x_1}{y_1}=1$ 또는 $\frac{x_1}{y_1}=-1$

즉, $x_1=\pm y_1$ 이어야 한다.

이 때, 점 (x_1, y_1)은 점근선 $y=\pm x$위의 점이어야 하므로 모순이다.

따라서 쌍곡선 위의 점에서 그은 접선 중 점근선과 평행한 접선은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $y^2=4px$를 $x^2-y^2=1$에 대입하여 정리하면

$x^2-4px-1=0$

이 때 $\frac{D}{4}=(2p)^2-(-1)=4p^2+1>0$

이므로 포물선과 쌍곡선의 교점은 항상 2개이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

48) 정답 ⑤

포물선 $y^2=8x$ 의 준선의 방정식은 $x=-2$이고,

점 P에서 준선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 R라 하면 포물선의 정리에 의하여 $\overline{PR}=\overline{PF}=6$이다.

점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면

$x_1=6-2=4$

${y_1}^2=8\times 4=32$

$\therefore\ y_1 = 4\sqrt{2}$ ($\because\ y_1 > 0$)

따라서 점 $\mathrm{P}(4,\ 4\sqrt{2})$에서의 접선 l의 방정식은

$4\sqrt{2}y = 4(x+4)$, 즉 $x - \sqrt{2}y + 4 = 0$

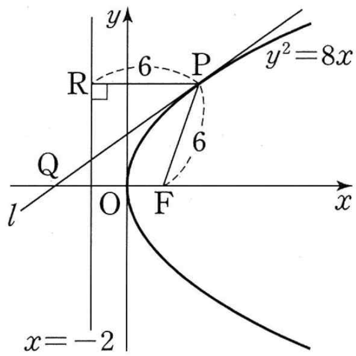
이므로 점 Q의 좌표는 $(-4,\ 0)$이고,

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{8^2 + (4\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{6}$

$\overline{\mathrm{QF}} = 2 - (-4) = 6$

따라서 삼각형 PQF에서

$\cos(\angle \mathrm{PQF}) = \dfrac{(4\sqrt{6})^2 + 6^2 - 6^2}{2 \times 4\sqrt{6} \times 6} = \dfrac{96}{48\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$



49) **정답** ③

타원의 장축의 길이가 $2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$이므로 $\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} = 4\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{PF}} = 3\sqrt{2}$이므로 $\overline{\mathrm{PF'}} = \sqrt{2}$

타원의 두 초점의 좌표를 각각 $\mathrm{F}(c, 0), \mathrm{F'}(-c, 0)$ $(c > 0)$이라 하면

$c^2 = 8 - 4 = 4$에서 $c = 2$이므로 $\overline{\mathrm{FF'}} = 4$

삼각형 $\mathrm{PF'F}$에서 $\overline{\mathrm{PF'}}^2 + \overline{\mathrm{F'F}}^2 = (\sqrt{2})^2 + 4^2 = 18$,

$\overline{\mathrm{PF}}^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18$이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}^2 + \overline{\mathrm{F'F}}^2 = \overline{\mathrm{PF}}^2$

따라서 $\angle \mathrm{PF'F} = 90°$이므로 점 P의 좌표는 $(-2,\ \sqrt{2})$이다.

점 P에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{-2x}{8} + \dfrac{\sqrt{2}y}{4} = 1$,

즉, $-\dfrac{1}{4}x + \dfrac{\sqrt{2}}{4}y = 1$이므로 $y = 0$일 때, $x = -4$

따라서 점 Q의 좌표는 $(-4, 0)$이고, $\overline{\mathrm{QF'}} = -2 - (-4) = 2$이므로

구하는 삼각형 $\mathrm{PQF'}$의 넓이는 $\dfrac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$

50) 답. ①

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a} - \dfrac{4y^2}{a} = 1\ (a > 0)$ 위의 점 $(b,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{bx}{a} - \dfrac{4y}{a} = 1,\ y = \dfrac{b}{4}x - \dfrac{a}{4}$ ……㉠

이 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$y = \pm\dfrac{1}{2}x$ ……㉡

㉠, ㉡이 서로 수직이므로 $\dfrac{b}{4} \times \left(\pm\dfrac{1}{2}\right) = -1$에서 $b > 0$

이므로 $b = 8,\ a = 60$ $\quad \therefore a + b = 68$

51) **정답** ②

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{y^2}{30} = 1$의 두 초점의 좌표는 $(6,\ 0)$, $(-6,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{FF'}} = 12$

