정병호/정병훈T

2018학년도 9월 평가원모의고사 수학 가형 해설

1. $\vec{a}=(6,2)$, $\vec{b}=(0,4)$이므로, $\vec{a}-\vec{b}=(6,-2)$이다.
따라서 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$의 모든 성분의 합은 $6+(-2)=4$이다.

정답 : ④

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{4x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\times\frac{7}{4}\right)=1\times\frac{7}{4}=\frac{7}{4}$

정답 : ⑤

3. $A(2,0,4)$, $B(5,0,a)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는 $\left(4,0,\frac{4+2a}{3}\right)$이다. 이 점이 x축 위에 있어야 하므로, $\frac{4+2a}{3}=0$이다.
$\therefore\ a=-2$

정답 : ②

4. $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{5}$

정답 : ④

5. $\lim_{x\to-\infty}(2^x+5)=5$이므로 곡선 $y=2^x+5$의 점근선의 방정식은 $y=5$이다.
직선 $y=5$와 곡선 $y=\log_3 x+3$의 교점의 x좌표는 방정식 $\log_3 x+3=5$의 x의 실근과 같다.
$\therefore\ x=9$

정답 : ③

6. $0\le x\le\pi$일 때 $0\le 2x\le 2\pi$이다.

$\sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$에서 $2x = \frac{5\pi}{4}$ 또는 $2x = \frac{7\pi}{4}$이다.

$x = \frac{5\pi}{8}$ 또는 $x = \frac{7\pi}{8}$이므로, x의 모든 해의 합은 $\frac{5\pi}{8} + \frac{7\pi}{8} = \frac{3\pi}{2}$이다.

정답 : ③

7. $0 < a < 1$이므로, $f'(x) = a^x \ln a < 0$이다.
따라서 $f(x) = a^x$는 감소함수다.
닫힌구간 $[-2, 1]$에서 $f(x)$는 최댓값 $f(-2) = a^{-2} = M$을 갖고, 최솟값 $f(1) = a = \frac{5}{6}$을 갖는다.

$\therefore\ a \times M = \frac{1}{a} = \frac{6}{5}$

정답 : ⑤

8. $\ln x = t$로 치환하면, $\frac{1}{x}dx = dt$이다.
$x = 1$일 때 $t = 0$이고, $x = e$일 때 $t = 1$이다.

$\therefore\ \int_1^e \frac{3(\ln x)^2}{x}dx = \int_0^1 3t^2 dt = \left[t^3\right]_0^1 = 1$

정답 : ①

9. 주축과 켤레축이 각각 x축, y축인 쌍곡선의 두 점근선이 서로 수직이면, 두 점근선의 방정식은 각각 $y = x$, $y = -x$이다.

구하려는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (단, $a > b > 0$)이라 하면,

점근선의 방정식은 $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$이므로, $\frac{b}{a} = 1$이다. 즉, $b = a$이다.

이 때, 초점의 좌표는 $\left(\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0\right)$이므로, $a^2 + b^2 = 5^2$이다.

$b = a$를 대입하면, $2a^2 = 5^2$이 되어, $a = \frac{5}{\sqrt{2}}$이다.

$\therefore$ 쌍곡선의 주축의 길이는 $2a = 5\sqrt{2}$이다.

정답 : ④

10. 서로 다른 6장의 카드 중에 양 끝에 배치될 카드 2장을 선택하는 조합들의 집합을 표본공간 S_1이라 하자. $n(S_1)={}_6C_2$이고, 집합 S_1에 속하는 각각의 원소는 선택될 가능성이 같은 정도로 기대된다.

양 끝 모두에 A가 적힌 카드가 나오는 사건을 T_1이라 하자. 서로 다른 3장의 A 중에 2장을 선택하여 얻은 조합들이 집합 T_1의 원소가 되므로, $n(T_1)={}_3C_2$이다.

$$\therefore\ P(T_1)=\frac{n(T_1)}{n(S_1)}=\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$$

<해설2> 일렬로 배치된 6개의 자리 중에서 A가 들어갈 자리 3개를 선택하여 얻은 조합들의 집합을 표본공간 S_2라 하자. $n(S_2)={}_6C_3$이고, 집합 S_2에 속하는 각각의 원소는 선택될 가능성이 같은 정도로 기대된다.

