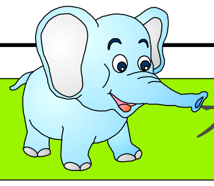
2018학년도 대학수학능력시험 모의평가 1회

수학 영역(나 형) 해설지

Epsilon



정답 및 해설

1) [정답] ② (출제자 : 17 김정빈)

[출제의도] 간단한 지수의 계산을 할 수 있는가?

[해설]

$6 \times 4^{-\frac{1}{2}} = 6 \times \frac{1}{2} = 3$

2) [정답] ③ (출제자 : 17 김정빈)

[출제의도] 원소나열법으로 표현된 집합에 대하여 간단한 연산을 할 수 있는가?

[해설]

$A \cap B = \{3,\ 5\}$ 이므로 $n(A \cap B) = 2$ 이다.

3) [정답] ④ (출제자 : 17 석진우)

[출제의도] 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

$$\lim_{n \to \infty} \frac{5 \times 2^{n+2} - 1}{2^n + 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{5 \times 2^2 - \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{2^n}} = 20$$

4) [정답] ① (출제자 : 17 김정빈)

[출제의도] 등비수열의 정의를 알고 간단한 계산을 할 수 있는가?

[해설]

수열 $\{a_n\}$ 의 공비가 $\frac{a_2}{a_1} = 2$ 이므로 $a_4 = a_3 \times 2 = a_2 \times 2^2 = 8$ 이다.

5) [정답] ③ (출제자 : 17 최수영)

[출제의도] 합성함수의 함숫값을 구할 수 있는가?

[해설]

그림을 보면 $f(3) = 3$ 임을 알 수 있고, $f(1) = 2$ 이므로

$(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(2) = 1$ 이다.

따라서 $f(3) + f(f(1)) = 3 + 1 = 4$ 이다.

6) [정답] ⑤ (출제자 : 17 김정빈)

[출제의도] 다항함수의 정적분을 할 수 있는가?

[해설]

$$\int_0^2 (x^3 + 10)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + 10x\right]_0^2 = 24 - 0 = 24$$

7) [정답] ② (출제자 : 17 문혁준)

[출제의도] 독립사건의 정의를 알고, 간단한 확률의 계산을 할 수 있는가?

[해설]

사건 A 와 사건 B 는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{12}$ 이다.

$\mathrm{P}(A) = 3\mathrm{P}(B)$ 이므로 $3\{\mathrm{P}(B)\}^2 = \frac{1}{12}$, $\{\mathrm{P}(B)\}^2 = \frac{1}{36}$ 이다.

$\mathrm{P}(B) \geq 0$ 이므로 $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{6}$ 이다.

8) [정답] ④ (출제자 : 17 문혁준)

[출제의도] 명제를 보고 간단한 계산을 할 수 있는가?

[해설]

q 의 진리집합이 나타내는 범위는 $1 \leq x \leq 11$ 이다.

p 는 바꿔 쓰면 $-a \leq x - 5 \leq a$ 와 같으므로

여기에서 x 의 범위는 $-a + 5 \leq x \leq a + 5$ 이다.

$q \to p$ 이므로 $-a + 5 \leq 1$, $a + 5 \geq 11$ 이어야 한다.

$-a + 5 \leq 1$ 에서 $a \geq 4$ 이고, $a + 5 \geq 11$ 에서 $a \geq 6$ 이다.

정리하면, p 가 q 이기 위한 필요조건이 되기 위해서는

a 가 $a \geq 4$, $a \geq 6$ 을 동시에 만족해야 하므로

이러한 a 의 범위는 $a \geq 6$ 이다.

따라서 a 의 최솟값은 6 이다.

9) [정답] ⑤ (출제자 : 17 조영호)

[출제의도] 미분계수를 활용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

[해설]

함수 $f(x) = x^3 + ax^2 - 2ax$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 2a$ 이다.

점 $(2, 8)$ 에서의 접선의 기울기가 6 이므로 $f'(2) = 6$ 이다.

따라서 $f'(2) = 12 + 4a - 2a = 12 + 2a = 6$ 이므로 $a = -3$ 이다.

10) [정답] ④ (출제자 : 17 김국연)

[출제의도] 조건부확률을 이용해 확률의 계산을 할 수 있는가?

[해설]

선택한 3 명의 성별이 모두 같은 경우는

선택한 3 명이 모두 남자 회원이거나 모두 여자 회원인 경우이다.

모두 남자 회원인 경우의 수 : ${}_7C_3 = 35$

모두 여자 회원인 경우의 수 : ${}_5C_3 = 10$

이고, 선택한 3 명의 성별이 모두 같은 경우의 수는 $35 + 10 = 45$ 이므로

이 동아리에서 임의로 선택한 3 명의 성별이 모두 같을 때,

선택한 3 명의 회원이 모두 남자 회원일 확률은 $\dfrac{35}{45} = \dfrac{7}{9}$ 이다.

11) [정답] ① (출제자 : 17 김도훈)

[출제의도] 무리함수의 정의역과 치역을 구할 수 있는가?

[해설]

무리함수 $y = \sqrt{k(x-p)} + q$ $(k \neq 0)$ 의 정의역이 $\{x \mid k(x-p) \geq 0\}$,

치역이 $\{y \mid y \geq q\}$ 임을 이용하자.