점P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 삼각형 $\mathrm{PF'F}$의 넓이는 $\dfrac{1}{2} \times 12 \times b = 30\sqrt{2}$ $\quad \therefore\ b = 5\sqrt{2}$

점$(a,\ b)$는 쌍곡선의 위의 점이므로 $\dfrac{a^2}{6} - \dfrac{y^2}{30} = 1$

$b = 5\sqrt{2}$를 대입하면 $\dfrac{a^2}{6} - \dfrac{5}{3} = 1$, $\dfrac{a^2}{6} = \dfrac{8}{3}$, $a^2 = 16$

$\therefore\ a=4 \qquad (\because\ a>0)$

따라서 점 $\mathrm{P}(4,\ 5\sqrt{2})$에서의 접선의 방정식은 $\frac{4x}{6}-\frac{5\sqrt{2}y}{30}=1$, 즉 $y=2\sqrt{2}x-3\sqrt{2}$

이므로 접선이 x축과 만나는 점의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$이고 접선의 기울기는 $2\sqrt{2}$이다.

쌍곡선 $\frac{(x-m)^2}{4}-\frac{y^2}{n}=1$의 점근선은 쌍곡선의 중심 $(m,\ 0)$을 지나므로 $m=\frac{3}{2}$

쌍곡선 $\frac{(x-m)^2}{4}-\frac{y^2}{n}=1$의 점근선의 기울기는 $\pm\frac{\sqrt{n}}{2}$이므로 $\frac{\sqrt{n}}{2}=2\sqrt{2}$에서 $\sqrt{n}=4\sqrt{2} \quad \therefore\ n=32$

$\therefore\ mn=\frac{3}{2}\times 32=48$

52) 답 : 32

접선 l 의 방정식은 $-6x-2y=32,\ 3x+y=-16\cdots$㉠

원점을 지나면서 ㉠과 수직인 직선의 방정식은

$-x+3y=0,\ x-3y=0\cdots$㉡

㉠,㉡에서 $H(-\frac{24}{5},-\frac{8}{5})$

또한, 쌍곡선 $x^2-y^2=32$와 ㉡의 교점은 $Q(6,2)$ 이다.

$\therefore\ \overline{OH}\cdot\overline{OQ}$

$=\sqrt{(-\frac{24}{5})^2+(-\frac{8}{5})^2}\times\sqrt{6^2+2^2}=\frac{8\sqrt{10}}{5}\times 2\sqrt{10}=32$

53) **정답** 13

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(2\sqrt{2},\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{2\sqrt{2}x}{4}-\frac{2y}{4}=1$,

즉 $y=\sqrt{2}x-2$이므로 점 A의 좌표는 $(\sqrt{2},\ 0)$이다.

쌍곡선의 주축의 길이가 $2\times 2=4$이므로

$\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{QF}'}=4$

$\overline{\mathrm{QF}'}=1$이므로 $\overline{\mathrm{QF}}=5$

쌍곡선의 두 초점의 좌표가 $\mathrm{F}(2\sqrt{2},\ 0)$, $\mathrm{F}'(-2\sqrt{2},\ 0)$이므로

삼각형 $\mathrm{QF'F}$에서 $\overline{\mathrm{F'F}}=4\sqrt{2}$이고 $\angle\mathrm{QF'F}=\theta$라 하면

$\cos\theta=\frac{1^2+(4\sqrt{2})^2-5^2}{2\times 1\times 4\sqrt{2}}=\frac{8}{8\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

삼각형 $\mathrm{QF'A}$에서 $\overline{\mathrm{F'A}}=\sqrt{2}-(-2\sqrt{2})=3\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{QA}}^2=1^2+(3\sqrt{2})^2-2\times 1\times 3\sqrt{2}\times\cos\theta$

$\quad =1+18-6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\quad =13$

54) 정답 ④

두 직선 l_1, l_2의 기울기 $m_1, m_2(m_1<m_2)$가 방정식

$2x^2-3x+1=0$의 두근 이므로

$2x^2-3x+1=(2x-1)(x-1)=0$에서 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

$\therefore\ m_1=\dfrac{1}{2},\ m_2=1$ 즉, 두 직선 $l_{1,}\ l_2$의 기울기는 각각 $\dfrac{1}{2}$, 2라고 할 수 있다. 두 직선 $l_{1,}\ l_2$는 포물선 $y^2=8x=4\times 2x$의 접선이므로

(i)기울기 $m_1=\dfrac{1}{2}$인 접선 l_1의 방정식은

$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{2}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}x+4$ ……㉠

(ii) 기울기 $m_2=1$인 접선 l_2의 방정식은 $y=x+2$ ……㉡

두 직선의 방정식 ㉠, ㉡을 연립하면

$x=4$, 따라서 구하는 교점의 x좌표는 4이다.