양 끝 모두에 A가 적힌 카드가 나오는 사건을 T_2이라 하자. 사건 T_2는 6자리 중에 양 끝의 자리를 반드시 선택하는 경우를 말한다. 양 끝을 제외한 나머지 4자리 중에서 1개를 더 선택하면 되므로, $n(T_2)=4$이다.

$$\therefore\ P(T_2)=\frac{n(T_2)}{n(S_2)}=\frac{4}{{}_6C_3}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

정답 : ②

11. $f(x)=x^3+5x+3$의 양변을 x에 관하여 미분하면, $f'(x)=3x^2+5$이다.
$f(0)=3$이므로, $g(3)=0$이다.
$g(x)=t$로 치환하면, $x=f(t)$이다.
$x \to 3$일 때 $t \to 0$이다.

$$\begin{aligned}\therefore\ g'(3)&=\lim_{x\to3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}\\&=\lim_{t\to0}\frac{t-0}{f(t)-f(0)}\\&=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

정답 : ③

12. $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$로 치환하면, Z는 표준정규분포 $N(0,1)$을 따른다.

$P(m \le X \le m+12) - P(X \le m-12) = 0.3664$에서

$P\left(0 \le Z \le \dfrac{12}{\sigma}\right) - P\left(Z \le -\dfrac{12}{\sigma}\right) = 0.3664$이다.

$P\left(0 \le Z \le \dfrac{12}{\sigma}\right) - \left\{0.5 - P\left(0 \le Z \le \dfrac{12}{\sigma}\right)\right\} = 0.3664$이므로, $P\left(0 \le Z \le \dfrac{12}{\sigma}\right) = 0.4332$이다.

$\therefore\ \dfrac{12}{\sigma} = 1.5$가 되어, $\sigma = 8$이다.

정답 : ③

13. 점 $(1, a, 0)$이 직선 $\dfrac{x-1}{2} = y+1 = z$ 위에 있으므로, $\dfrac{1-1}{2} = a+1 = 0$이다.

따라서 $a = -1$이다.

직선 $\dfrac{x-1}{2} = y+1 = z$의 방향벡터는 $\overrightarrow{d_1} = (2, 1, 1)$이다.

직선 l의 방향벡터는 $\overrightarrow{d_2} = (b, -3, -2) - (1, -1, 0) = (b-1, -2, -2)$이다.

$\overrightarrow{d_1} \bullet \overrightarrow{d_2} = 0$으로부터 $(2, 1, 1) \bullet (b-1, -2, -2) = 0$이다.

$2b - 6 = 0$이므로, $b = 3$이다.

$\therefore\ a + b = (-1) + 3 = 2$

정답 : ①

14. $E(Y) = \sum_{k=1}^{5} k\left\{\dfrac{1}{2}P(X=k) + \dfrac{1}{10}\right\}$

$= \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{5} kP(X=k) + \dfrac{1}{10}\sum_{k=1}^{5} k$

$= \dfrac{1}{2}E(X) + \dfrac{1}{10} \times \left(\dfrac{1}{2} \times 5 \times 6\right)$

$= \dfrac{1}{2} \times 4 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{7}{2}$

정답 : ②

15. $P(t, 1-t^2)$이라 하면, $H(0, 1-t^2)$이므로, $\tan\theta_1 = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{PH}} = \dfrac{1-(1-t^2)}{t} = t$이다.

$\tan\theta_1 = \dfrac{1}{2}$로부터 $t = \dfrac{1}{2}$이다. 따라서 $\tan\theta_2 = \dfrac{1-t^2}{t} = \dfrac{3}{2}$이다.

$\therefore\ \tan(\theta_1 + \theta_2) = \dfrac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1 \tan\theta_2}$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}}=8$$

정답 : ④

16. $P(a^p, p)$, $Q(a^q, q)$라 하면, 선분 PQ가 원 C의 지름이므로, 선분 PQ의 중점이 원 C의 중심인 $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$이다. 따라서 $a^p+a^q=\frac{5}{2}$, $p+q=0$이 성립한다.

$p+q=0$에서 $a^pa^q=1$이다.

t에 관한 방정식 $t^2-\frac{5}{2}t+1=0$의 두 근이 a^p, a^q이 된다.