함수 $y = \sqrt{2x+a} + 7 = \sqrt{2\left(x + \dfrac{a}{2}\right)} + 7$ 의 정의역을 구하면

$\left\{x \,\middle|\, 2\left(x + \dfrac{a}{2}\right) \geq 0\right\}$ 이므로 $\dfrac{a}{2} = 4$, $a = 8$ 이다.

마찬가지로 함수 $y = \sqrt{2x+a} + 7 = \sqrt{2\left(x + \dfrac{a}{2}\right)} + 7$ 의 치역을 구하면

$\{y \mid y \geq 7\}$ 이므로 $b = 7$ 이다.

$\therefore a + b = 8 + 7 = 15$

[보충설명]

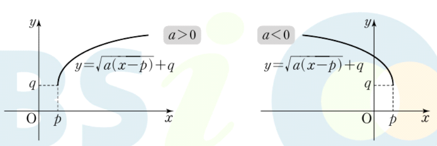
<2018학년도 수능특강 수2&미적분1 40p>

9. 무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ $(a\neq0)$, $y=-\sqrt{a(x-p)}+q$ $(a\neq0)$의 그래프

(1) 함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ $(a\neq0)$의 그래프

① 함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

② 정의역은 $\{x \mid a(x-p)\geq0\}$, 치역은 $\{y \mid y\geq q\}$이다.



(2) 함수 $y=-\sqrt{a(x-p)}+q$ $(a\neq0)$의 그래프

① 함수 $y=-\sqrt{a(x-p)}+q$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

② 정의역은 $\{x \mid a(x-p)\geq0\}$, 치역은 $\{y \mid y\leq q\}$이다.

참고 일반적으로 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$ $(a\neq0)$의 그래프는 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 꼴로 변형하여 그릴 수 있다.

12) [정답] ② (출제자 : 16 김동균)

[출제의도] 미분계수의 정의를 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

[해설]

$\lim\limits_{x\to2}(x-2) = 0$ 이고 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}$ 의 극한값이 존재하므로

$\lim\limits_{x\to2}f(x) = 0$ 이어야 한다.

함수 $f(x)$ 는 이차함수로 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to2}f(x) = f(2) = 0$ 이다.

$f(2) = 4a + b = 0$ 에서 $b = -4a$ 이므로 $f(x) = ax^2 - 4a$ 이다.

$f(2) = 0$ 이므로 미분계수의 정의에 의해서

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)$ 이다.

$f(x) = ax^2 - 4a$ 에서 $f'(x) = 2ax$ 이므로 $f'(2) = 4a = 8$ 이다.

따라서 $a = 2$, $b = -4a = -8$ 이고, $f(x) = 2x^2 - 8$ 이다.

$\therefore f(3) = 2 \times 3^2 - 8 = 10$

13) [정답] ④ (출제자 : 17 김동규)

[출제의도] 등차수열의 성질을 이용할 수 있는가?

[해설]

(가) 조건에서 $a_3^{\,2} - 5a_3 + 4 = (a_3 - 1)(a_3 - 4) = 0$ 이므로

$a_3 = 1$ 또는 $a_3 = 4$ 이다.

(나) 조건에서 $a_4^{\,2} - a_2^{\,2} = (a_4 + a_2)(a_4 - a_2) = -8$ 이다.

등차수열의 성질에 의해 $\dfrac{a_4 + a_2}{2} = a_3$, $a_4 + a_2 = 2a_3$ 이다.

수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면,

$a_4 - a_2 = (a_1 + 3d) - (a_1 + d) = 2d$ 이므로

$a_4^{\,2} - a_2^{\,2} = (a_4 + a_2)(a_4 - a_2) = 2a_3 \times 2d = -8$ 이다.

따라서 $4a_3 \times d = -8$, $a_3 \times d = -2$ 이다.

만약 $a_3 = 4$ 이면 $d = -\dfrac{1}{2}$ 로 공차가 정수가 아니기 때문에 $a_3 \neq 4$ 이고,

따라서 $a_3 = 1$, $d = -2$ 이다.

$a_n = 7 - 2n$ 이므로 $a_{13} = -19$ 이다.

14) [정답] ③ (출제자 : 17 김도훈)

[출제의도] 불연속함수의 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\lim\limits_{x\to2+} f(x) = 3 \neq 2$,

$\lim\limits_{x\to3+} f(x) > 3$,

$\lim\limits_{x\to4+} f(x) = 4 = 4$,

$\lim\limits_{x\to5+} f(x) < 5$ 이므로 $k = 4$ 이다. 따라서

$\lim\limits_{x\to(k-2)+} f(x) + \lim\limits_{x\to k-} f(x) = \lim\limits_{x\to2+} f(x) + \lim\limits_{x\to4-} f(x) = 3 + 5 = 8$ 이다.

[별해]

$\lim\limits_{x\to k+} f(x) = k$ 를 만족시키는 자연수 k 를 찾으려면

좌표평면에 함수 $y = x$ 의 그래프를 그려, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 비교해야 한다.

$2 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $y = x$ 의 그래프와 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 교점 중 x 좌표가 자연수인 점은 $(4, 4)$ 이므로 함수의 극한을 확인해보면

$\lim\limits_{x\to4+} f(x) = 4$ 이므로 $k = 4$ 이다.

