

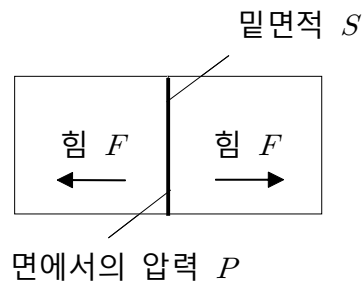
## 평형

4단원 역학 문제를 한 문장으로 나타내면, 평형 상태를 분석하는 것이라 할 수 있습니다. 평형 상태는 물체에 작용하는 모든 힘의 합력이 0인 상태를 뜻합니다.

그런데 1단원에서와는 달리, 4단원에는 힘의 연장선인 압력(유체역학)과 돌림힘(역학적 평형)의 개념이 추가된 평형을 다루어야 합니다. 그래서 비슷한 부분도 있고 다른 부분도 있습니다.

## 유체에서의 압력

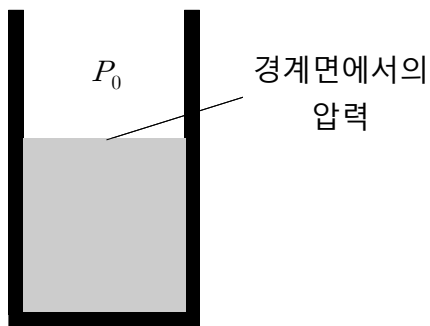
물리 I에서 유체의 압력  $P$ 는 면적  $S$ 만큼 맞대고 서로  $F$ 의 힘을 주고받고 있다는 것을 의미합니다. 이때  $P = \frac{F}{S}$ 입니다. 이를 그림으로 나타내보면 다음과 같습니다.



면에서의 압력은 이렇게 설명할 수 있고, 점에서의 압력은 그 점이 속한 아주 작은 면을 생각하면 됩니다. 중요한 것은 압력이 방향성을 가지지 않는다는 사실입니다.

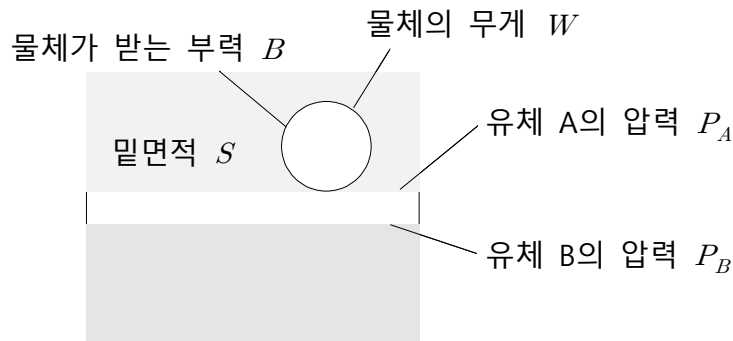
※ 정확한 정의는 아니지만, 물리 I 수준에서 압력을 쉽게 이해할 수 있는 방법입니다.

예시를 통해 조금 더 구체적으로 압력의 개념을 이해해봅시다. 우선 경계면에서의 압력에 대해서 알아보시다.

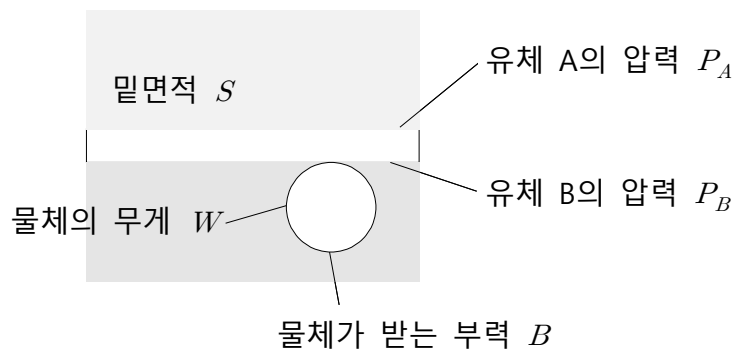


유체가 수조에 담겨 정지해 있을 때, 대기와 유체의 경계면에서의 압력은 대기압  $P_0$ 입니다. 면적을  $S$ 라 하면, 면을 통해 대기가 유체에 작용하는 힘의 크기는  $P_0S$ 이고, 그 반작용인 유체가 대기에 작용하는 힘의 크기도  $P_0S$ 입니다. 작용 반작용 때문에 서로 주고받는 힘의 크기는 같을 수밖에 없습니다.

한편, 피스톤에서의 압력은 조금 복잡합니다. 피스톤은 두께가 있는 없든 윗면과 아랫면에서의 유체 압력이 다를 수 있습니다. 두 면은 다른 면입니다.



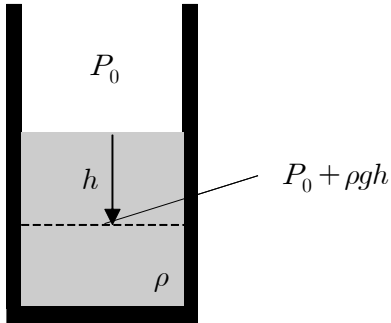
물체가 위에 있는 경우 피스톤에 작용하는 알짜힘이 0이므로, 유체 A, 유체 B, 물체가 피스톤에 작용하는 힘을 계산하여 밀면적으로 나누어줍니다. 압력 자체는 방향을 따지지 않지만, 압력이 있다는 것은 면을 기준으로 두 요소가 힘을 주고 받고 있다는 뜻이라는 점을 명심해야 합니다. 식을 세우면  $P_A S + (W - B) = P_B S$ ,  $P_A + \frac{W - B}{S} = P_B$ 입니다. 따라서 A의 압력에 물체에 의한 압력이 추가된 만큼이 B의 압력입니다.



