수리 영역

'가' 형

1. ②	2. ④	3. ③	4. ③	5. ③
6. ③	7. ④	8. ④	9. ③	10. ⑤
11. ④	12. ②	13. ②	14. ①	15. ①
16. ⑤	17. ③	18. 3	19. 27	20. 1
21. 100	22. 11	23. 50	24. 13	25. 25

〈미분과 적분〉

26. ④	27. ③	28. ④	29. ④	30. 2

〈확률과 통계〉

26. ④	27. ⑤	28. ③	29. ④	30. 22

〈이산수학〉

26. ②	27. ①	28. ④	29. ④	30. 6

1. $\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{50}-\sqrt{32})=\log_{\sqrt{2}}(5\sqrt{2}-4\sqrt{2})$
$=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2}=1$

2. $\begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+2b & 2a+4 \\ ab+2b & 2b+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$a^2+2b=0,\ 2a+4=0,\ ab+2b=0,\ 2b+4=0$
$\therefore a=-2,\ b=-2$
$\therefore ab=4$

3. $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 차례로 $a, b, 0, c, d$라고 할 때, $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	0	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↘		↗		↗

따라서, $y=f(x)$의 극점은 극댓점 $(b, f(b))$, 극솟점 $(a, f(a))$, $(c, f(c))$로 모두 3개이다.

4. 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{3^{n+1}}{3^n+1}\right)$이 수렴하므로
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{3^{n+1}}{3^n+1}\right)=0$
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{3^n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3\cdot 3^n}{3^n+1}\right)=3$
$\displaystyle\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=3$

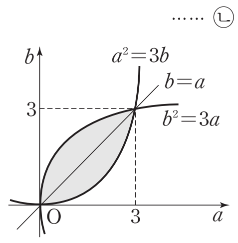
5. 근과 계수의 관계에서
$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=3 \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-24 \\ \alpha\beta\gamma=18 \end{cases}$
$\dfrac{1}{x-\alpha}+\dfrac{1}{x-\beta}+\dfrac{1}{x-\gamma}=0$은 다음과 같이 변형된다.
$(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\gamma)(x-\alpha)+(x-\alpha)(x-\beta)=0$
$3x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=0$
$3x^2-6x-24=0$
$x^2-2x-8=0,\ (x-4)(x+2)=0$
$\therefore x=4$ 또는 $x=-2$
이때 $x=4$, $x=-2$는 주어진 삼차방정식의 근이 아니므로 무연근이 아니다.
$\therefore 4+(-2)=2$

6. ㄱ. 【반례】 $f(x)=x^2$, $g(x)=2009x^2$이면 $x\neq0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<g(x)$이지만
$\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}g(x)=0$ $\quad\therefore$ 거짓
ㄴ. 【반례】 $f(x)=x+1$, $g(x)=x-1$이면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 각각 $x=1$에서 연속이지만
$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x+1}{x-1}$은 $x=1$에서 정의되지 않으므로 $x=1$에서 불연속이다. $\quad\therefore$ 거짓
ㄷ. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\alpha$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\beta$ (α, β는 상수)라 하면
$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)\cdot\frac{g(x)}{f(x)}\right)$
$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}f(x)\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\alpha\beta$ $\quad\therefore$ 참
따라서, 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

7. $(f\circ f)(x)=2(2x^2)^2=2^3x^4$
$\therefore (f\circ f\circ f)(x)=2(2^3x^4)^2$
$=2^7x^8$

8. ㄱ. $\displaystyle f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h|h|}{h}$
$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{h|h|}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{h|h|}{h}=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.
ㄴ. $\displaystyle g'(0)=\lim_{h\to0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$
$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{|h(h-1)|}{h}$
그런데
$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{|h(h-1)|}{h}=1,\ \lim_{h\to-0}\frac{|h(h-1)|}{h}=-1$
이므로 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.
ㄷ. $\displaystyle h'(0)=\lim_{x\to0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$
$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{x^2(|x|+1)-0}{x}$
$\displaystyle=\lim_{x\to0}x(|x|+1)=0$
따라서, $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.
따라서, $x=0$에서 미분가능한 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

9. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 증가함수이므로 모든 실수 x에 대하여
$f'(x)=3x^2+2ax+b\geq0$
$g'(x)=3x^2+2bx+a\geq0$
$f'(x)\geq0$에서 $a^2-3b\leq0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$g'(x)\geq0$에서 $b^2-3a\leq0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 점 (a, b)가 존재하는 영역은 오른쪽 그림의 어두운 부분이다.