다음 풀이는 본해와 같다.

15) [정답] ⑤ (출제자 : 17 김국연)

[출제의도] 여사건을 이용하여 확률을 계산을 할 수 있는가?

[해설]

주사위를 던져 나오는 눈의 수인 a, b, c를 곱한 값이 3의 배수가 되려면 a, b, c 중 적어도 하나는 3의 배수가 되어야 한다.
나온 세 수의 곱이 3의 배수가 되는 경우의 수는, 전체 경우의 수에서 나온 세 수의 곱이 3의 배수가 되지 않는 경우의 수를 빼주면 된다.
주사위의 6개 숫자 중 3의 배수에 해당하는 것은 3, 6으로 총 두 개가 있으므로 나온 세 수의 곱이 3의 배수가 되지 않으려면 a, b, c 모두 3의 배수가 아닌 1, 2, 4, 5 중 하나여야 한다.

그 확률은 $\frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{8}{27}$ 이다.

따라서 나온 세 수의 곱이 3의 배수일 확률은 $1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$ 이다.

16) [정답] ② (출제자 : 17 문혁준)

[출제의도] 정규분포의 특성과 표준화를 이용해 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

함수 $f(x)$의 그래프는 정규분포의 확률밀도함수의 그래프이므로
직선 $x = m$에 대하여 대칭인 종 모양 그래프이다. ([보충]-① 참고)
$f(\sigma) = f(3\sigma)$이므로 아래의 두 가지 경우를 생각해 볼 수 있다.

(ㄱ) $\sigma = 3\sigma$인 경우
$\sigma = 0$인 경우를 의미한다. 이 경우 당연히 $f(\sigma) = f(3\sigma)$이지만
조건에 의해 $\sigma > 0$이므로 이 경우는 해당되지 않는다.

(ㄴ) $\sigma \neq 3\sigma$인 경우
$f(\sigma) = f(3\sigma)$이려면 두 직선 $x = \sigma$와 $x = 3\sigma$가
직선 $x = m$을 기준으로
대칭이어야 한다는 사실을 알 수 있다. ('[보충]-①' 참고)
따라서 이 경우 $m = \frac{\sigma + 3\sigma}{2} = 2\sigma$가 될 때 $f(\sigma) = f(3\sigma)$이다.

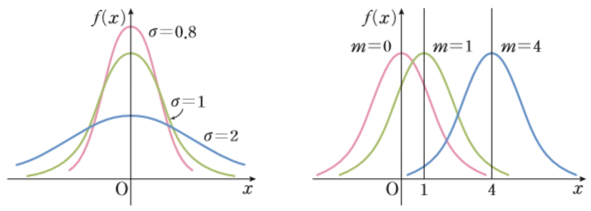
(ㄱ), (ㄴ)에서 $m = 2\sigma$이다.

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(2\sigma, \sigma^2)$을 따른다는 것을 알았으므로
구하려는 값인 $\mathrm{P}(3\sigma \le X \le 4\sigma)$를 표준화시키면 아래와 같다.
$\mathrm{P}\left(\frac{3\sigma - 2\sigma}{\sigma} \le Z \le \frac{4\sigma - 2\sigma}{\sigma}\right) = \mathrm{P}(1 \le Z \le 2)$
또한 $\mathrm{P}(1 \le Z \le 2)$의 값은 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2) - \mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$로
나타낼 수 있으므로 표준정규분포표를 사용하여 구할 수 있다.

$\mathrm{P}(0 \le Z \le 2) = 0.4772$, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1) = 0.3413$이므로
$\mathrm{P}(1 \le Z \le 2) = 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$이다.

[보충] 이강섭 외 14인, 미래엔, 2009 개정 교육과정 확률과 통계 111p

정규분포의 확률밀도함수의 그래프는 m과 σ의 값에 따라 그 모양이 정해진다.



$m=0$이고 σ의 값이 변할 때 / $\sigma=1$이고 m의 값이 변할 때

일반적으로 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프에는 다음과 같은 특징이 있다.

① 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이고, 점근선은 x축이다.
② 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.
③ $x=m$일 때, 최댓값을 갖는다.
④ m의 값이 일정할 때, σ의 값이 커지면 곡선은 낮아지면서 양쪽으로 퍼지고 σ의 값이 작아지면 곡선은 높아지면서 뾰족하게 된다.
⑤ σ의 값이 일정할 때, m의 값이 변하면 대칭축의 위치는 바뀌지만 곡선의 모양은 같다.

17) [정답] ① (출제자 : 16 이준희)

[출제의도] 이항분포의 뜻과 성질을 이용하여 기댓값을 구할 수 있는가?

[해설]

한 번의 시행에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 1인 사건을 A라 하고, 25번의 시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 Y $(0 \le Y \le 25)$라 하자.

한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 $\frac{3}{5}$이고,

독립시행이므로 $\mathrm{P}(Y = n) = {}_{25}\mathrm{C}_n \left(\frac{3}{5}\right)^n \left(\frac{2}{5}\right)^{25-n}$ $(0 \le n \le 25)$이다.

그러므로 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(25, \frac{3}{5}\right)$을 따른다.