물체가 밑에 있는 경우도 마찬가지로 피스톤에 작용하는 알짜힘이 0이므로, 유체 A, 유체 B, 물체가 피스톤에 작용하는 힘을 계산하여 밀면적으로 나누어줍니다. 식을 세우면  $P_A S = (B - W) + P_B S$ ,  $P_A - \frac{B - W}{S} = P_B$ 입니다. 따라서 A의 압력에 물체에 의한 압력을 빼준 만큼이 B의 압력입니다.

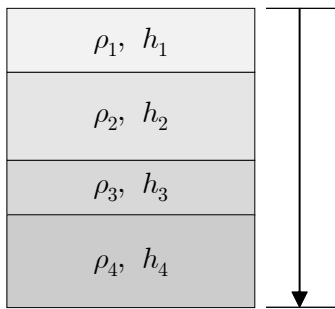
예를 들어 유압장치에서 피스톤(면적  $S$ ) 위에 물체(무게  $W$ )가 놓여있는 경우가 있습니다. 대기압은  $P_0$ 이지만, 피스톤의 아랫면에서 유체의 압력은  $P_0 + \frac{W}{S}$ 이 됩니다. 피스톤 자체에 질량이 있는 경우도 마찬가지입니다.

지금까지 살펴본 유체의 압력을 **정압**이라고 합니다. 그런데 유체가 중력장 내에 있거나, 움직이고 있을 때는 **수압**이나 **동압**을 고려해주어야 합니다.



유체와 대기의 경계면(혹은 어떤 기준면)에서 유체의 압력(정압)이  $P_0$ 라면, 깊이  $h$ 만큼 내려온 면에서 유체의 압력(정압)은  $P_0 + \rho gh$ 입니다.  $\rho$ 는 유체의 밀도이고,  $g$ 는 중력 가속도입니다.

$\rho gh$ 에 따로 용어가 있지는 않으므로 편의상 이 글에서만 **수압**이라고 부르도록 하겠습니다. 깊이는 기준점이 있어야 하므로, 보통은 **수압차**를 계산하게 됩니다.

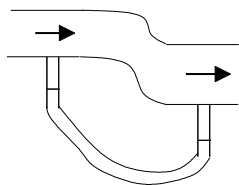


만약 유체가 여러 종류라면, 왼쪽 그림에서 꼭 대기과 바닥 사이의 **수압차**는 합  $\sum_{i=1}^4 \rho_i gh_i = \rho_1 gh_1 + \rho_2 gh_2 + \rho_3 gh_3 + \rho_4 gh_4$ 으로 구할 수 있습니다. 깊어지는 방향으로 수압이 커지고, 얕아지는 방향으로 수압이 작아집니다.

그릇의 모양과는 관련이 없음에 유의하세요.

베르누이 법칙에 등장하는 3가지 항 중  $\frac{1}{2}\rho v^2$ 은 **동압**이라고 합니다.

$P + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{일정}$			
정압	수압	동압	



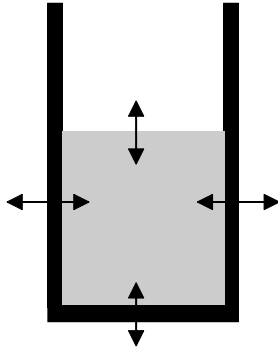
유체의 속력이 달라지는 두 부분을 유리관으로 연결하고 밀도가 다른 유체를 채운 것을 벤츠히관이라고 합니다. 벤츠히관에서 액체 기둥의 높이를  $h$ 라 하면, 다음 식이 성립합니다.

$$\Delta\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) = \Delta(\rho)gh, \text{ 동압차} = |\text{액체 기둥의 압력차}|$$

(증명) 두 점 A, B에서 베르누이 법칙  $P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho gh_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho gh_B$ 과 파스칼 법칙  $P_A + \rho gh_A + \rho' gh = P_B + \rho gh_B + \rho gh$ 을 연립하면  $\frac{1}{2}\rho v_A^2 - \frac{1}{2}\rho v_B^2 = \rho' gh - \rho gh$ .

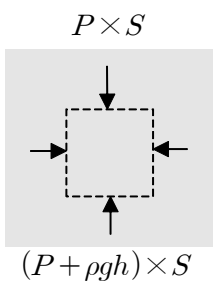
## 유체에서의 힘

유체에 압력이 있다는 것은, 유체가 다른 대상과 힘을 주고받는다라는 의미입니다.



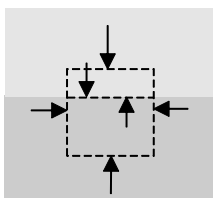
유체가 수조에 담겨 정지해 있는 상황입니다. 유체와 대기, 유체와 수조 바닥 사이에 힘이 작용하고 있습니다. 보통은 간과하기 쉬운 부분인데, 유체와 수조 벽 사이에도 면에 수직한 힘이 작용합니다.

압력의 크기는 면에 수직한 힘의 크기를 면적으로 나눈 것이므로, (압력  $\times$  면적)은 항상 수직항력이 됩니다.

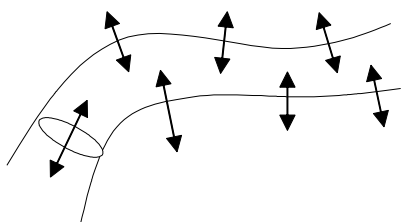


유체 내부의 유체 요소들도 서로 힘을 작용하고 있습니다. 유체의 일부분을 그림처럼 따로 떼어보면, 사방에서 작용하는 힘이 유체 요소를 지탱하고 있음을 알 수 있습니다. 만약 유체가 중력장 내에 있다면, 유체의 아랫면에 작용하는 힘이 윗면에 작용하는 힘보다 유체 요소의 무게  $\rho Shg$ 만큼 커서 평형을 이룹니다.