따라서, 구하는 넓이 S는
$\displaystyle S=2\int_0^3\left(a-\frac{a^2}{3}\right)da$
$\displaystyle=2\left[\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{9}\right]_0^3=3$

10. ㄱ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{30}\{f(2^{n+1})-f(2^n)\}$
$=\{f(2^2)-f(2)\}+\{f(2^3)-f(2^2)\}$
$+\{f(2^4)-f(2^3)\}+\cdots+\{f(2^{31})-f(2^{30})\}$
$=f(2^{31})-f(2)$
$=[9.331]-[0.3010]=9$ $\quad\therefore$ 참
ㄴ. $\log2^n=m+\alpha$ (m은 정수, $0\leq\alpha<1$)라 하면
$\log2^{n+1}=\log2+\log2^n=m+\alpha+\log2$이므로
$m+0.3010\leq m+\alpha+\log2<m+1.3010$
즉, $[\log2^n]=m$이면
$[\log2^{n+1}]=m$ 또는 $[\log2^{n+1}]=m+1$
$\therefore f(2^{n+1})-f(2^n)=0$ 또는 $f(2^{n+1})-f(2^n)=1$
$\therefore$ 참
ㄷ. ㄱ에서
$\displaystyle\sum_{n=1}^{30}\{f(2^{n+1})-f(2^n)\}=f(2^{31})-f(2)=9$
ㄴ에서
$f(2^{n+1})-f(2^n)=0$ 또는 $f(2^{n+1})-f(2^n)=1$
이므로 $f(2^{n+1})-f(2^n)=0$을 만족하는 n의 개수는 21개이다. $\quad\therefore$ 참
따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

11. $y=x^2$에 대하여 $y'=2x$이므로 점 $\mathrm{P}(\alpha, \alpha^2)$에서의 접선의 방정식은
$y=2\alpha x-\alpha^2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
점 $\mathrm{Q}(\beta, \beta^2)$에서의 접선의 방정식은
$y=2\beta x-\beta^2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 교점의 좌표가 (a, b)이므로
$2(\alpha-\beta)a-(\alpha^2-\beta^2)=0$
$\therefore a=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢
(a, b)가 ㉠을 만족하므로
$b=2a\alpha-\alpha^2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣
㉢을 ㉣에 대입하면
$b=2\alpha\cdot\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\alpha^2=\alpha\beta$
$\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점을 $\mathrm{M}(x, y)$라고 하면
$(x, y)=\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$
$=\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{2}\right)=(a, 2a^2-b)$
$\therefore x=a,\ y=2a^2-b$
한편, 점 (a, b)는 직선 $y=x-1$ 위의 점이므로
$b=a-1$
따라서, $\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점 M이 그리는 도형의 방정식은
$y=2x^2-x+1$

12. 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 임의의 자연수 k에 대하여 연속한 세 항 a_k, a_{k+1}, a_{k+2}에 대하여 $a_{k+1}=\dfrac{a_k+a_{k+2}}{2}$가 성립한다.
즉, $a_k-2a_{k+1}+a_{k+2}=0$이 성립하므로 방정식 $a_kx^2+2a_{k+1}x+a_{k+2}=0$은 항상 $x=-1$을 근으로 갖는다.
따라서, 임의의 자연수 k에 대하여 집합 A_k는 항상 -1을 원소로 갖는다.

13. 움직이기 시작하여 t초 후의 P, Q의 속도는 각각
$v_{\mathrm{P}}=t-6$
$v_{\mathrm{Q}}=3t-30=3(t-10)$
이고, P, Q의 운동 방향이 서로 반대인 것은
$v_{\mathrm{P}}\times v_{\mathrm{Q}}<0$
즉, $3(t-6)(t-10)<0$
$\therefore 6<t<10$
따라서, 반대 방향으로 움직이는 시간은 4초 동안이다.

14. $y=f_n(x)=a(x-1)^2+\dfrac{1}{2^{n-1}}$인데, 이 곡선이 원점을 지나므로
$0=a+\dfrac{1}{2^{n-1}},\ a=-\dfrac{1}{2^{n-1}}$
$\therefore f_n(x)=-\dfrac{1}{2^{n-1}}(x-1)^2+\dfrac{1}{2^{n-1}}$
$=-\dfrac{1}{2^{n-1}}x(x-2)$
$\displaystyle S_n=\int_0^2-\frac{1}{2^{n-1}}x(x-2)dx$
$\displaystyle=-\frac{1}{2^{n-1}}\int_0^2(x^2-2x)dx$
$=-\dfrac{1}{2^{n-1}}\left(\dfrac{8}{3}-4\right)$
$=\dfrac{4}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$
따라서, 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{4}{3}$, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이다.
$\displaystyle\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$
$=\dfrac{\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{8}{3}$

15. (ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$={}_1\mathrm{C}_1=1$, (우변)$=2^0=1$이므로 주어진 등식은 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정하면

$${}_{k}\mathrm{C}_1+2\cdot{}_{k}\mathrm{C}_2+3\cdot{}_{k}\mathrm{C}_3+\cdots+k\cdot{}_{k}\mathrm{C}_k=k\cdot 2^{k-1}$$