확률변수 Y가 25번의 시행에서 사건 A가 일어나는 횟수이므로
꺼낸 공에 적혀 있는 수가 2인 시행의 횟수는 $25 - Y$이다.
확률변수 X가 꺼낸 공에 적혀 있는 수의 합이므로

$$X = Y + 2(25 - Y)$$
$$= 50 - Y$$

이다. $\mathrm{E}(Y) = 25 \times \frac{3}{5} = 15$이므로

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(50 - Y)$$
$$= 50 - \mathrm{E}(Y)$$
$$= 50 - 15$$
$$= 35$$

이다.

$p = \frac{3}{5}$, $f(Y) = 50 - 2Y$, $q = 35$가 되므로

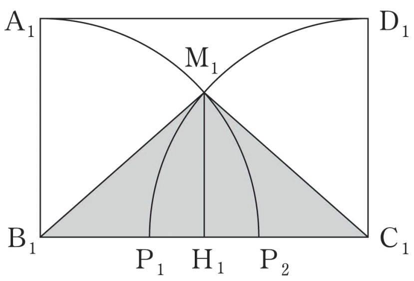
$p \times f(10) + q = 53$이다.

18) [정답] ① (출제자 : 16 이준희)

[출제의도] 도형에서 첫째항과 공비를 찾아 등비급수의 합을 구할 수 있는가?

[해설]

삼각형 $M_1B_1C_1$의 넓이를 구해보자.



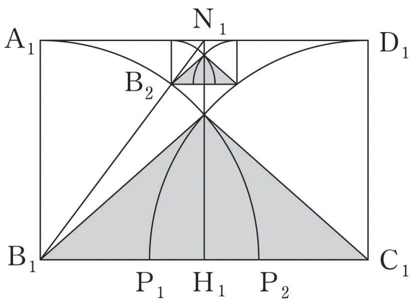
선분 B_1M_1은 부채꼴의 반지름이고 점 M_1에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 H_1이라 할 때,

$$\overline{M_1H_1} = \sqrt{\overline{B_1M_1}^2 - \overline{B_1H_1}^2}$$
$$= \sqrt{4^2 - 3^2} \qquad (\because \overline{B_1H_1} = \frac{1}{2}\overline{B_1C_1})$$
$$= \sqrt{7}$$

이다. 그러므로 삼각형 $M_1B_1C_1$의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{B_1C_1} \times \overline{M_1H_1} = \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$$

이다.



선분 A_1D_1의 중점을 N_1이라 하면

$$\overline{B_1N_1}^2 = \overline{A_1B_1}^2 + \overline{A_1N_1}^2$$
$$= 4^2 + 3^2$$
$$= 25$$

이므로 $\overline{B_1N_1} = 5$이다.

선분 B_1B_2는 부채꼴 $B_1P_2A_1$의 반지름이므로

$\overline{B_1B_2} = 4$이고 $\overline{B_2N_1} = 1$이다.

도형의 길이의 비가 $5 : 1$이므로 넓이의 비는 $25 : 1$이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{S_1\left\{1-\left(\frac{1}{25}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{25}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{25}{8}\sqrt{7}\left\{1-\left(\frac{1}{25}\right)^n\right\}$$
$$= \frac{25}{8}\sqrt{7}$$

이다.

19) [정답] ⑤ (출제자 : 16 김동균)

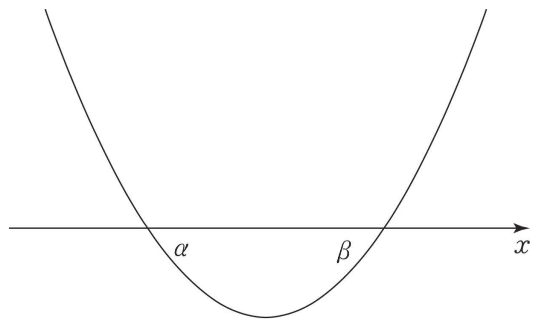
[출제의도] 도함수를 이용하여 주어진 상황을 파악할 수 있는가?

[해설]

ㄱ. $\alpha\beta < 0$ (참)

(가) 조건에 의해서 방정식 $f'(x) = 0$은 두 실수 α, β $(\alpha < \beta)$를 두 근으로 갖는다. 함수 $f(x)$가 삼차함수이므로 도함수 $f'(x)$는 이차함수이다.

따라서 도함수 $f'(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 $x = \alpha$, β에서 x축과 만난다.



구하고자하는 것은 $\alpha\beta < 0$이 성립하는지를 알아보는 것인데,

$\alpha\beta < 0$이라는 것은 α와 β가 서로 다른 부호라는 것을 의미한다.

그러면 $\alpha < 0 < \beta$를 만족해야하고, $x = 0$과 관련된 조건인 (나) 조건을 살펴보아야함을 알 수 있다.

$\alpha < 0 < \beta$인 경우를 바로 살펴보기에는 어려움을 겪을 수 있다.

그래서 $\alpha = 0$ 또는 $\beta = 0$인 경우와

α와 β의 부호가 같은 경우 $(0 < \alpha < \beta$ 또는 $\alpha < \beta < 0)$가 불가능하다는 것을 살펴보자.

(명제의 간접증명법 중 하나인 귀류법을 떠올리자.)