그래서 유체 요소를 제거하고 다른 물체를 그대로 끼워 넣는다고 하면 유체 요소의 무게에 해당하는  $\rho Shg$ 의 부력을 받게 되는 것입니다. 물체가 유체에 잠겨있는 상황이라면 항상 '물체'를 '물체가 밀어낸 부피만큼의 유체'로 대체하여 부력을 계산할 수 있습니다.



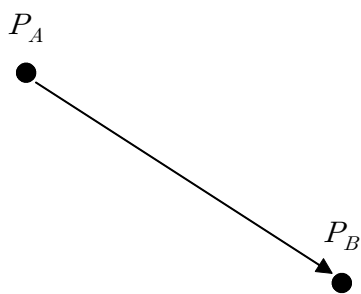
두 유체 사이에 끼어 있는 경우, 두 부분으로 나뉜 유체 요소를 가정하면 됩니다. 그림과 같이 경계면에서의 압력을 고려하면 원래의 유체 요소가 받게 될 부력은 평형을 이루고 있으므로 두 부분의 무게 합인  $\rho_1 Sh_1 g + \rho_2 Sh_2 g$ 와 같습니다. 그래서 물체가 잠겨있는 경우에 마치 각각의 유체가 작용하는 부력을 합한 것과 같이 계산할 수 있습니다. 이는 압력을 하나하나 계산해보면 쉽게 유도할 수 있습니다.



유체가 관에서 흐르는 경우도 마찬가지입니다. 유체와 관의 벽 사이에도 서로 힘을 주고받습니다. 또한 뒤따라가는 유체 요소와 앞서가는 유체 요소 사이에도 힘이 작용하면서, 역학적 에너지의 전달(베르누이 법칙)이 일어나게 됩니다.

## 압력차 이론

힘의 평형이 풀이의 중심이 되는 아르키메데스 법칙과는 달리, 압력차가 풀이의 중심으로 되는 파스칼 법칙과 베르누이 법칙은 1단원에서와 풀이 방식이 많이 다릅니다. 여기서는 파스칼 법칙과 베르누이 법칙을 연립해서 풀어야 할 때의 일반적인 풀이 방법을 소개하도록 하겠습니다. ※ 실제로는 베르누이 법칙을 다른 의미로 해석한 것입니다.



정압이  $P_A$ 인 점 A과 정압이  $P_B$ 인 점 B가 있을 때, 정압차 + 수압차 + 동압차 = 0입니다. (차: A - B)

정압차( $P_A - P_B$ )의 경우는 구하고자 하는 값이며, 수압차( $\rho gh_A - \rho gh_B$ )의 경우는 내려가면서(혹은 올라가면서) 모두 합산해주면 되고, 동압차( $\frac{1}{2}\rho v_A^2 - \frac{1}{2}\rho v_B^2$ )의 경우는 유선을 타는 경우를 모두 합산해주면 됩니다.

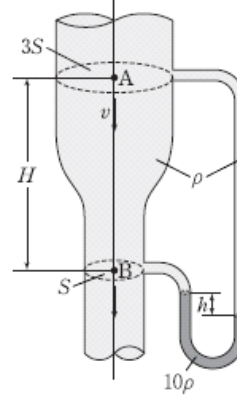
유선 상의 두 점을 택하면 이 식은 베르누이 법칙과 동치입니다. 핵심은 두 점 사이에서 파스칼 법칙과 베르누이 법칙을 여러 번 사용해야 할 때, 이를 하나의 식으로 나타낼 수 있다는 것입니다.

여기서 부호 계산에 주의해야 합니다. A에서 B로 갈 때, 수압차는 내려가는 방향이 양(+ )이고, 동압차는 느려지는 방향이 양(+ )입니다.

두 점 사이의 압력차는 보통 정압차가 조건으로 주어졌거나, 두 가지 경로가 주어졌어서 연립하면 됩니다. 구체적인 풀이 방법은 예제를 통해 살펴보도록 하겠습니다.

[2015학년도 9월 모의평가]

20. 그림과 같이 굵기가 변하는 관 속에서 물이 아래로 흐르고 있다. 점 A, B에서 단면적은 각각  $3S$ ,  $S$ 이고 두 지점의 높이차는  $H$ 이다. A에서 물의 속력이  $v$ 일 때, 관 오른쪽에 연결된 유리관 속 액체 기둥의 높이차는  $h$ 이다. 물과 액체의 밀도는 각각  $\rho$ ,  $10\rho$ 이다.



$h$ 는? (단, 중력 가속도는  $g$ 이고, 물과 액체는 베르누이 법칙을 만족한다.)

- ①  $\frac{v^2}{9g}$     ②  $\frac{4v^2}{9g}$     ③  $\frac{3v^2}{5g}$     ④  $\frac{4v^2}{5g}$     ⑤  $\frac{5v^2}{6g}$

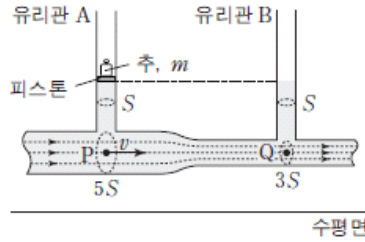
A와 B 사이의 압력차를 두 가지 경로(유선을 타고 가는 방향, 오른쪽에 연결된 유리관을 타고 가는 방향)로 구할 수 있습니다.

유선을 타고 가는 방향은  $P_A - P_B + \rho g H + \frac{1}{2} \rho (v^2 - 9v^2) = 0$ ,  $P_A - P_B = 4\rho v^2 - \rho g H$ . 유리관을 타고 가는 방향은  $P_A - P_B + \rho g H + \rho g h - 10\rho g h = 0$ ,  $P_A - P_B = 9\rho g h - \rho g H$ . 연립하면  $4\rho v^2 = 9\rho g h$ ,  $h = \frac{4v^2}{9g}$  입니다.