$2t^2-5t+2=0$에서 $(2t-1)(t-2)=0$이다.

$\therefore\ t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$

$a^p=2$, $a^q=\frac{1}{2}$로 놓고 풀어도 일반성을 잃지 않는다. $P(2, p)$가 원 C 위에 있으므로,

$\left(2-\frac{5}{4}\right)^2+p^2=\frac{13}{16}$이다. 따라서 $p^2=\frac{1}{4}$이므로, $p=\frac{1}{2}$이다.

($\because\ a>1$, $a^p=2$이므로 $p>0$이다.)

$\therefore\ a^{\frac{1}{2}}=2$이므로 $a=4$이다.

정답 : ③

17. 구 S의 중심은 점 $M(0,0,1)$이고, 원 C의 중심은 원점 O이다. 이 두 점을 잇는 직선은 z축인데, xy평면이 z축에 수직이다. 따라서 구 S와 원 C 모두 z축 둘레로 회전한 회전체라고 볼 수 있다. 따라서 P가 zx평면 위에 놓이는 경우만 풀어도 일반성을 잃지 않는다.

이제 벡터 $\overrightarrow{MP}$는 평면 PQR의 법선벡터이므로, z축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$가 되어야 한다. 따라서 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$이다.

평면 PQR 위의 임의의 점 $X(a,b,c)$에 대하여 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{PX}=0$이므로,

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)\cdot\left(a-\frac{\sqrt{3}}{2}, b, c-\frac{3}{2}\right)=0$이다.

즉, $\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}c-\frac{3}{2}=0$이다. 이 때, 두 점 Q, R은 원 $a^2+b^2=4$, $c=0$ 위에도 있으므로,

연립하여 해결한다. $\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}c-\frac{3}{2}=0$에 $c=0$을 대입하면, $a=\sqrt{3}$이다.

$a^2+b^2=4$에 $a=\sqrt{3}$을 대입하면, $b=\pm 1$이다.
두 점 Q, R은 각각 $(\sqrt{3},1,0)$, $(\sqrt{3},-1,0)$이므로, 선분 QR의 길이는 2이다.

정답 : ④

18. $A(t, f(t))$에서 $B(t,0)$이므로, $\overline{AB}=|f(t)|$이다.
또, 점 A를 지나고 점 A에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)$이다.
이 직선이 x축과 만나는 점은 $C(t+f(t)f'(t),0)$이다.
따라서 $\overline{BC}=|f(t)f'(t)|$이다.

삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}$이므로,

$\frac{1}{2}\times|f(t)|\times|f(t)f'(t)|=\frac{1}{2}(e^{3t}-2e^{2t}+e^t)$이다.

$f'(t)>0$임을 고려하면, $\{f(t)\}^2f'(t)=e^t(e^t-1)^2$이다.

양변의 부정적분을 구하면, $\frac{1}{3}\{f(t)\}^3=\frac{1}{3}(e^t-1)^3+C$이다. (단, C는 적분상수)

$t=0$을 대입하면, $C=0$이다. ($\because$ $f(0)=0$)
따라서 $\{f(t)\}^3=(e^t-1)^3$가 되어, $f(t)=e^t-1$이다.

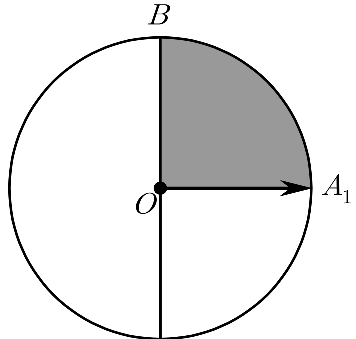
$$\therefore \int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(e^x-1)dx$$
$$=\left[e^x-x\right]_0^1=e-2$$

정답 : ①

19. $\overrightarrow{OX}\bullet\overrightarrow{OA_k}\geq 0$에서 $|\overrightarrow{OX}||\overrightarrow{OA_k}|\cos\angle A_kOX\geq 0$이므로, $\angle A_kOX\leq\frac{\pi}{2}$이다.
즉, 집합 D의 원소는 원점으로부터 거리가 1 이하인 점 X 중에서 세 점 A_1, A_2, A_3에 대하여 $\angle A_1OX\leq\frac{\pi}{2}$, $\angle A_2OX\leq\frac{\pi}{2}$, $\angle A_3OX\leq\frac{\pi}{2}$가 모두 성립하는 점이다.