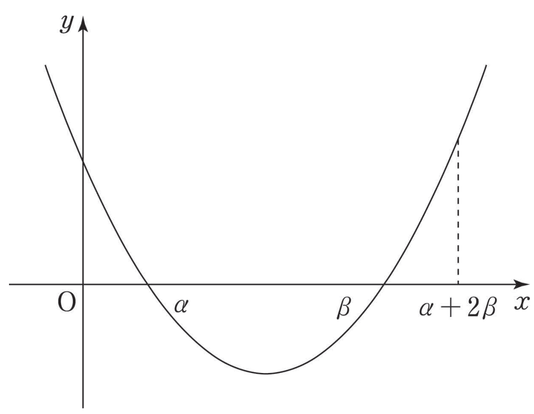
i) $\alpha = 0$ 또는 $\beta = 0$인 경우

(가) 조건 $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$에서 $f'(0) = 0$이고

$f'(0)f'(\alpha + 2\beta) = 0$이므로 이는 (나) 조건에 모순이다.

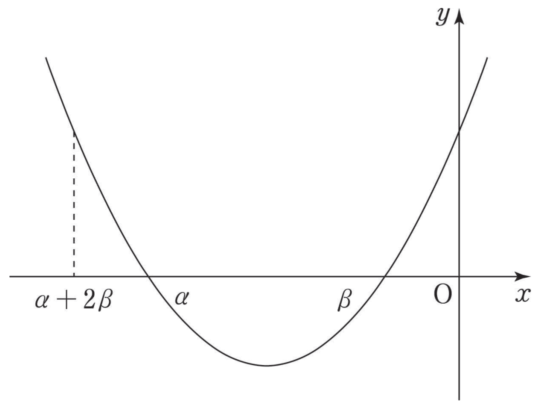
ii) $0 < \alpha < \beta$인 경우,

(나) 조건 해석을 위해 $\alpha + 2\beta$에 대하여 생각해보자. α와 β가 모두 양수이므로 $\alpha + \beta$도 양수이다. $\alpha + 2\beta$는 β에 양수인 $\alpha + \beta$를 더했으므로 $\alpha + 2\beta > \beta$이다. 따라서 함수 $f'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



그러면, $f'(0)f'(\alpha + 2\beta) > 0$이므로 (나) 조건에 모순이다.

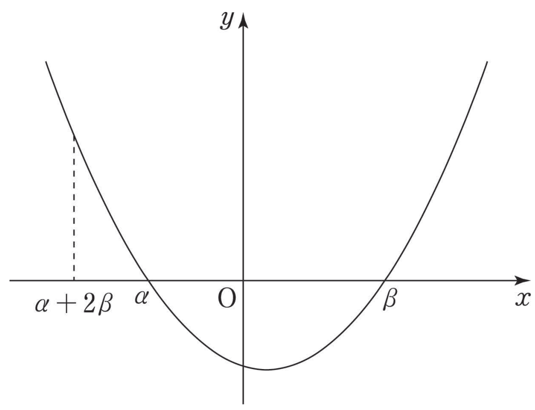
iii) $\alpha < \beta < 0$ 인 경우,
α 와 β 가 모두 음수이고, 2β 도 음수이다. $\alpha+2\beta$ 는 α 에 음수인 2β 를 더했으므로 $\alpha+2\beta < \alpha$ 이다. 따라서 함수 $f'(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.

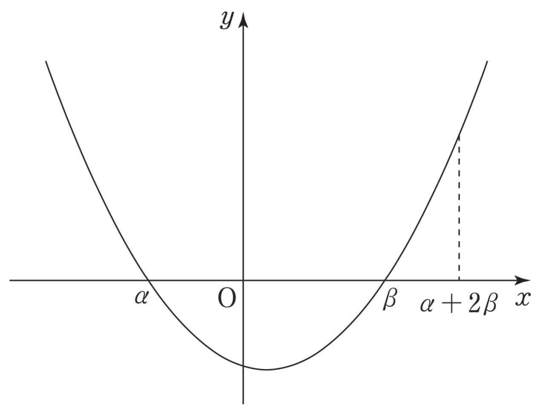


그러면, $f'(0)f'(\alpha+2\beta) > 0$ 이므로 (나) 조건에 모순이다.

따라서 α 와 β 는 다른 부호이고, $\alpha\beta < 0$ 이 성립한다.

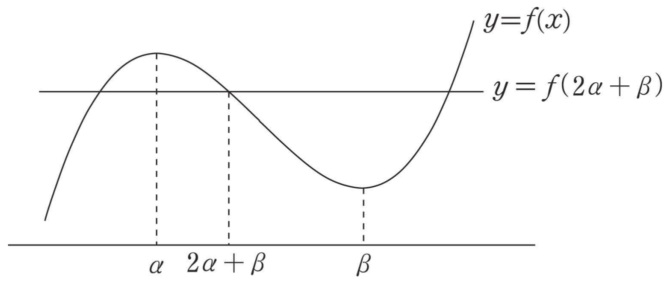
ㄴ. $f(\alpha+\beta) < f(0)$ (참)
$f(0)$ 과 $f(\alpha+\beta)$ 의 대소관계를 비교하기 위해서 두 직선 $x=0$ 과 $x=\alpha+\beta$ 가 어디에 있는지를 알아야한다. ㄱ에서 $\alpha<0<\beta$ 를 알 수 있고, α 가 음수이고 β 가 양수라는 사실로부터 $\alpha < \alpha+\beta < \beta$ 임을 이끌어낼 수 있지만 0 과 $\alpha+\beta$ 의 대소관계를 알 수가 없다. 따라서 (나) 조건을 이용해 직선 $x=\alpha+2\beta$ 의 위치를 통해서 $\alpha+\beta$ 에 대한 정보를 얻어야 함을 추측할 수 있다. 직선 $x=\alpha+2\beta$ 의 위치는 다음과 같이 두 군데가 가능하다.