또는, 동압차가 액체 기둥의 압력차이므로  $\frac{1}{2} \rho (9v^2 - v^2) = (10\rho - \rho) g h$ ,  $h = \frac{4v^2}{9g}$  입니다.

[2017학년도 6월 모의평가]

19. 그림과 같이 단면적이 변하는 수평인 관에 밀도가  $\rho$ 인 액체가 점 P에서 속력  $v$ 로 흐를 때 유리관 A, B의 액체 표면의 높이는 같다. 이때 A에는 질량이  $m$ 인 추가 피스톤 위에 놓여 있다. A, B의 단면적은  $S$ 로 같고, 점 P와 점 Q에서 관의 단면적은 각각  $5S$ ,  $3S$ 이며, P와 Q의 높이는 같다.



$v$ 는? (단, 중력 가속도는  $g$ 이고, 대기압은 일정하고, 피스톤의 질량과 마찰은 무시하며, 액체는 베르누이 법칙을 만족한다.)

- ①  $\sqrt{\frac{5mg}{2\rho S}}$    ②  $\sqrt{\frac{5mg}{3\rho S}}$    ③  $\sqrt{\frac{25mg}{16\rho S}}$    ④  $\sqrt{\frac{9mg}{8\rho S}}$    ⑤  $\sqrt{\frac{16mg}{25\rho S}}$

A에서 피스톤 아랫면의 압력  $P_A = P_0 + \frac{mg}{S}$  이고 (대기압  $P_0$ ) B에서 경계면의 압력  $P_B = P_0$ 입니다. 따라서 정압차를 계산하면  $P_A - P_B = \frac{mg}{S}$ 입니다. A에서 피스톤 아랫면과 B에서 경계면 사이의 압력차는 관을 타고 내려가 유선을 타고 다시 관을 타고 올라가는 경로로도 구할 수 있습니다.

그런데 아래쪽 경로에서 관 A를 타고 내려가는 수압차를  $\rho gH$ 라 하면, 관 B를 타고 올라가는 수압차는  $-\rho gH$ 이므로 서로 상쇄됩니다. 따라서 동압차만 계산하면 됩니다.

식을 세우면,  $P_0 + \frac{mg}{S} - P_0 + \frac{1}{2}\rho\left(v^2 - \left(\frac{5}{3}v\right)^2\right) = 0$ ,  $\frac{mg}{S} = \frac{8}{9}\rho v^2$ ,  $v = \sqrt{\frac{9mg}{8\rho S}}$  입니다.

## 무게 중심 이론

역학적 평형은 힘의 평형과 돌림힘의 평형을 모두 이룬 상태를 의미합니다. 힘의 평형이 이루어지지 않으면 물체는 가속도가 생겨 직선운동하게 되고, 돌림힘의 평형이 이루어지지 않으면 물체는 각가속도가 생겨 회전운동하게 됩니다. 물리 I에서는 역학적 평형이 깨진 상황은 다루지 않고 ①역학적 평형을 이룬 상황과 ②역학적 평형이 깨지는 경계의 상황을 다룹니다.

물리 I의 역학적 평형 문제를 푸는 것은, 막대마다 힘의 평형 식과 돌림힘의 평형 식을 하나씩 세운 후 주어진 조건과 함께 연립하여 미지수를 알아내는 과정을 말합니다. 여기서 조건은 실제로 수치가 주어진 것도 있고, 숨겨진 것(수직항력과 장력의 크기는 음수가 될 수 없음)도 있습니다. 여기까지만 알아도 풀지 못하는 문제는 없습니다만, **무게 중심**의 개념을 잘 이해하고 있으면 좋은 점이 매우 많습니다.

힘의 평형 식( $\Sigma F=0$ )과 돌림힘의 평형 식( $\Sigma Fx=0$ )을 다시 쓰면 다음과 같습니다.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n W_i = \sum_{j=1}^m N_j \\ \sum_{i=1}^n W_i x_i = \sum_{j=1}^m N_j x_j \end{cases} \quad \begin{matrix} (i=1 \dots n) \\ (j=1 \dots m) \end{matrix}$$

※  $W$ 는 막대에 연직 아래 방향으로 작용하는 힘의 크기,  $N$ 은 막대에 연직 위 방향으로 작용하는 힘의 크기입니다. 즉,  $W$ 는 무게이고  $N$ 은 막대를 지탱하는 수직항력 또는 장력의 크기입니다.

이제 두 식의 양변을 서로 나누어주면, 어떤 값  $X = \frac{\sum_{i=1}^n W_i x_i}{\sum_{i=1}^n W_i} = \frac{\sum_{j=1}^m N_j x_j}{\sum_{j=1}^m N_j}$ 을 얻습니다.

이때  $X$ 를 무게 중심이라고 합니다. 식을 조금 바꿔보면  $\sum_{i=1}^n W_i x_i = \left(\sum_{i=1}^n W_i\right) X$ 라고 쓸 수 있는데, 이것은 (돌림힘의 합) = (힘의 합) × (무게 중심)이라는 의미입니다. 따라서 각각의 무게에 의한 돌림힘을 합하는 것은, 그 힘들이 무게 중심에 작용한다고 했을 때 그 합력의 돌림힘과 같습니다.



무게 중심은 위치이므로 기준점이 필요합니다. 편의상 모든 위치의 부호가 같도록 왼쪽 끝이나 오른쪽 끝을 기준으로 잡지만, 어떻게 하든 고정되기만 하면 됩니다.