$n=k+1$일 때, 성립함을 보이자.

$${}_{k+1}\mathrm{C}_1+2\cdot{}_{k+1}\mathrm{C}_2+3\cdot{}_{k+1}\mathrm{C}_3+\cdots+k\cdot{}_{k+1}\mathrm{C}_k+(k+1)\cdot{}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}$$

$$=\sum_{i=1}^{k+1}(i\cdot{}_{k+1}\mathrm{C}_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(i\cdot{}_{k+1}\mathrm{C}_i)+(k+1)\cdot{}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\{i\cdot(\boxed{{}_{k}\mathrm{C}_{i-1}+{}_{k}\mathrm{C}_i})\}+(k+1)\cdot{}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\{(1+i-1)\cdot{}_{k}\mathrm{C}_{i-1}\}+\sum_{i=1}^{k}(i\cdot{}_{k}\mathrm{C}_i)+(k+1)\cdot{}_{k}\mathrm{C}_k$$

$$=\sum_{i=1}^{k}{}_{k}\mathrm{C}_{i-1}+\sum_{i=1}^{k}\{(i-1)\cdot{}_{k}\mathrm{C}_{i-1}\}+\sum_{i=1}^{k}(i\cdot{}_{k}\mathrm{C}_i)+k\cdot{}_{k}\mathrm{C}_k+{}_{k}\mathrm{C}_k$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{k}{}_{k}\mathrm{C}_{i-1}+{}_{k}\mathrm{C}_k\right)+\left[\sum_{i=1}^{k}\{(i-1)\cdot{}_{k}\mathrm{C}_{i-1}\}+k\cdot{}_{k}\mathrm{C}_k\right]+\sum_{i=1}^{k}(i\cdot{}_{k}\mathrm{C}_i)$$

$$=\boxed{\sum_{i=0}^{k}{}_{k}\mathrm{C}_i}+\sum_{i=1}^{k}(i\cdot{}_{k}\mathrm{C}_i)+\sum_{i=1}^{k}(i\cdot{}_{k}\mathrm{C}_i)$$

$$=2^k+k\cdot 2^{k-1}+k\cdot 2^{k-1}=\boxed{(k+1)\cdot 2^k}$$

16. 세 도시 중 한 도시는 두 곳의 맛집이 선정되어야 하므로

(i) 서울에서 두 곳의 맛집이 선정되는 경우

${}_{3}\mathrm{C}_2\times{}_{4}\mathrm{C}_1\times{}_{5}\mathrm{C}_1=60$(가지)

(ii) 부산에서 두 곳의 맛집이 선정되는 경우

${}_{3}\mathrm{C}_1\times{}_{4}\mathrm{C}_2\times{}_{5}\mathrm{C}_1=90$(가지)

(iii) 광주에서 두 곳의 맛집이 선정되는 경우

${}_{3}\mathrm{C}_1\times{}_{4}\mathrm{C}_1\times{}_{5}\mathrm{C}_2=120$(가지)

따라서, (i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$60+90+120=270$(가지)

17. $\overline{\mathrm{OA_1}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=\sin\theta$

$\angle\mathrm{A_1B_1A_2}=\angle\mathrm{B_1A_2B_2}=\angle\mathrm{A_2B_2A_3}=\cdots=\theta$이므로

$\overline{\mathrm{B_1A_2}}=\overline{\mathrm{A_1B_1}}\cos\theta=\sin\theta\cos\theta$

$\overline{\mathrm{A_2B_2}}=\overline{\mathrm{B_1A_2}}\cos\theta=\sin\theta\cos^2\theta$

$\overline{\mathrm{B_2A_3}}=\overline{\mathrm{A_2B_2}}\cos\theta=\sin\theta\cos^3\theta$

$\overline{\mathrm{A_3B_3}}=\overline{\mathrm{B_2A_3}}\cos\theta=\sin\theta\cos^4\theta$

$\cdots$

$$\overline{\mathrm{A_1B_1}}+\overline{\mathrm{A_2B_2}}+\overline{\mathrm{A_3B_3}}+\cdots=\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{5}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{\sin\theta}=\frac{5}{3} \qquad \therefore \sin\theta=\frac{3}{5}$$

18. $f(x)=\begin{cases}x^3 & (x<1)\\ ax^2+bx & (x\ge 1)\end{cases}$

$x=1$에서 연속이어야 하므로

$f(1)=1=a+b$ …… ㉠

또한, $f(x)$에 대하여 $f'(1)$이 존재하여야 하므로

$f'(x)=\begin{cases}3x^2 & (x<1)\\ 2ax+b & (x\ge 1)\end{cases}$

$f'(1)=3=2a+b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-1$

$\therefore a-b=3$

19. 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1\times a_5\times a_9=3$에서 $a_1^3r^{12}=3$