ㄱ. $\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OA_2}=\overrightarrow{OA_3}$이면, $\angle A_1OX\leq\frac{\pi}{2}$인 경우만 고려하면 된다.
[그림1]의 색칠한 영역의 모든 점의 집합이 집합 D가 된다.
(경계 포함)
따라서 D는 반지름의 길이가 1이고, 중심각의 크기가 π인

[그림1]



부채꼴이 되어 그 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1^2\times\pi=\frac{\pi}{2}$이다.

$\therefore$ 참

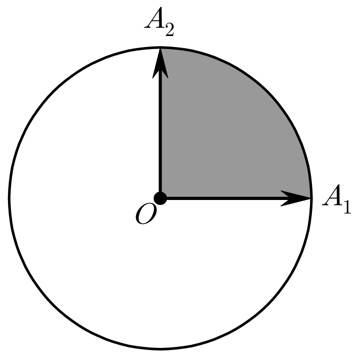
ㄴ. $\overrightarrow{OA_2}=-\overrightarrow{OA_1}$이면, $\angle A_2OX\le\frac{\pi}{2}$를 만족하는 점들의 집합은 [그림1]에서 색칠하지 않은 영역의 모든 점의 집합이다. (경계 포함) 따라서 [그림1]의 색칠한 영역과 색칠하지 않은 영역의 경계인 선분 BC 위의 모든 점이 $\angle A_1OX\le\frac{\pi}{2}$, $\angle A_2OX\le\frac{\pi}{2}$를 동시에 만족한다.

따라서 D는 길이가 2인 선분이다.

$\therefore$ 참

ㄷ. $\overrightarrow{OA_1}\bullet\overrightarrow{OA_2}=0$이므로 [그림2]와 같이 두 벡터 $\overrightarrow{OA_1}$과 $\overrightarrow{OA_2}$를 수직이 되도록 그린다. [그림2]에서 색칠한 영역이 $\angle A_1OX\le\frac{\pi}{2}$, $\angle A_2OX\le\frac{\pi}{2}$를 동시에 만족하는 영역이다. (단, 경계 포함) 이 영역의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$이다. 이 때, D의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$가 되려면, [그림2]의 색칠한 영역 위의 모든 점에 대하여 $\angle A_3OX\le\frac{\pi}{2}$가 성립해야 한다. 이렇게 되기 위해서는 A_3는 색칠한 영역의 경계에 놓여야 한다. 따라서 A_3는 D에 포함되어 있다.

[그림2]



$\therefore$ 참

정답 : ⑤

20. 세 상자에서 중복을 허락하여 n개의 상자를 선택하는 경우의 수는

${}_3H_n=\boxed{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}$이다. 따라서 (가)에는 $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$가 들어가는 것이 적당하다.

$\therefore$ $f(n)=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

두 상자 A, B에 같은 개수의 공이 들어갈 때는 $\frac{n}{2}$개부터 n개까지 선택할 수 있다. 따라서 그 경우의 수는 $n-\frac{n}{2}+1=\boxed{\frac{n+2}{2}}$이다. 따라서 (나)에는 $\frac{n+2}{2}$가 들어가는 것이 적당하다.

$\therefore$ $g(n)=\frac{n+2}{2}$

세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수는

$_3H_n - {}_3C_2 \times \left(\frac{n+2}{2}-1\right) - 1 = \frac{(n+2)(n+1)}{2} - \frac{3n}{2} - 1 = \boxed{\frac{n^2}{2}}$이다. 따라서 (다)에는 $\frac{n^2}{2}$가 들어가는 것이 적당하다.

$\therefore\ h(n) = \frac{n^2}{2}$

$$\therefore\ \frac{f(30)}{g(30)} + h(30) = \frac{\frac{32 \times 31}{2}}{\frac{32}{2}} + \frac{30^2}{2} = 481$$

정답 : ①

21. $a_n \le x \le a_{n+1}$인 범위에서 $2^n\pi a_n \le 2^n\pi x \le 2^n\pi a_{n+1}$이므로,

$2^n\pi\left(2 - \frac{1}{2^{n-2}}\right) \le 2^n\pi x \le 2^n\pi\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$이다.