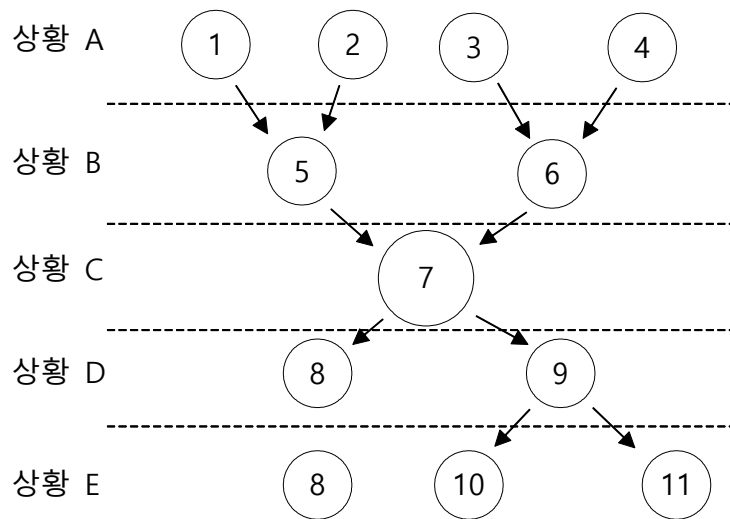
<받침대가 하나인 경우> 막대(에 작용하는 모든 무게)의 무게 중심은 그 받침대의 위치

가 됩니다. 무게 중심의 정의로부터  $\frac{\sum^n W_i x_i}{\sum^n W_i} = \frac{Nx}{N} = x$ 이기 때문입니다.



서로 다른 위치에 여러 물체가 있는 상황 받침대의 위치에 모든 물체가 있는 상황 따라서 위의 두 상황은 (힘의 평형과 돌림힘의 평형의 측면에서) **동등한 상황**입니다. 따라서 서로 바꿀 수 있습니다.

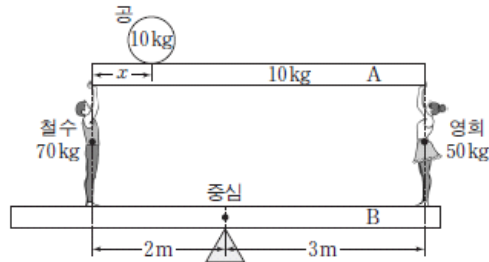
(무게 중심의 동등성) 일부의 무게 중심만 계산해놓고 나머지 무게는 남겨놓은 것도 **동등한 상황**입니다. 아래 그림의 상황 A~E는 모두 **동등한 상황**입니다.



물론 받침대가 하나인 경우 주어진 상황을 상황 C로 바꾸는 것이 가장 효율적입니다.

[2014학년도 수능]

20. 그림과 같이 받침대 위에 놓인 나무판 B 위에서 철수와 영희가 공이 놓여 있는 나무판 A의 양쪽 끝을 수직으로 떠받치고 있다. 직육면체 나무판 A와 B는 지면과 수평을 이루고 있으며 공은 정지해 있다. B의 중심에 놓인 받침대로부터 철수와 영희까지의 거리는 각각 2m, 3m이고, A의 길이는 5m이다. 철수와 영희의 질량은 각각 70kg, 50kg이고, 공과 A의 질량은 각각 10kg이다. 공과 A, B의 밀도는 균일하다.



A의 왼쪽 끝에서 공까지의 거리  $x$ 는? (단, 중력 가속도는  $10\text{m/s}^2$ 이고, 나무판의 두께와 폭은 무시한다.) [3점]

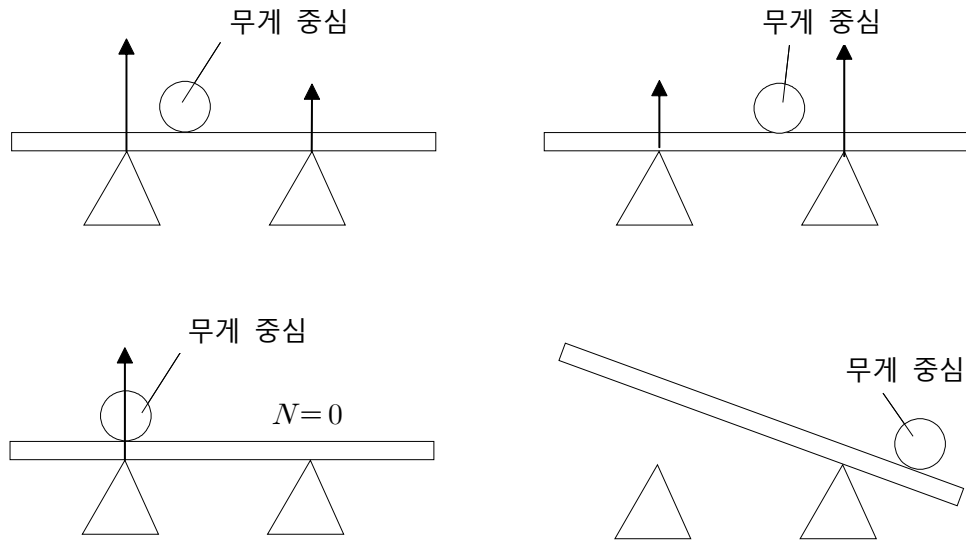
- ① 0.5m    ② 0.6m    ③ 0.7m    ④ 0.8m    ⑤ 0.9m

무게 중심은 막대를 직접적으로 누르는 무게 요소만 고려할 수 있는 것은 아닙니다. 서로 힘을 주고받으며 정지해 있는 무게 요소들이라면 하나로 모을 수 있습니다.

철수의 위치를 원점으로 하면, 받침대가 하나이므로 무게 중심은 2m지점이 됩니다.