$\therefore a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_9=a_1^9r^{1+2+\cdots+8}=a_1^9r^{36}$

$=(a_1^3r^{12})^3=3^3=27$

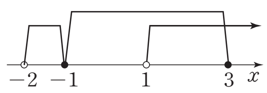
20. $(x-1)(x+1)(x+2)>0$에서

$A=\{x\,|\,-2<x<-1$ 또는 $x>1\}$

이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta(\alpha\le\beta)$라 하면

$B=\{x\,|\,\alpha\le x\le\beta\}$

$A\cup B=\{x\,|\,x>-2\},\ A\cap B=\{x\,|\,1<x\le 3\}$이므로 수직선 위에 그려보면



$\therefore \alpha=-1,\ \beta=3$

$x^2+px+q=(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$

$\therefore p=-2,\ q=-3$

$\therefore p-q=(-2)-(-3)=1$

21. 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 묶음으로 표현하면

$(1),\ (1,\ 3),\ (1,\ 3,\ 5),\ (1,\ 3,\ 5,\ 7),\ \cdots$

첫번째 묶음에는 1개, 두 번째 묶음에는 2개, 세 번째 묶음에는 3개, …의 항이 있으므로

$(1+2+3+\cdots+n)+n$번째 항은 $(n+1)$번째 묶음의 n번째 항이다.

이때 각 묶음은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열을 이루므로

$b_n=a_{(1+2+3+\cdots+n)+n}=2n-1$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10}b_n=\sum_{n=1}^{10}(2n-1)=100$$

22. $\sqrt{x^2-2x-2}=t$로 놓으면 $t\ge 0$ …… ㉠

$x^2-2x-5=2\sqrt{x^2-2x-2}$에서 $t^2-3=2t$

$t^2-2t-3=0,\ (t-3)(t+1)=0$

$t=3$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \sqrt{x^2-2x-2}=3$

$x^2-2x-2=9,\ x^2-2x-11=0$

두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 근과 계수의 관계에서

$|\alpha\beta|=|-11|=11$

23. $y=x^2$에서 $y'=2x$이므로 점 $(a,\ a^2)$에서의 접선의 방정식은

$y-a^2=2a(x-a)$

$\therefore y=2ax-a^2$

$$V_x=\pi\int_0^a(x^2)^2dx-\pi\int_{\frac{a}{2}}^a(2ax-a^2)^2dx$$

$$=\pi\int_0^a x^4dx-\frac{1}{3}\pi a^4\cdot\frac{a}{2}=\frac{\pi}{30}a^5$$

$$V_y=\pi\int_0^{a^2}\left(\frac{y+a^2}{2a}\right)^2dy-\pi\int_0^{a^2}ydy$$

$$=\frac{\pi}{4a^2}\int_0^{a^2}(y^2+2a^2y+a^4)dy-\pi\int_0^{a^2}ydy$$

$$=\frac{\pi}{4a^2}\left[\frac{1}{3}y^3+a^2y^2+a^4y\right]_0^{a^2}-\pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{a^2}=\frac{\pi}{12}a^4$$

$V_x=2V_y$이므로 $\frac{\pi}{30}a^5=2\times\frac{\pi}{12}a^4\,(a>0)$

$\therefore a=5$

$\therefore 10a=50$

24. 처음 A, B에 각각 4%, 8%의 소금물이 200g씩 들어 있으므로 들어 있는 소금의 양은 각각 8g, 16g이다.

n회 반복 시행한 후 A 그릇의 소금물의 농도를 a_n% 라 하면 A 그릇에 있는 소금의 양은 $2a_n$g

A 그릇에서 소금물 100g을 B 그릇으로 옮기면 A 그릇에 남아 있는 소금의 양은 a_ng

소금의 총량은 24g으로 변하지 않으므로 B 그릇의 소금물 300g에 들어 있는 소금의 양은 $24-a_n$이다. 이를 잘 섞은 다음 B 그릇에서 소금물 100g을 A 그릇으로 옮기면 B 그릇에 남아 있는 소금의 양은

$\frac{2}{3}(24-a_n)=16-\frac{2}{3}a_n$이다.