$\pi(2^{n+1} - 4) \le 2^n\pi x \le \pi(2^{n+1} - 2)$이다.

이 때, $\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx = \int_{a_n}^{a_{n+1}} \sin(2^n\pi x)dx = \left[-\frac{1}{2^n\pi}\cos(2^n\pi x)\right]_{a_n}^{a_{n+1}} = 0$이다.

수열 $\{a_n\}$이 증가수열이므로, $0 < t < 2$를 만족하는 임의의 t에 대하여 $a_m \le t < a_{m+1}$인 자연수 m이 유일하게 존재한다.
$0 < t < 1$일 때와 $1 \le t < 2$로 경우를 나눠서 다음과 같이 생각한다.

i) $0 < t < 1$일 때 $a_2 = 1$이므로, $m = 1$이다.

이 때는 $\int_\alpha^t f(x)dx = 0$에서 $\int_\alpha^t \sin(2\pi x)dx = 0$이다.

$\left[-\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi x)\right]_\alpha^t = 0$이므로, $\cos(2\pi t) = \cos(2\pi\alpha)$이다.

이 범위에서는 $\alpha = -\frac{1}{2}$인 경우에만 $t = \frac{1}{2}$로 근이 1개 존재하고,

$-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ 또는 $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$일 때는 t의 근이 2개 존재한다.

ii) $1 \le t < 2$인 경우 $a_m \le t < a_{m+1}$인 2 이상의 자연수 m에 대하여

$\int_\alpha^t f(x)dx = 0$으로부터 $\int_\alpha^0 \sin(2\pi x)dx + \int_{a_m}^t \sin(2^m\pi x)dx = 0$이다.

$\left[-\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi x)\right]_\alpha^0 + \left[-\frac{1}{2^m\pi}\cos(2^m\pi x)\right]_{a_m}^t = 0$에서

$-\frac{1}{2\pi}(1-\cos(2\pi\alpha))-\frac{1}{2^m\pi}\cos(2^m\pi t)+\frac{1}{2^m\pi}\cos(2^m\pi a_m)=0$이다.

$-\frac{1}{2}(1-\cos(2\pi\alpha))-\frac{1}{2^m}\cos(2^m\pi t)+\frac{1}{2^m}=0$이므로 $\cos(2^m\pi t)=1-2^{m-1}(1-\cos(2\pi\alpha))$이다.

$a_m \le t < a_{m+1}$인 범위에서 $\pi(2^{m+1}-4)\le 2^m\pi t \le \pi(2^{m+1}-2)$가 되어, $\cos(2^m\pi t)$도 i)의 경우와 마찬가지로 한 주기의 범위에서 생각하면 된다.

a) $1-2^{m-1}(1-\cos(2\pi\alpha))< -1$일 때는 t의 근이 없다.

b) $1-2^{m-1}(1-\cos(2\pi\alpha))=-1$일 때는 t의 근이 1개다.

c) $1-2^{m-1}(1-\cos(2\pi\alpha))>-1$일 때는 t의 근이 2개다.

이제 t의 근이 총 103개가 되기 위해서는 i), ii)의 경우를 합쳐서 103개가 나와야 한다.

$\alpha=-\frac{1}{2}$일 때는 i)에서 t의 근이 1개가 되는데, ii)에서 a)의 경우에 해당하여 t의 근이 더 이상 없게 되어 모순이다. 따라서 $\alpha\ne-\frac{1}{2}$이고, i)에서 t의 근은 2개가 나온다.

그러면 ii)에서 t의 근이 101개가 나와야 하는데,

c)를 만족하는 m이 50개, b)를 만족하는 m이 1개가 나와야 한다.

따라서 $2\le m\le 51$일 때 c)를 만족해야 하고, $m=52$일 때 b)를 만족해야 한다.

$1-2^{51}(1-\cos(2\pi\alpha))=-1$이므로, $1-\cos(2\pi\alpha)=\frac{1}{2^{50}}$이다.

$\therefore\ \log_2(1-\cos(2\pi\alpha))=-50$

정답 : ②

22. ${}_7P_3=7\times6\times5=210$

정답 : 210

23. $f(x)=-\cos^2 x$의 양변을 x에 관하여 미분하면, $f'(x)=2\cos x\sin x$이다.