따라서  $2 = \frac{100x + 100 \times 2.5 + 700 \times 0 + 500 \times 5}{100 + 100 + 700 + 500} = \frac{2750 + 100x}{1400}$ ,  $100x = 50$ ,  $x = 0.5\text{m}$ 입니다.

<받침대가 둘인 경우> 막대(에 작용하는 모든 무게)의 무게 중심은 두 받침대의 사이가 됩니다. 무게 중심의 정의로부터  $X = \frac{N_1x_1 + N_2x_2}{N_1 + N_2} = \left(\frac{N_1}{N_1 + N_2}\right)x_1 + \left(\frac{N_2}{N_1 + N_2}\right)x_2$ 이므로,  $X$ 는  $x_1$ (받침대 1의 위치)과  $x_2$ (받침대 2의 위치)의  $N_1 : N_2$  내분점이기 때문입니다.



만약 물체의 무게 중심이 두 받침대 사이에 있지 않으면 그림과 같이 평형이 깨지게 됩니다. 따라서 평형이 깨지는 경계는 무게 중심이 받침대 바로 위에 위치하는 상황입니다. 여기서 부등식  $x_1 \leq X \leq x_2$ 를 연습합니다. 여기서  $x_1$ 은  $X$ 의 최솟값,  $x_2$ 는  $X$ 의 최댓값이라 할 수 있습니다.

(무게 중심의 변화) 무게 요소의 위치가 변화하면 무게 중심  $X$ 가 변화하게 됩니다.

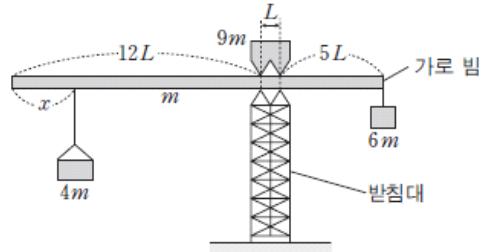
(증명) 무게 중심의 정의  $\frac{W_1x_1 + \dots + Wx + \dots + W_nx_n}{W_1 + \dots + W_n} = X$ 에서 양변에  $W_1 + \dots + W_n$

을 곱하면  $W_1x_1 + \dots + Wx + \dots + W_nx_n = (W_1 + \dots + W_n)X$ 이 성립합니다. 만약 물체  $W$ 가 움직여  $x$ 가  $\Delta x$ 만큼 변하여 무게 중심  $X$ 가  $\Delta X$ 만큼 변했다면,  $W_1x_1 + \dots + W(x + \Delta x) + \dots + W_nx_n = (W_1 + \dots + W_n)(X + \Delta X)$ 이 성립합니다. 두 식을 서로 빼주면  $W\Delta x = (\Sigma W)\Delta X$ 을 연습합니다.

바꾸어 말하면, 무게 요소의 이동  $\Delta x$ 에 의한 돌림힘의 변화는 무게 중심의 이동  $\Delta X$ 에 의한 돌림힘의 변화와 같다는 것입니다. 만약 무게 중심이 최솟값에서 최댓값으로 변한다면,  $\Delta X$ 는 무게 중심이 있을 수 있는 구간 길이(최댓값 - 최솟값)가 되고  $\Delta x$ 는 무게 요소가 있을 수 있는 구간 길이(최댓값 - 최솟값)가 됩니다.

[2016학년도 수능]

20. 그림은 받침대 위에 놓인 가로 빔이 수평으로 평형을 유지하고 있는 모습을 나타낸 것이다. 두 받침점 사이의 간격은  $L$ 이고, 빔의 길이는  $18L$ , 빔의 질량은  $m$ 이다. 빔의 왼쪽 끝에서부터 길이  $x$ 만큼 떨어진 지점에 매달린 물체, 빔 위에 놓인 물체, 빔의 오른쪽 끝에 매달린 물체의 질량은 각각  $4m$ ,  $9m$ ,  $6m$ 이다.



평형이 유지되는  $x$ 의 최댓값과 최솟값의 차는? (단, 빔의 밀도는 균일하며 빔의 두께와 폭은 무시한다. 빔 위에 놓인 물체는 좌우 대칭이고, 밀도는 균일하다.) [3점]

- ①  $4L$       ②  $5L$       ③  $6L$       ④  $7L$       ⑤  $8L$

가로 빔의 왼쪽 끝을 원점으로 하면, 받침대는  $12L$ 과  $13L$ 에 각각 위치하고 있습니다. 빔 위에 놓인 물체는 무게 중심이  $12.5L$ 에 있는 것으로 계산할 수 있으므로, 무게 중심  $X = \frac{4mx + m \times 9L + 9m \times 12.5L + 6m \times 18L}{4m + m + 9m + 6m} = \frac{1}{5}x + kL$ 입니다. (복잡한 숫자를  $k$ 로 놓았습니다.)

$12L \leq X \leq 13L$ 이므로  $12L \leq \frac{1}{5}x + kL \leq 13L$ 이고 정리하면,  $60L - 5kL \leq x \leq 65L - 5kL$ 을 얻습니다. 따라서  $x$ 의 최댓값과 최솟값의 차는  $5L$ 입니다.

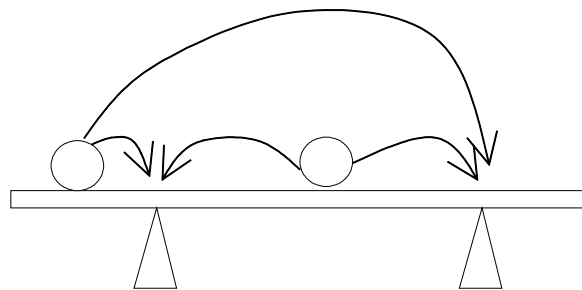
하지만 무게 요소에 의한 돌림힘의 변화량이 무게 중심에 의한 돌림힘의 변화량과 같다는 점에 착안하면,  $\Delta X = L$ 이므로  $4m\Delta x = 20mL$ ,  $\Delta x = 5L$ 임을 쉽게 알 수 있습니다.