소금의 총량은 24g으로 변하지 않으므로 A 그릇의 소금물 200g에 들어 있는 소금의 양은

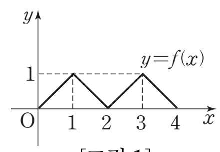
$$24-\left(16-\frac{2}{3}a_n\right)=8+\frac{2}{3}a_n$$

따라서, A 그릇의 소금물의 농도는 $4+\frac{1}{3}a_n$(%)

즉, $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+4$

$\therefore 3(p+q)=13$

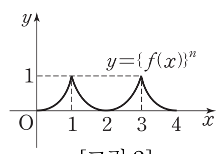
25. 함수 $y=f(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로 $0\le x\le 4$에서 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

또, $0\le f(x)\le 1$, $0\le\{f(x)\}^n\le 1$

이므로 $0\le x\le 4$에서 $y=\{f(x)\}^n$의 그래프를 그리면 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

$$\therefore S_n=\int_0^4\{f(x)\}^ndx$$

$$=4\int_0^1x^ndx=\frac{4}{n+1}$$

$\therefore S_{20}=\frac{4}{21}$ $\qquad\therefore p+q=21+4=25$

미분과 적분

26. 반각공식, 배각공식에 의하여

$\sin^2x=\frac{1-\cos 2x}{2},\ \sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2}$이므로

$$f(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{\sin 2x}{2}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\sin 2x+\cos 2x)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$\therefore$ 최댓값 $a=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$, 최솟값 $b=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\therefore a+b=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1$$

27. $5\theta=90^\circ$이므로 $2\theta=90^\circ-3\theta$

$\therefore \sin 2\theta=\sin(90^\circ-3\theta)=\cos 3\theta$

$\therefore 2\sin\theta\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

$\cos\theta\ne 0$이므로

$2\sin\theta=4\cos^2\theta-3$

$=4(1-\sin^2\theta)-3$

$\therefore 4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0$

$\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ($\because 0<\sin\theta<1$)

28. $\lim_{x\to 1}\frac{ax^2+bx}{\sin(x-1)}=2$에서 (분모)$\to 0$일 때, (분자)$\to 0$이어야 하므로

$\lim_{x\to 1}(ax^2+bx)=a+b=0 \qquad \therefore b=-a$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{ax^2-ax}{\sin(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{ax(x-1)}{\sin(x-1)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 1}ax}{\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}}$$

$$=\frac{a}{1}=a=2$$

$\therefore a=2,\ b=-a=-2$

$\therefore a-b=4$

29. $\lim_{h\to0}\frac{g(3+3h)-g(3-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{g(3+3h)-g(3)\}-\{g(3-2h)-g(3)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{g(3+3h)-g(3)}{3h}\times3$

$\quad-\lim_{h\to0}\frac{g(3-2h)-g(3)}{-2h}\times(-2)$

$=3g'(3)+2g'(3)=5g'(3)=10$

$\therefore g'(3)=2$

한편, $g(x)=f^{-1}(x)$이므로 $f(2)=3$에서 $g(3)=2$

$f'(g(x))\cdot g'(x)=1$에서

$\therefore f'(2)=\frac{1}{g'(3)}=\frac{1}{2}$

30. $\angle PAB=\theta$라고 하면

$\angle PA'A=\theta$(∵ 접선의 성질)

$\angle PAA'=\theta$(∵ $\overline{AP}=\overline{A'P}$)

이므로 $\angle APA'=\pi-2\theta$

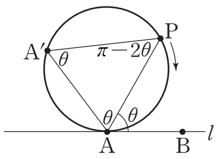
$\triangle APA'$에서 사인정리에 의해

$\frac{\overline{AA'}}{\sin(\pi-2\theta)}=\frac{\overline{AP}}{\sin\theta}$

이고

$\sin(\pi-2\theta)=\sin2\theta$

이므로



$\frac{\overline{AA'}}{\overline{AP}}=\frac{\sin2\theta}{\sin\theta}$

또한, 동점 P가 점 A에 한없이 가까워질 때, $\theta\to0$이므로

$\lim_{P\to A}\frac{\overline{AA'}}{\overline{AP}}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin2\theta}{\sin\theta}$

$=\lim_{\theta\to0}\frac{\frac{\sin2\theta}{2\theta}\cdot2}{\frac{\sin\theta}{\theta}}=\frac{2}{1}=2$

확률과 통계

26. 0부터 50까지는 도수가 일정하므로 누적상대도수의 그래프는 일직선으로 증가하고 그 이후로는 도수의 증가 폭이 커지므로 누적상대도수의 그래프가 점점 더 가파르게 상승하여야 한다.

따라서, 그래프의 개형은 ④와 같다.

27. ㄱ. 국어 점수의 최댓값의 편차가 $95-60=35$

최솟값의 편차가 $25-60=-35$

이므로 표준편차가 35를 넘을 수 없다. ∴ 참

ㄴ. (범위)=(최댓값)−(최솟값)이므로

국어 점수는 $95-25=70$

수학 점수는 $100-35=65$

의 범위를 갖는다.