첫 번째 그림처럼 $\alpha+2\beta < \alpha$ 인 경우, $\beta < 0$ 이므로 $\beta > 0$ 에서 모순이다.
따라서 두 번째 그림이 성립함을 알 수 있고, $\alpha+2\beta > \beta$ 에서 $\alpha+\beta > 0$ 이다. 또, $\alpha < 0$ 에서 $\alpha+\beta < \beta$ 이다.
따라서 구간 $[0, \alpha+\beta]$ 에서 $f'(x) < 0$ 이고, 함수 $f(x)$ 는 감소하므로 $f(\alpha+\beta) < f(0)$ 이다.

ㄷ. 방정식 $f(x) = f(2\alpha+\beta)$ 는 서로 다른 세 실근을 갖는다. (참)
방정식 $f(x) = f(2\alpha+\beta)$ 가 서로 다른 세 실근을 갖는다는 의미는 함수 $f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=f(2\alpha+\beta)$ 가 세 점에서 만난다는 뜻이다.
ㄴ에서 찾은 $\alpha+\beta>0$ 에서 $2\alpha+\beta = \alpha+(\alpha+\beta) > \alpha$ 이고, $\alpha<0$ 에서 $2\alpha+\beta < \beta$ 임을 알 수 있다.
따라서 $\alpha < 2\alpha+\beta < \beta$ 이고, $x=\alpha$, $x=\beta$ 에서 함수 $f(x)$ 는 극값을 가지므로 함수 $f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=f(2\alpha+\beta)$ 를 관찰하면 다음과 같다.



함수 $f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=f(2\alpha+\beta)$ 가 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=f(2\alpha+\beta)$ 는 서로 다른 세 실근을 갖는다.

20) [정답] ③ (출제자 : 17 문혁준)
[출제의도] 확률밀도함수의 특징을 활용할 수 있는가?

[해설]
확률밀도함수가 정의된 구간이 $0 \le X \le 4$ 이므로
$\mathrm{P}(0 \le x \le 4) = 1$ 이다.
(가) 조건으로 주어진 $f(x) = f(4-x)$ 에 x 대신 $2-x$ 를 대입하면 $f(2-x) = f(2+x)$ 라는 식을 얻는다.
따라서 이 함수의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이고, 이에 따라 $\mathrm{P}(0 \le x \le 2) = \mathrm{P}(2 \le x \le 4)$ 이므로 $\mathrm{P}(0 \le x \le 2) = \frac{1}{2}$ 이다.

(나) 조건에 $x=2$ 를 대입하면 $\frac{2(k-2)}{8} = \frac{1}{2}$ 이고,
이를 정리하면 $k=4$ 이다.
$p_1 = \mathrm{P}(0 \le X \le a)$, $p_2 = \mathrm{P}(a < X \le 4)$ 라 정의되어 있다.
$p_1 + p_2 = \mathrm{P}(0 \le x \le 4) = 1$ 이고 $p_2 - p_1 = \frac{1}{4}$ 이므로
두 식을 연립해 계산하면 $p_1 = \frac{3}{8}$, $p_2 = \frac{5}{8}$ 임을 알 수 있다.
$p_1 = \mathrm{P}(0 \le X \le a) = \frac{3}{8}$ 이고 $\mathrm{P}(0 \le x \le 2) = \frac{1}{2}$ 이다.
$\frac{3}{8} < \frac{1}{2}$ 이므로 $a \le 2$ 이다. … [보충]
$a > 0$ 이므로 a 의 범위를 정리하면 $0 < a \le 2$ 가 된다.
따라서 a 의 범위는 (나) 조건의 범위에 해당하므로 (나) 조건에 $x=a$ 를 대입할 수 있다.
(나) 조건에 $x=a$ 를 대입하면 $\frac{a(4-a)}{8} = \frac{3}{8}$ 이고 $a(4-a)=3$ 이다.
정리하면 $(a-1)(a-3)=0$ 이므로 $a=1$ 또는 $a=3$ 이다.
$0 < a \le 2$ 이므로 $a=1$ 이다.

[보충]
(자료: 이강섭 외 14인, 미래엔, 2009 개정 교육과정 확률과 통계 96p)

확률밀도함수의 성질
연속확률변수 X가 범위 $\alpha \le x \le \beta$에 속하는 모든 실수의 값을 가질 때, X의 확률밀도함수가 $f(x)$이면
① $f(x) \ge 0$
② 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.
③ 확률 $\mathrm{P}(a \le X \le b)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

①에 의해 확률밀도함수의 함숫값은 모두 0 이상이다.
따라서 문제에서 임의의 실수 α, β $(0 \le \alpha \le \beta \le 4)$를 생각할 때
$\mathrm{P}(0 \le x \le \alpha) \le \mathrm{P}(0 \le x \le \beta)$이다.
역으로 $\mathrm{P}(0 \le x \le \alpha) \le \mathrm{P}(0 \le x \le \beta)$인 경우 $\alpha \le \beta$이다.