$\therefore\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}=2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=1$

정답 : 1

24. $5x+xy+y^2=5$의 양변을 x에 관하여 미분하면,

$5+y+x\times\frac{dy}{dx}+2y\times\frac{dy}{dx}=0$이다.

$(x, y)=(1, -1)$을 대입하면, $4-\dfrac{dy}{dx}=0$이므로, $\dfrac{dy}{dx}=4$이다.

정답 : 4

25. D에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면, 삼수선의 정리에 의하여 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발도 H가 된다.

삼각형 ABD의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{DH}=20$이다. $\overline{AB}=8$을 대입하면, $\overline{DH}=5$이다.

삼각형 CDH에서 피타고라스의 정리를 쓰면, $\overline{CH}=\sqrt{\overline{DH}^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$이다.

$\therefore$ (삼각형 ABC의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CH}=\dfrac{1}{2}\times8\times3=12$

정답 : 12

26. 초콜릿 한 개의 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{49}}\leq m\leq\overline{x}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{49}}$ 이다.

$\overline{x}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{49}}=1.73$ …… Ⓐ, $\overline{x}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{49}}=1.87$ …… Ⓑ이다.

Ⓐ식과 Ⓑ식을 변변끼리 더하면, $2\overline{x}=3.6$이므로, $\overline{x}=1.8$이다.

Ⓑ식에서 Ⓐ식을 변변끼리 빼면, $2\times1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{49}}=0.14$이므로, $\sigma=\dfrac{1}{4}$이다.

$\therefore\ 180k=180\times\dfrac{\sigma}{\overline{x}}=25$

정답 : 25

27. $\overline{AF}=2$이므로, $c-a=2$이다. $c=a+2$이므로, $\overline{F'F}=2c=2a+4$이다.

따라서 $\overline{PA}=\overline{PF}$이므로, P는 선분 AF의 수직이등분선인 직선 $x=a+1$ 위에 있다. 따라서 P의 x좌표는 $a+1$이다.

포물선의 준선의 방정식은 $x=-a$이므로, P에서 준선에 내린 수선의 길이는

$(a+1)-(-a)=2a+1$이다. 포물선의 정의에 의해 이 길이는 선분 AP의 길이와 같다.

따라서 $\overline{AP}=2a+1$, $\overline{PF}=2a+1$이다.

그런데, 두 삼각형 PAF와 $F'PF$에서 $\angle PFA=\angle F'FP$이고, $\angle PAF=\angle F'PF$이다. 따라서 두 삼각형 PAF와 $F'PF$는 닮음이다. (AA) 닮음비를 쓰면, $\overline{AF}:\overline{PF}=\overline{PF}:\overline{F'F}$이다.

즉, $\overline{PF}^2=\overline{AF}\times\overline{F'F}$이다.

$(2a+1)^2 = 2(2a+4)$이므로, $4a^2 = 7$이다.

$\therefore\ a = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

타원의 장축의 길이는 $\overline{PF'} + \overline{PF} = (2a+4) + (2a+1) = 5 + 4a = 5 + 2\sqrt{7}$ 이다.

$\therefore\ p = 5,\ q = 2$이므로, $p^2 + q^2 = 29$이다.

정답 : 29

28. $A,\ B,\ C$ 주머니에서 각각 하나씩의 카드를 선택하여 적힌 수를 순서대로 나열하여 만든 중복순열들의 집합을 표본공간 S라 하자. 그러면, $n(S) = 6 \times 3 \times 3 = 54$이고, 집합 S에 속하는 각각의 원소들은 선택될 가능성이 같은 정도로 기대된다.

이 때, 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을이 꺼낸 카드에 적힌 수보다 큰 사건을 X, 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을과 병이 꺼낸 카드에 적힌 수의 합보다 큰 사건을 Y라 하자.

$n(X)$는 다음과 같이 구한다.
$k = 1,\ 2,\ 3$에 대하여 을이 꺼낸 카드에 적힌 수가 k일 때 갑은 $k+1$부터 6까지 중에서 선택하면 된다. 따라서 갑이 선택하는 방법의 수는 $6 - (k+1) + 1 = 6 - k$이다.
이 때, 병은 1, 2, 3 중에 자유롭게 하나의 카드를 선택할 수 있다.