따라서, 국어 점수의 범위가 수학 점수의 범위보다 크다. ∴ 참

ㄷ. 학생이 총 101명이므로 성적순으로 51번째 학생의 점수가 중앙값이 된다. ∴ 참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

28. 다섯장의 카드 중 두 번째에는 A 또는 B가 뽑혔으므로 첫번째에 나올 수 있는 경우는 네 가지이고, 이 중 C는 한 장뿐이므로 구하고자 하는 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

29. $x=2, 3, 4, 5, 6, 7$일 때, 확률분포표는 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	7
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$

$P(X=x)=\frac{x-1}{36}=\frac{1}{36}x-\frac{1}{36}=ax+b$

$\therefore a=\frac{1}{36},\ b=-\frac{1}{36}$

$x=8, 9, 10, 11, 12$일 때, 확률분포표는 다음과 같다.

X	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$P(X=x)=\frac{13-x}{36}=-\frac{1}{36}x+\frac{13}{36}=cx+d$

$\therefore c=-\frac{1}{36},\ d=\frac{13}{36}$

$\therefore a+b+c+d=\frac{1}{36}+\left(-\frac{1}{36}\right)+\left(-\frac{1}{36}\right)+\frac{13}{36}$

$=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

30. 정 중앙의 칸에 A를 배치하는 경우와 그렇지 않은 경우로 나누면

(ⅰ) 정 중앙에 A를 배치하는 경우

(1)		(2)
	A	
(3)		(4)

[그림 1]

A		A
	A	
A		(5)

[그림 2]

[그림 1]에서 (1), (2), (3), (4) 네 곳 중 세 곳을 선택하여 A를 배치하는 방법의 수 : ${}_4C_3=4$(가지)

예를 들어, [그림 2]와 같이 A가 배치된 경우, (5)의 자리에 B가 들어갈 경우는 전체 배치가 1가지, C가 들어갈 경우는 2가지이다.

$\therefore 4\cdot(1+2)=12$(가지)

(ⅱ) 정 중앙에 A를 배치하지 않는 경우

A		A
	(6)	
A		A

[그림 3]

	A	
A		A
	A	

[그림 4]

A를 [그림 3]과 같이 배치할 경우, (6)의 자리에는 B도 C도 올 수 없으므로 이때는 상품을 배치할 수 없다.

A를 [그림 4]와 같이 배치할 경우, B는 나머지 다섯 칸 중 세 칸에 배치하면 되므로 ${}_5C_3=10$(가지)

따라서, (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$12+10=22$(가지)

이산수학

26. 구슬이 미끄러져 왼쪽으로 내려가는 경우를 a, 오른쪽으로 내려가는 경우를 b라고 하면, 구하고자 하는 방법의 수는 여섯 개의 a와, 여섯 개의 b를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같다.

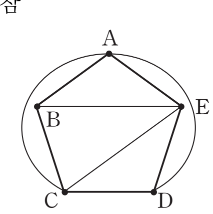
$\therefore \frac{12!}{6!\cdot6!}={}_{12}C_6$

따라서, $n+r$의 최솟값은 $12+6=18$이다.

27. 차수가 3 이상인 꼭짓점에서는 깊이 우선 검색 방법으로 검색할 때 2가지 이상의 순서가 가능하므로, 모든 꼭짓점의 차수가 2 이하인 것을 찾는다. 즉, 인접행렬에서 각 행과 각 열에 1이 두 번 이하로 나와야 한다.

따라서, ①과 같이 나타난다.

28. ㄱ. 다음 그림과 같이 변형할 수 있으므로 평면그래프이다. ∴ 참

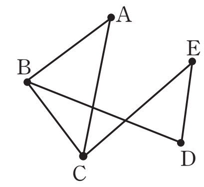


ㄴ. 점 B와 D는 홀수 차수이므로 오일러회로를 갖지 않는다. ∴ 거짓

ㄷ. 예를 들어, A ⟶ B ⟶ C ⟶ D ⟶ E ⟶ A와 같은 해밀턴회로가 존재한다. ∴ 참

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

29. 5개의 약품을 꼭짓점으로 하고, 친화도가 높은 약품들을 변으로 연결하여 그래프를 만들면 다음과 같다.



B와 같이 들어갈 수 있는 약품은 E뿐이고, C와 같이 들어갈 수 있는 약품은 D뿐이다.

따라서, 다음의 2가지 경우가 있다.

(ⅰ) B만 따로, C, D가 한 창고에

이때 A, E를 나머지 창고에 넣으면 된다.

(ⅱ) B, E가 한 창고에, C, D가 한 창고에

이때 A만 나머지 창고에 넣으면 된다.

따라서, (ⅰ), (ⅱ)에서 약품을 세 조로 나누는 방법이 세 가지이므로 구하는 방법은

$2\times3!=12$(가지)

30. 문제의 조건에 의하면 15를 자연수 네 개의 합으로 나타내면서 가장 큰 수는 6이어야 하므로

$15=6+a+b+c$

($6\geq a\geq b\geq c$이고, a, b, c는 자연수)

이어야 한다.