무게 중심을 이용하여 무게 요소를 하나로 합치면 받침대가 하나인 문제나 최대/최소 문제를 쉽게 해결할 수 있습니다. 그러나 때로는 여러 막대의 무게 요소를 합치다보면 받침대의 개수가 셋 이상이 되어 쉽게 문제를 해결하지 못하는 경우가 있습니다.

**(무게 중심의 분배)** 무게 중심의 동등함을 이용하면, 무게 중심을 각 지지대로 분배하여 상쇄시킬 수 있습니다. 받침대가 두 개 있다고 합시다. 그러면 항상 두 개의 물체가 각 받침대 위에 하나씩 놓여있는 동등한 상황을 찾을 수 있습니다.

무게 중심의 정의  $X = \frac{N_1x_1 + N_2x_2}{N_1 + N_2} = \frac{W_1x_1 + W_2x_2}{W_1 + W_2}$  가 되도록 하는  $W_1$ 과  $W_2$ 를 찾으면 됩니다.  $N_1 + N_2 = W_1 + W_2$ 이므로  $N_1x_1 + N_2x_2 = W_1x_1 + W_2x_2$ 입니다. 정리하면  $(N_1 - W_1)x_1 = (W_2 - N_2)x_2$ 입니다. 그런데  $N_1 + N_2 = W_1 + W_2$ 에서  $N_1 - W_1 = W_2 - N_2$ 이므로  $(N_1 - W_1)x_1 = (N_1 - W_1)x_2$ ,  $(N_1 - W_1)(x_1 - x_2) = 0$ 입니다. 받침대가 둘이면  $x_1 \neq x_2$ 이므로  $N_1 = W_1$ ,  $N_2 = W_2$ 라는 것을 알 수 있습니다. 따라서 그 받침대 위에 올린 물체의 무게와 받침대의 수직항력이 반드시 같습니다.

따라서 각 무게 요소를 두 받침대 위로 분배하여 두 개의 무게 중심이 있는 상태로 만들면, 그 두 무게가 각각 받침대의 수직항력이라는 결과를 얻습니다. 여기서 분배한다는 것은, 각 무게 요소(1개)에 대하여 두 받침대 위에 무게 요소(2개)가 있는 동등한 상황을 구하고, 그것을 전부 합한다는 의미입니다. 이 경우 나누어진 무게 요소는 음(-)의 값을 가질 수도 있습니다. 결과적으로 모두 합했을 때만 음(-)이 아니면 됩니다.

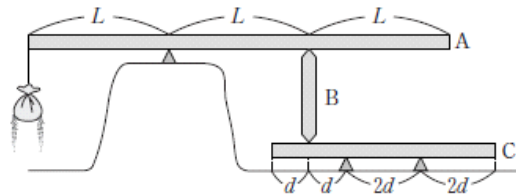


이를 반복 적용해서 무게들을 수직항력 2개로 줄여나가면, 복잡한 상황을 쉽게 다룰 수 있습니다. 예제를 통해 살펴봅시다.

※ 이렇게 하나의 상황을 여러 상황들의 합으로 생각할 수 있는 것은 돌림힘의 평형 식이 위치에 대한 일차식들의 합이기 때문입니다. 일차식들의 합은 항상 일차식입니다.

[2016학년도 6월 모의평가]

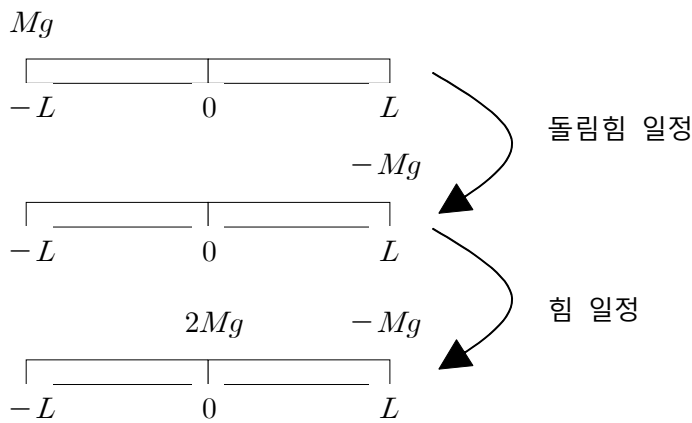
19. 그림과 같이 막대 A의 끝에 매달린 모래주머니에서 모래가 천천히 흘러 나오면서 막대 A, B, C가 평형을 유지하고 있다. B는 A와 C 사이에 수직으로 놓여 있다. 모래가 계속 흘러 나와 모래주머니의 질량이 작아지면 어느 순간 평형이 깨진다. A, B, C의 질량은 각각  $3m$ ,  $m$ ,  $2m$ 이다.