$\therefore\ n(X) = 3 \times \displaystyle\sum_{k=1}^{3}(6-k) = 36$

이 때, 사건 Y는 사건 X의 조건을 모두 만족하므로, $Y \subset X$이다.
따라서 $X \cap Y = Y$이다. $n(X \cap Y) = n(Y)$는 다음과 같이 구한다.
i) 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 1 또는 2일 때는 을과 병이 꺼낸 카드에 적힌 수의 합보다 클 수 없다.
ii) 갑이 3을 꺼내면, 을과 병은 $(1,1)$을 꺼내야 한다.
iii) 갑이 4를 꺼내면, 을과 병은 $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$ 중에 하나를 꺼내야 한다.
iv) 갑이 5를 꺼내면, 을과 병은 $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(1,3)$, $(2,2)$, $(3,1)$ 중에 하나를 꺼내야 한다.
v) 갑이 6을 꺼내면, 을과 병은 $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(1,3)$, $(2,2)$, $(3,1)$, $(2,3)$, $(3,2)$ 중에 하나를 꺼내야 한다.

$\therefore\ n(X \cap Y) = n(Y) = 1 + 3 + 6 + 8 = 18$

$\therefore\ P(Y|X) = \dfrac{n(X \cap Y)}{n(X)} = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ k = \dfrac{1}{2}$이므로, $100k = 50$이다.

정답 : 50

29. $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$으로부터 P는 벡터 $\overrightarrow{OB}$를 법선벡터로 하고, 한 점 O를 지나는 평면 위에 있다. 이 평면은 xy평면이다. $|\overrightarrow{OP}| \leq 4$이므로, 점 P는 xy평면 위에 있으며, 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 원의 경계 또는 내부에 있다.
$\overline{BP}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OP}^2 \leq 2^2 + 4^2 = 20$이므로, $\overline{BP} \leq 2\sqrt{5}$이다.
$\overrightarrow{PQ} = (p, q, r)$라 하자. $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OA} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$로부터 $p \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다.

이 때 부등식 $\overline{BQ} \leq \overline{BP} + \overline{PQ} \leq 1 + 2\sqrt{5}$ …… Ⓐ이 성립한다.
부등식 Ⓐ의 등호는 세 점 B, P, Q가 이 순서로 한 직선 위에 있는 경우에 해당한다.
$P(4, 0, 0)$인 경우에 $\overrightarrow{BP} = (4, 0, -2)$이다. 벡터 $\overrightarrow{BP}$와 같은 방향으로 크기가 1인 단위벡터는
$\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\overrightarrow{BP} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$이다. 이 때, $\dfrac{2}{\sqrt{5}} > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로, $\overrightarrow{PQ} = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}\overrightarrow{BP}$가 되어,
$Q\left(4 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}, 0, -2 - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$일 때 부등식 Ⓐ의 등호가 성립한다.
따라서 $M = 1 + 2\sqrt{5}$이다.

한편 $|\overrightarrow{PQ}| = 1$로부터 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$이다. $p \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로, $r^2 \leq \dfrac{1}{4}$이 되어, $r \leq \dfrac{1}{2}$이 성립한다.
이제 B의 z좌표는 2이다. Q의 z좌표가 $\dfrac{1}{2}$이므로, $Q\left(0, 0, \dfrac{1}{2}\right)$인 경우가 가능하면, 선분 BQ의 길이가 최소가 된다. $Q\left(0, 0, \dfrac{1}{2}\right)$일 때, $P\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right)$이면, $\overrightarrow{PQ} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0, 1\right)$이 되어
$|\overrightarrow{PQ}| = 1$이고, $p = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이며, $\overline{OP} \leq 4$도 만족한다.
따라서 $m = \dfrac{3}{2}$이다.
$\therefore\ M + m = \dfrac{5}{2} + 2\sqrt{5}$
$\therefore\ a = \dfrac{5}{2}$, $b = 2$이므로 $6(a+b) = 27$이다.