$\mathrm{P}(0 \le x \le a) \le \mathrm{P}(0 \le x \le 2)$이므로 $a=\alpha$, $2=\beta$에 대응된다.
따라서 $a \le 2$이다.

21) [정답] ② (출제자 : 17 김정빈)
[출제의도] 다항함수의 그래프의 개형과 식을 추론할 수 있는가?

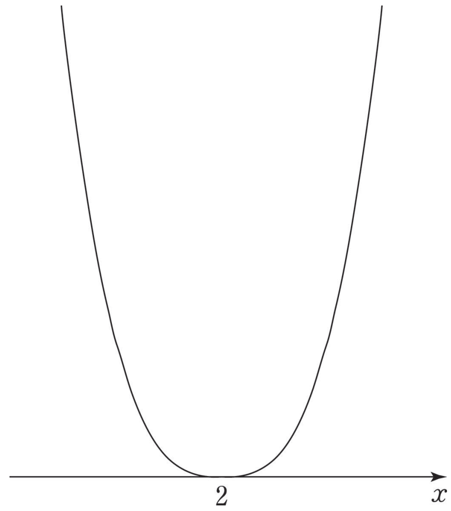
[해설]
주어진 식 $\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)\}^2-\{f(x)\}^2}{h}=0$을 풀어보면,
$\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)\}^2-\{f(x)\}^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)+f(x)\}\{f(x+h)-f(x)\}}{h}$
$=2f(x)\times\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=2f(x)f'(x)$
이므로 $2f(x)f'(x)=0$이다.

먼저 (가) 조건을 보면, $\{x\,|\,(x-5)f'(x)=0\}=\{m+3,\ M\}$에서
좌변의 집합의 조건으로 제시된 방정식은 $x-5=0$ 또는 $f'(x)=0$을 의미한다.
방정식 $x-5=0$의 근은 $x=5$뿐이므로
$m+3=5$ 또는 $M=5$이다.
한편, 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로
도함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.
따라서 가능한 방정식 $f'(x)=0$의 근을 표로 나타내면
다음과 같다.

	$m+3=5$인 경우 ($m=2$)	$M=5$인 경우
방정식 $f'(x)=0$ 의 근	① $x=M$ (중근)	② $x=m+3$ (중근)
	③ $x=M$, 5	④ $x=m+3$, 5

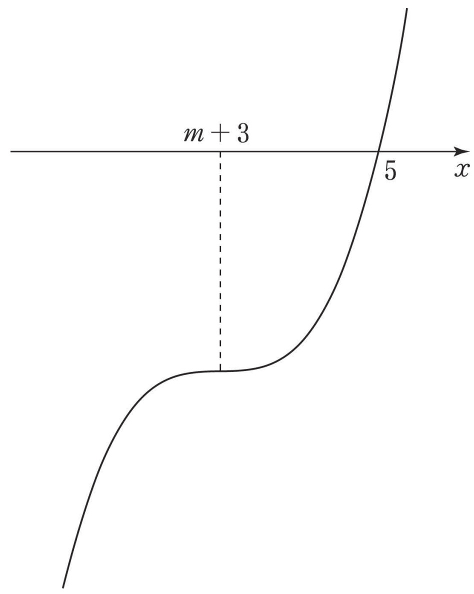
①
$f'(x)=3(x-M)^2$이고 $f(M)=0$이므로 $f(x)=(x-M)^3$이다.
$2f(x)f'(x)=0$을 만족시키는 실수 x가 M 뿐이므로 $M=m=2$이다.
따라서 $f(x)=(x-2)^3$이다.

한편, 함수 $|f(x)|$가 극대 또는 극소가 되는 모든 x의 값의 합이 0이다.
함수 $|f(x)|$의 그래프의 개형을 그려보면 다음과 같다.



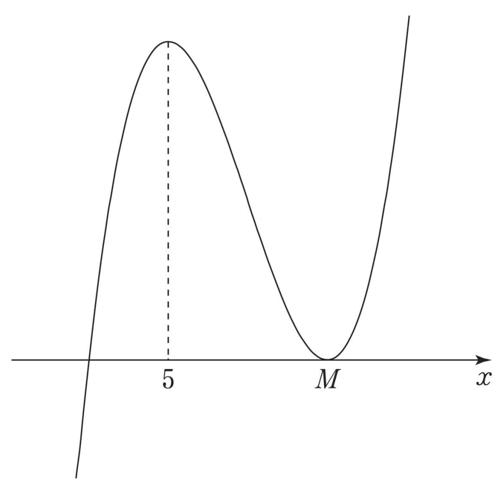
조건에 의해, 함수 $|f(x)|$가 극대 또는 극소가 되는 모든 x의 값의 합이 0이다.
그러나 이러한 x는 2 뿐이므로 모순이다.

②
$f'(x)=3(x-m-3)^2$이고 $f(M)=f(5)=0$이므로
함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그려보면 다음과 같다.