평형이 깨지는 순간 모래주머니의 질량은? (단, 막대의 밀도는 균일하며 두께와 폭은 무시한다.) [3점]

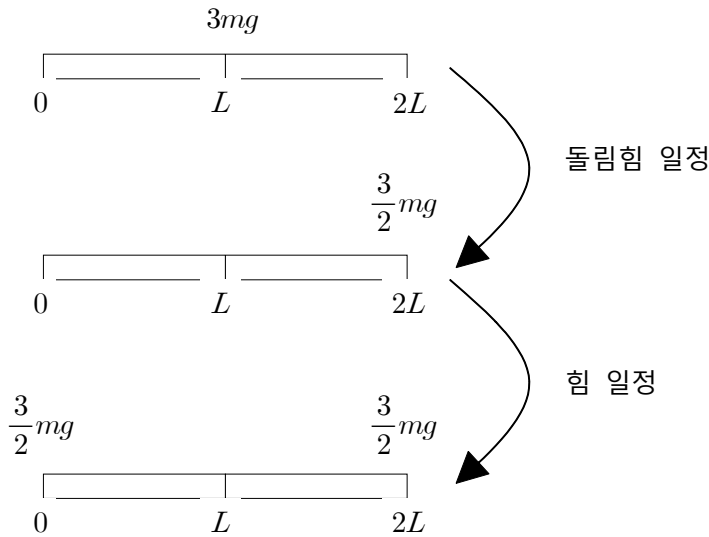
- ①  $\frac{1}{4}m$     ②  $\frac{1}{2}m$     ③  $\frac{3}{4}m$     ④  $m$     ⑤  $\frac{5}{4}m$

받침대가 총 3개이기 때문에 최대/최소를 하나의 무게 중심으로 해결하기 어렵습니다. 따라서 막대 A에 작용하는 무게를 두 받침대(왼쪽 받침대와 B)로 분배합니다. 모래주머니의 질량을  $M$ 이라 하면, 왼쪽 받침대와 B로 각각  $2Mg$ ,  $-Mg$ 의 무게가 분배됩니다.



이때, 계산의 편의를 위해서 왼쪽 받침대의 위치를 0으로 두고 계산합니다.

마찬가지로 A 자체의 무게( $3mg$ )를 분배하면 각각  $\frac{3}{2}mg$ 가 분배됩니다.



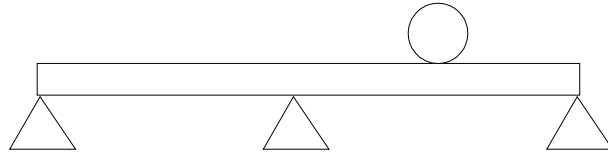
따라서 왼쪽 받침대의 수직항력은  $2Mg + \frac{3}{2}mg$ , B의 수직항력은  $\frac{3}{2}mg - Mg$ 입니다.  $M$ 이 점차 작아지고 있으므로  $\frac{3}{2}mg - Mg$ 는 점점 증가합니다. 따라서 평형이 깨지지 않습니다. 수직항력이 0이 되는 순간이 평형이 깨지는 경계이기 때문입니다.

이제 막대 C를 보면, B의 수직항력  $\frac{3}{2}mg - Mg + mg = \frac{5}{2}mg - Mg$ , C의 무게  $2mg$ 가 작용하고 있으며, 받침대가 2개입니다. B의 수직항력이 점차 증가하면 무게 중심은 B가 있는 방향인 왼쪽으로 이동합니다. 따라서 무게 중심이 왼쪽 받침대에 있을 때가  $M$ 이

최소인 순간이 됩니다. 따라서 막대 C에서 무게 중심  $2d = \frac{\left(\frac{5}{2}mg - Mg\right) \times d + 2mg \times 3d}{\frac{5}{2}mg - Mg + 2mg}$ ,

$$M = \frac{5}{2}m - 2m = \frac{1}{2}m \text{입니다.}$$

### <받침대가 셋 이상인 경우>



이런 상황은 부정정계라 하여, 막대에 힘을 작용하는 모든 무게 요소의 질량과 위치, 그리고 받침대의 위치가 결정된다 하더라도, 각 받침대가 작용하는 수직항력의 크기가 하나씩으로 결정되지 않습니다.

**(증명)** 모든 무게 요소의 질량과 위치, 그리고 받침대의 위치가 주어질 때, 미지수는 각 받침대가 작용하는 수직항력의 크기입니다. 따라서 받침대가 셋 이상이면 미지수가 셋 이상이 됩니다. 물리 I 과정에서 세울 수 있는 등식은 힘의 평형과 돌림힘의 평형 식 뿐이므로, 미지수가 셋 이상이 되면 값이 하나씩으로 결정되지 않습니다.

따라서 받침대가 셋 이상인 문제의 경우, 다른 막대가 주어지거나 수직항력의 크기가 조건에서 제시되어 있어야 문제를 해결할 수 있습니다. 학부 수준에서는 물질의 특성이 주어질 경우 이를 이용하여 부정정계 문제를 해결할 수 있습니다.

그런데 여러 막대를 하나의 막대로 취급하여 무게 중심을 계산하다보면, 각 막대의 받침대는 1~2개임에도 불구하고 전체 받침대의 수는 셋 이상이 되는 경우가 생기므로 이에 유의해야 합니다. 여러 무게 요소를 무게 중심으로 합치게 되면 각 무게 요소의 정보는 사라지게 됩니다.

예를 들어 무게 요소 사이의 연결 관계가 사라져서 세울 수 있는 식의 수가 줄어들 수 있습니다. 막대가 둘 있었을 때는 식을 네 개 세울 수 있었는데, 막대가 하나로 줄어들면 식을 두 개밖에 세울 수 없으므로, 미지수가 셋 이상인 경우를 풀 수 없습니다. 또, 막대가 둘 있었을 때는 둘 사이의 받침대/실의 수직항력/장력 조건이 최대/최소 문제 풀이에 이용될 수 있는데, 막대가 하나로 줄어들면 그 사이의 받침대와 실이 무시되므로 평형 조건에 위배되는지 테스트할 수 없게 됩니다. 그럴 때는 전체 계를 하나의 무게 중심으로는 생각할 수가 없으므로, 일부분을 제거해나가면서 풀어야 합니다. (모래 주머니 기출 예제)

만일 받침대의 수직항력이 조건으로 주어진 경우, 그 받침대는 무게가 음수인 무게 요소로 생각할 수 있습니다. 따라서 받침대의 수가 줄어드는 효과가 생깁니다.