55) 정답 ④

포물선 $y^2=-4p(x-a)$는 포물선 $y^2=-4px$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로 점 P의 x좌표를 x_1이라 하면 두 곡선 $y^2=4px,\ y^2=-4p(x-a)$는 직선 $x=x_1$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 접선 $l,\ m$도 직선 $x=x_1$에 대하여 대칭이고, $l\perp m$이므로 직선 $l,\ m$의 기울기는 각각 $1,\ -1$이다.

포물선 $y^2=4px$의 기울기 1인 접선 l의 방정식은 $y=x+p$이므로 점 P의 좌표를 구하면

$(x+p)^2=4px$

$x^2-2px+p^2=0$

$(x-p)^2=0$

$\therefore\ x=p$

$y=x+p=p+p=2p$

따라서 점 P의 좌표는 $(p,\ 2p)$이므로 직선 OP기울기는 $\dfrac{2p}{p}=2$이다.

56) 정답 ④

두 직선 l_1,l_2의 기울기 $m_1,m_2(m_1<m_2)$가 방정식

$2x^2-3x+1=0$의 두근 이므로

$2x^2-3x+1=(2x-1)(x-1)=0$에서 $x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=1$

$\therefore\ m_1=\dfrac{1}{2},\ m_2=1$ 즉, 두 직선 $l_{1,}\ l_2$의 기울기는 각각 $\dfrac{1}{2}$, 2라고 할 수 있다. 두 직선 $l_{1,}\ l_2$는 포물선 $y^2=8x=4\times 2x$의 접선이므로

(i)기울기 $m_1=\dfrac{1}{2}$인 접선 l_1의 방정식은

$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{2}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}x+4$ ……㉠

(ii) 기울기 $m_2=1$인 접선 l_2의 방정식은 $y=x+2$ ……㉡

두 직선의 방정식 ㉠, ㉡을 연립하면

$x=4$, 따라서 구하는 교점의 x좌표는 4이다.

57) 답 : 17

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 초점의 좌표가 $(\pm b,\ 0)$이므로

$a^2-b^2=b^2\quad\therefore\ a^2=2b^2$ … ㉠

또, 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 $\dfrac{1}{2}$인 접선의 y절편이 ±1이므로 $\pm\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+b^2}=\pm 1$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a^2=\frac{4}{3}$, $b^2=\frac{2}{3}$

$\therefore\ a^2b^2=\frac{8}{9}$ $\quad\therefore\ p+q=17$

58) 정답 ③

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{k}=1$의 주축의 길이가 4이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PF}}=4$이고 $\overline{\mathrm{PF}'}=6$이므로 $\overline{\mathrm{PF}}=2$

삼각형 $\mathrm{PF'F}$에서 $\angle\mathrm{F'PF}$의 크기를 이등분하는 직선 l이 변$\mathrm{F'F}$와 만나는 점을 Q라 하면

$\overline{\mathrm{PF}'}:\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{F'Q}}:\overline{\mathrm{QF}}$이므로 $\overline{\mathrm{F'Q}}:\overline{\mathrm{QF}}=3:1$

따라서 두 초점의 좌표가 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$이므로

점 Q의 좌표는 $\left(\frac{c}{2},\ 0\right)$이다.

한편 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{k}=1$의 접선 l의 기울기가 2이므로

접선 l의 방정식은

$y=2x-\sqrt{4\times4-k}$

$\ \ =2x-\sqrt{16-k}$

$y=0$일 때, $x=\frac{\sqrt{16-k}}{2}$이므로

$\frac{c}{2}=\frac{\sqrt{16-k}}{2}$에서 $c=\sqrt{16-k}$

쌍곡선의 방정식에서 $c^2=4+k$이므로

$(\sqrt{16-k})^2=4+k$

$16-k=4+k$

$\therefore\ k=6$

59) 정답 ⑤

점 B의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 점 B에서의 접선의 방정식은 $y_1y=2(x+x_1)$이고 접선이 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$을 지나므로