즉, $9=a+b+c$이므로 구하는 분할의 개수는

$6+2+1,\ 5+3+1,\ 5+2+2$

$4+4+1,\ 4+3+2,\ 3+3+3$

총 6가지가 있다.

'나' 형

1. ②	2. ④	3. ③	4. ③	5. ⑤
6. ③	7. ④	8. ④	9. ④	10. ⑤
11. ③	12. ②	13. ④	14. ③	15. ①
16. ⑤	17. ③	18. 1	19. 27	20. 40
21. 100	22. 14	23. 45	24. 13	25. 315
26. ②	27. ⑤	28. ②	29. ④	30. 600

1~2. '가' 형의 1~2번과 동일

3. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+3n+2}-2n)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n+2-4n^2}{\sqrt{4n^2+3n+2}+2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{\sqrt{4+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+2}=\frac{3}{4}$

4. '가' 형의 4번과 동일

5. $\log_2x+2\log_2x=3$

$3\log_2x=3,\ \log_2x=1$

$\therefore x=2$

6. $\begin{pmatrix}2 & a\\1 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2a & 6+2a\\1+2b & 3+2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 10\\9 & 11\end{pmatrix}$

$\therefore a=2,\ b=4$

$\therefore a+b=6$

7. '가' 형의 7번과 동일

8. $3n+1<(n+2)a_n<3n+3$에서

$\frac{3n+1}{n+2}<a_n<\frac{3n+3}{n+2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n+2}=3$, $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+3}{n+2}=3$

∴ $\lim_{n\to\infty}a_n=3$

9. $2^x=3^y=5^z$에서

$2=5^{\frac{z}{x}}$, $3=2^{\frac{x}{y}}$, $5=3^{\frac{y}{z}}$

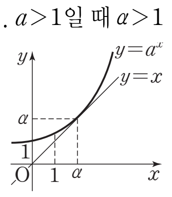
∴ $5^{\frac{z}{x}}+2^{\frac{x}{y}}+3^{\frac{y}{z}}=2+3+5$
$=10$

10. '가' 형의 10번과 동일

11. $ABC=E$이므로 $A^{-1}=BC$이고
$(AB)C=E$에서 $C^{-1}=AB$이다.
ㄱ. $BCA=(BC)A=A^{-1}A=E$
ㄴ. $CAB=C(AB)=CC^{-1}=E$
ㄷ. 【반례】 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}$
일 때, $CBA=\begin{pmatrix}4&5\\-1&-1\end{pmatrix}\neq E$이다.
따라서, 단위행렬 E와 같은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

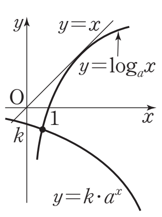
12. '가' 형의 12번과 동일

13. ㄱ. $a>1$일 때 $\alpha>1$



∴ 참

ㄴ. 【반례】 $k<0$일 때



따라서, $k<0$일 때에도 주어진 방정식은 근을 갖는다.
∴ 거짓

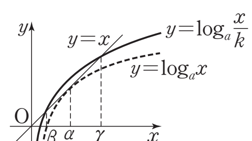
ㄷ. $0<k<1$일 때, 방정식 $\log_a\frac{x}{k}=x$의 해를 β라 하면

$\log_a\frac{x}{k}=\log_a x-\log_a k=x$

따라서, 방정식의 해 β는 두 함수 $y=\log_a x-\log_a k$, $y=x$의 그래프의 교점의 x좌표이다.

또, $y=a^x$와 $y=x$의 두 그래프의 교점이 (α, α)이므로 $y=\log_a x$와 $y=x$의 두 그래프의 교점도 (α, α)이다.

$a>1$일 때, $\log_a k<0$이므로



∴ 참

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

14. 바깥에 다섯 명을 세우는 경우와 네 명을 세우는 경우로 구분해서 계산해보면 된다.

바깥의 다섯 점에 다섯 명을 세우는 경우의 수는 다섯 명을 고르고 원형으로 배열하는 경우이므로 ${}_9C_5\times4!$(가지)이고, 안쪽은 바깥에 5명을 세우면 모두 구별되는 자리이므로 ${}_5P_4=5!$(가지)이다. 바깥에 4명을 세우는 경우도 마찬가지이다.

∴ ${}_9C_5\times4!\times5!\times2$(가지)

15~17. '가' 형의 15~17번과 동일

18. $\sqrt{2^{\sqrt{2}}}=2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$이므로 $(\sqrt{2^{\sqrt{2}}})^{\sqrt{2}}=2=k$

∴ $\log_2 k=\log_2 2=1$

19. '가' 형의 19번과 동일

20. $(a+b+c+d)^6$을 전개하면 곱해진 문자식의 차수는 6이다.