정답 : 27

30. $g(x) = i(x-k)$가 되는 이차함수 $i(x)$를 생각하자.
또, $j(x) = h(x+k)$라 하면,
$h(x) = |g(x) - f(x-k)|$에서 $j(x) = |g(x+k) - f(x)| = |i(x) - f(x)|$이다.

문제의 조건에서 $h(x)$가 $x=k$에서 최솟값 $g(k)$를 갖는다고 했으므로, $j(x)$는 $x=0$에서 최솟값 $i(0)$을 갖는다. 또, $h(x)$는 닫힌구간 $[k-1, k+1]$에서 최댓값 $2e+\ln\left(\dfrac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$를 갖는다고 했으므로, $j(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 최댓값 $2e+\ln\left(\dfrac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$를 갖는다.

그리고, 구하려는 값은 $g'\left(k-\dfrac{1}{2}\right)=i'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$이다.

이제 문제에 더 이상 k에 관한 정보가 없는 상태가 되었다.

$j(x)$는 $x=0$에서 최솟값 $i(0)$을 갖는다는 조건부터 생각하자.

$j(0)=|i(0)-f(0)|=i(0)$에서 $f(0)=2+\ln 2$이므로, $i(0)=1+\dfrac{1}{2}\ln 2$를 얻는다.

따라서 $j(x)$의 최솟값은 $1+\dfrac{1}{2}\ln 2>0$가 되어, 함수 $y=j(x)$의 그래프가 x축과 만나지 않는다.

이것은 $i(x)-f(x)$의 부호가 변하지 않음을 의미하는데, $i(0)-f(0)<0$이므로, 모든 실수 x에 대하여 $i(x)-f(x)<0$이어야 한다. 따라서 모든 실수 x에 대하여 $j(x)=f(x)-i(x)$가 된다.

$j(x)$가 $x=0$에서 최소이고, $j(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로 $j'(0)=f'(0)-i'(0)=0$이다.

$f'(x)=2e^x+\dfrac{e^x}{e^x+1}$에서 $f'(0)=\dfrac{5}{2}$이므로, $i'(0)=\dfrac{5}{2}$이다.

이제, $i(x)=ax^2+\dfrac{5}{2}x+1+\dfrac{1}{2}\ln 2$라 하자. (단, a는 0이 아닌 상수)

그런데, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로, $i(x)$의 2차항의 계수인 a가 양수라고 가정하면,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\{i(x)-f(x)\}=\infty$가 되어, 모든 실수 x에 대하여 $i(x)-f(x)<0$라는 사실에 모순이다.

따라서 $a<0$이다.

$f(x)=\ln(e^x+1)+2e^x$에서 $f'(x)=2e^x+\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $f''(x)=2e^x-\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{2e^{3x}+4e^{2x}+e^x}{(e^x+1)^2}>0$이다.

$j''(x)=f''(x)-i''(x)>0$이므로, $j'(x)=f'(x)-i'(x)$는 증가함수가 된다.

$x<0$일 때 $j'(x)<j'(0)=0$이므로, $j(x)$는 구간 $[-1, 0]$에서 감소한다.

$x>0$일 때 $j'(x)>j'(0)=0$이므로, $j(x)$는 구간 $[0, 1]$에서 증가한다.

따라서 $j(1)$과 $j(-1)$ 중에 $j(x)$의 구간 $[-1, 1]$에서의 최댓값이 있다.

그런데, $j(1)=f(1)-i(1)=2e+\ln(1+e)-i(1)$,

$j(-1)=f(-1)-i(-1)=\dfrac{2}{e}+\ln(e+1)-1-i(-1)$이므로

$j(1)-j(-1)=2e-\dfrac{2}{e}+1-i(1)+i(-1)=2e-\dfrac{2}{e}-4>0$이다. 따라서 $j(1)$이 최댓값이다.

$j(1)=2e+\ln(1+e)-i(1)=2e+\ln\left(\dfrac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$로부터 $i(1)=\dfrac{1}{2}\ln 2$이다.

$i(x)=ax^2+\frac{5}{2}x+1+\frac{1}{2}\ln 2$에서 $i(1)=a+\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}\ln 2$가 되어, $a=-\frac{7}{2}$이다.

$i'(x)=2ax+\frac{5}{2}=-7x+\frac{5}{2}$이므로, $i'\left(-\frac{1}{2}\right)=6$이다.

정답 : 6