$0=2(-2+x_1)$에서

$x_1=2$

${y_1}^2=4x_1=4\times2=8$에서

$y_1=2\sqrt{2}$ $(\because\ y_1>0)$

따라서 점 B의 좌표는 $(2,\ 2\sqrt{2})$이므로

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$

60) 답. 32

접점의 좌표를 (x_1,y_1)이라 하면 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{8}+\frac{y_1y}{2}=1$이고 이 직선이 점 $(0,2)$를 지나므로

$\frac{2y_1}{2}=1$에서 $y_1=1$

타원과 $y=1$을 연립시키면 $x=\pm2$

$P(-2,1)$, $Q(2,1)$ $\quad\therefore\overline{PQ}$의 길이는 4

타원의 다른 초점을 F'이라 하면 $\overline{FQ}=\overline{PF'}$에서

$\overline{PF}+\overline{FQ}=\overline{PF}+\overline{PF'}=4\sqrt{2}$ 구하는 길이는 $4\sqrt{2}+4$

$a^2+b^2=32$

메모 : $\overline{PF}+\overline{QF}=4\sqrt{2}$ 을 발견

61) **정답** ④

초점의 좌표를 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=48-12=36$에서 $c=6$이므로 $\overline{\mathrm{F'F}}=12$이고, $\overline{\mathrm{FQ}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{F'F}}=6$

따라서 점 Q의 좌표는 $(12, 0)$이다. 점P의 좌표를 (a, b)라 하면

점 P에서의 접선의 방정식은 $\frac{ax}{48}+\frac{by}{12}=1$이고,

$y=0$일 때, $x=\frac{48}{a}$이므로

$\frac{48}{a}=12$에서 $a=4$

점 $\mathrm{P}(4,\ b)$는 타원 $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점이므로 $\frac{1}{3}+\frac{b^2}{12}=1$에서

$b^2=8$, $b>0$이므로 $b=2\sqrt{2}$

따라서 삼각형 $\mathrm{PF'F}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times12\times2\sqrt{2}=12\sqrt{2}$

62) 정답 ②

$\mathrm{P}(k,\ 2)$로 두면 기울기가 m인 접선은 $y=mx\pm\sqrt{m^2+2}$이고 $\mathrm{P}(k,\ 2)$를 지나므로 $2=mk\pm\sqrt{m^2+2}$

$2-mk=\pm\sqrt{m^2+2}$, $k^2m^2-4mk+4=m^2+2$

$(k^2-1)m^2-4km+2=0$

두 근을 m_1, m_2라 두면 $m_1\times m_2=\frac{2}{k^2-1}=\frac{1}{3}$ $\therefore\ k^2=7$

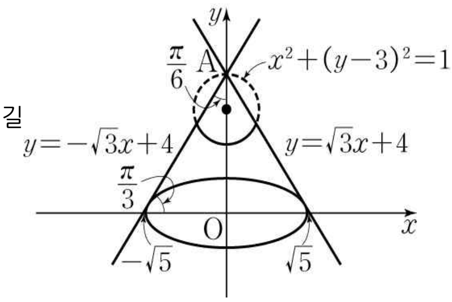
63) 답. ④

점 $\mathrm{A}(0,\ 4)$에서 타원 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{5m^2+1}$

이 접선이 점 $\mathrm{A}(0,\ 4)$를 지나므로 $4=\pm\sqrt{5m^2+1}$

$5m^2+1=16$, $m^2=3$ $\therefore$ $m=\pm\sqrt{3}$

이때, $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$이므로 다음 그림과 같이 점 Q는 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이고, 반지름의 길이가 2인 부채꼴의 호 위의 점이다.



따라서 점 Q가 나타내는 도형의 길이는 $\frac{\pi}{3}\times2=\frac{2}{3}\pi$

64) 답 : ④

65) [정답] 125

포물선 $y^2=16x$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(p,\ 4\sqrt{p})$ $(p>0)$라 하면 점 A에서의 접선의 방정식은

$4\sqrt{p}\,y=8(x+p)$, 즉 $y=\frac{2}{\sqrt{p}}(x+p)$

기울기가 $\frac{1}{2}$인 접선의 방정식이 되도록 하는 p의 값은

$\frac{2}{\sqrt{p}}=\frac{1}{2}$에서 $p=16$

따라서 점 $\mathrm{A}(16,\ 16)$이고 직선 l의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x+8$이다.