따라서, 4개의 문자 중 3개를 고르고 선택된 각 문자의 지수의 합이 6이면 된다.
세 지수의 합이 6인 경우를 생각하면
$(1+1+4)$일 때, $\frac{3!}{2!}=3$(가지)
$(1+2+3)$일 때, $3!=6$(가지)
$(2+2+2)$일 때, 1(가지)
∴ ${}_4C_3(3+6+1)=40$(가지)

21. '가' 형의 21번과 동일

22. $\log_a b=x$라 하면 $x>0$이고 주어진 부등식에서

$x>\frac{2}{x}+1$, $x^2-x-2>0$ ∴ $x>2$

즉, $\log_a b>2=\log_a a^2$이므로 $a^2<b<4a$

∴ $a=2$ 또는 $a=3$

(i) $a=2$일 때, $b=5, 6, 7$
(ii) $a=3$일 때, $b=10, 11$
따라서, (i), (ii)에서 $a+b$의 최댓값은 14이다.

23. $2^9=512$, $2^{10}=1024$

이때 $1=1_{(2)}$, $2=10_{(2)}$, $4=100_{(2)}$, $\cdots$,
$2^9=1000000000_{(2)}$이므로 M은
$1+2+3+\cdots+10=\frac{10\cdot11}{2}=55$자리의 수이고 1은 10번 나타난다.
따라서, 0의 개수는 $55-10=45$(개)이다.

24. '가' 형의 24번과 동일

25. 만들어지는 오각형은 닮음비가 $\frac{1}{3}$인 도형이므로 그 넓이는 공비가 $\frac{1}{9}$인 등비수열을 이룬다.

⬠ $A_1D_1E_1B_1C=\frac{7}{9}\times\triangle ABC$이므로

⬠ $A_1D_1E_1B_1C=\frac{7}{9}\times\frac{1}{2}\times18\times10=70$

∴ $S=\frac{70}{1-\frac{1}{9}}=\frac{630}{8}=\frac{315}{4}$

∴ $4S=315$

26. $A^{24}=A^{15}A^9=E$ ∴ $A^9=E$
$A^{15}=A^9A^6=E$ ∴ $A^6=E$
$A^9=A^6A^3=E$ ∴ $A^3=E$
또, $A\neq E$이므로 $A^2=A^3\cdot A^{-1}=A^{-1}\neq E$
$A^3=AA^2=E$이므로 $A^{-1}=A^2$

27. ㄱ. a, b가 서로 다른 양수이므로 산술-기하평균에서

$\frac{a^2+b^2}{2}>\sqrt{a^2b^2}=ab$이고, $f(x)=\log_2 x$가 증가함수이므로

$f\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)>f(ab)$ ∴ 참

ㄴ. $ab-(a+b)=(a-1)(b-1)-1>0$ ($\because a>2, b>2$)
$ab>a+b$이고, $f(x)=\log_2 x$가 증가함수이므로
$f(ab)>f(a+b)$ ∴ 참

ㄷ. $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$\frac{f(a)+f(b)}{2}=\log_2\sqrt{ab}$

이고 $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$이므로

$\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)>\log_2\sqrt{ab}$

즉, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{f(a)+f(b)}{2}$ ∴ 참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

28. 2^{12}은 12^{94}에 비해 상대적으로 매우 작으므로 12^{94}의 자리수를 조사해보자.

$\log12^{94}=94(\log4+\log3)=101.4354$

이므로 12^{94}은 102자리의 수이고 $\log2<0.4354<\log3$에서 12^{94}은 처음 자리가 2이다.

따라서, 네 자리수 2^{12}을 더하더라도 자릿수는 바뀌지 않으므로 $12^{94}+2^{12}$은 102자리의 수이다.

29. 행렬 B의 $(3, 4)$성분은 A의 3행

$a_{3k}=3k+2$ $(k=1, 2, \cdots, n)$

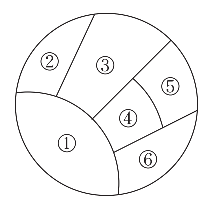
과 4열

$a_{k4}=5k-1$ $(k=1, 2, \cdots, n)$

의 곱의 합이므로

$\sum_{k=1}^{n}\{(3k+2)(5k-1)\}=\sum_{k=1}^{n}(15k^2+7k-2)$

30. 6개의 영역에 5가지의 색을 칠하려면 한 색이 두 번 사용되어야 하므로 두 번 사용할 색을 정하는 방법은 5가지이고, 같은 색이 칠해지는 경우는 ①과 ⑤, ②와 ④, ②와 ⑤, ②와 ⑥, ③과 ⑥의 5가지 경우가 있다. 나머지는 각 영역에 서로 다른 4가지 색을 칠하면 되므로 4!(가지)



∴ $5\times5\times4!=600$(가지)