준선의 방정식이 $x=-4$이므로 직선 l과 준선의 교점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(-4,\ 6)$이다.
또한 포물선 $y^2=16x$ 위의 점 중 제4사분면에 있는 점 C의 좌표를 $\mathrm{C}(q,\ -4\sqrt{q})$ $(q>0)$라 하면 점 C에서의 접선의 방정식은

$-4\sqrt{q}y=8(x+q)$, 즉 $y=-\frac{2}{\sqrt{q}}(x+q)$ ⋯㉠

점 $\mathrm{B}(-4,\ 6)$이 직선㉠ 위에 있으므로

$6=-\frac{2}{\sqrt{q}}(-4+q)$, $3\sqrt{q}=4-q$ ⋯㉡

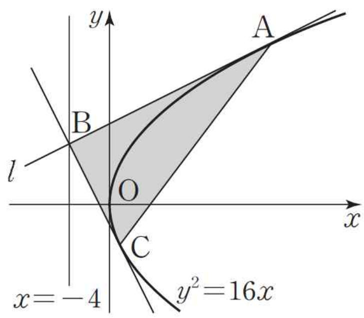
$q^2-8q+16=9q$, $q^2-17q+16=0$

$(q-1)(q-16)=0$ $\therefore$ $q=1$ 또는 $q=16$

㉡에 의하여 $q=1$

따라서 점 C의 좌표는 $\mathrm{C}(1,\ -4)$이고 접선의 방정식은

$y=-2x-2$ ⋯㉢



두 직선 l과 ㉢의 기울기가 각각 $\frac{1}{2}$, -2이므로 두 직선 l과 ㉢이 서로 수직이고 삼각형 ABC는 $\angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-4-16)^2+(6-16)^2}=\sqrt{500}=10\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(-4-1)^2+(6+4)^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times10\sqrt{5}\times5\sqrt{5}=125$

다른풀이

기울기가 $\frac{1}{2}$인 접선의 접점은 제1사분면에 있으므로 점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(a,\ 4\sqrt{a})$라 하면 포물선 $y^2=16x$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인

접선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x+8$ ⋯㉠

점 A에서의 접선의 방정식은

$4\sqrt{a}y=8(x+a)$, 즉 $y=\frac{2}{\sqrt{a}}(x+a)$ ⋯㉡

두 직선 ㉠과 ㉡은 일치하므로

$\frac{2}{\sqrt{a}}=\frac{1}{2}$에서 $a=16$

따라서 점 $\mathrm{A}(16,\ 16)$이다.

준선의 방정식이 $x=-4$이므로 직선 l과 준선의 교점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(-4,\ 6)$이다.

준선 위의 점 B에서 그은 두 접선은 서로 수직이므로 접점 C를 지나는 접선의 기울기는 -2이고, 점 $\mathrm{B}(-4,\ 6)$을 지나므로

$y-6=-2(x+4)$, 즉 $y=-2x-2$ ⋯㉢

㉢과 $y^2=16x$를 연립하면

$(-2x-2)^2=16x$, $x^2+2x+1=4x$, $x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$ $\therefore$ $x=1$

따라서 기울기가 -2인 접선의 접점은 제4사분면에 있으므로 점 C의 좌표는 $\mathrm{C}(1,\ -4)$이다.

삼각형 ABC는 $\angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-4-16)^2+(6-16)^2}=\sqrt{500}=10\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{(-4-1)^2+(6+4)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 10\sqrt{5}\times 5\sqrt{5} = 125$

66) 답 : ③

67) [정답] 25

타원 $4x^2+9y^2=36$, 즉 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 제1 사분면에 있는 점 P에서의 접선의 기울기를 m $(m<0)$이라 하면 이 접선의 방정식이 $y=mx+\sqrt{9m^2+4}$ 이므로 두 점 A, B의 좌표는 각각

$\mathrm{A}\left(-\frac{\sqrt{9m^2+4}}{m},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0,\ \sqrt{9m^2+4}\right)$ 이다.

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{\frac{9m^2+4}{m^2}+9m^2+4} = \sqrt{13+\frac{4}{m^2}+9m^2}$

$\frac{4}{m^2}>0$, $9m^2>0$ 이므로

$\frac{4}{m^2}+9m^2 \geq 2\sqrt{\frac{4}{m^2}\times 9m^2} = 12$

(단, 등호는 $\frac{4}{m^2}=9m^2$일 때 성립한다.)

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{13+\frac{4}{m^2}+9m^2} \geq \sqrt{13+12} = 5$

선분 AB의 길이가 최소일 때, 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이도 최소이므로 구하는 정사각형의 넓이의 최솟값은

$5\times 5=25$

촌철살인

다시 만나는 개념