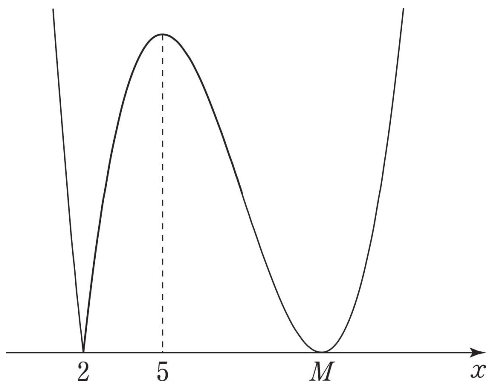
$2f(x)f'(x)=0$을 만족시키는 실수 x의 최솟값이 m이므로
$f(m)=0$ 또는 $f'(m)=0$이다.
그러나 이 개형은 두 가지 식을 모두 만족시키지 못하므로
문제의 조건이 성립하지 않는다.

③
$f'(x)=3(x-5)(x-M)$이고 $f(M)=0$이므로
함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그려보면 다음과 같다.



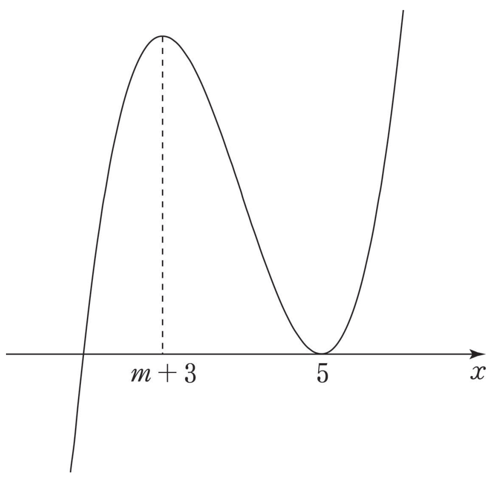
방정식 $2f(x)f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 최솟값이 m 이므로
$f(x)=(x-m)(x-M)^2=(x-2)(x-M)^2$ 이다.

한편, 함수 $|f(x)|$ 가 극대 또는 극소가 되는 모든 x 의 값의 합이 0 이다.
함수 $|f(x)|$ 의 그래프의 개형을 그려보면 다음과 같다.



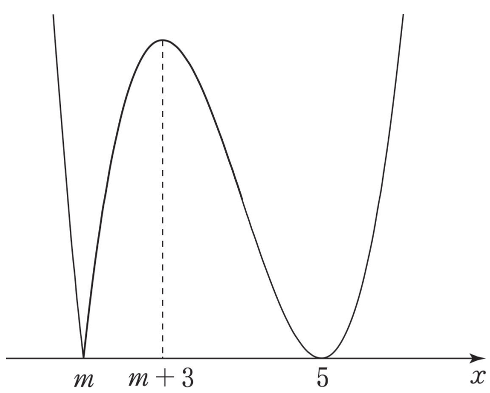
조건에 의해, 함수 $|f(x)|$ 가 극대 또는 극소가 되는 모든 x 의 값의 합이 0 이다.
이러한 x 는 2, 5, M 이다. 따라서 $7+M=0$ 이고 $M=-7$ 이다.
그러나 $m=2$ 이고 $M=-7$ 에서 $m>M$ 이므로 모순이다.

④
$f'(x)=(x-5)(x-m-3)$ 이고 $f(M)=f(5)=0$ 이므로
함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형을 그려보면 다음과 같다.



방정식 $2f(x)f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 최솟값이 m 이므로
$f(x)=(x-m)(x-5)^2$ 이다.

이제 (나) 조건을 보자.
함수 $|f(x)|$ 의 그래프의 개형을 그려보면 다음과 같다.



(나) 조건에 의해, 함수 $|f(x)|$ 가 극대 또는 극소가 되는 모든 x 의 값의 합이 0 이다.
따라서 $2m+8=0$ 이고 $m=-4$ 이다.

④에 의해 $f(x)=(x+4)(x-5)^2$ 이고,
따라서 $f(0)=100$ 이다.

22) [정답] 28 (출제자 : 17 김정빈)
[출제의도] 간단한 조합의 계산을 할 수 있는가?

[해설]
$${}_8C_2=\frac{8\times 7}{1\times 2}=28$$

23) [정답] 9 (출제자 : 17 김도훈)
[출제의도] 역함수의 함숫값을 구할 수 있는가?

[해설]
$f^{-1}(20)=k$ 라 하면 $f(k)=20$ 이다.
$f(x)=3x-7$ 에 $x=k$ 를 대입하면 $f(k)=3k-7$ 이다.
$3k=27$ 이므로 $k=9$ 이다.
$\therefore f^{-1}(20)=9$

24) [정답] 55 (출제자 : 17 박승용)
[출제의도] $\sum$ 의 뜻을 이해하여 특정 항의 값을 구할 수 있는가?

[해설]
$\sum_{k=1}^{n} a_k=3^n+n$ 이므로
$\sum_{k=1}^{4} a_k=3^4+4$ 이고 $\sum_{k=1}^{3} a_k=3^3+3$ 이다.
$a_4=\sum_{k=1}^{4} a_k-\sum_{k=1}^{3} a_k$ 이므로
$a_4=(3^4+4)-(3^3+3)=85-30=55$
따라서 $a_4=55$ 이다.

25) [정답] 10 (출제자 : 17 김국연)
[출제의도] 간단한 로그의 계산을 할 수 있는가?

[해설]
$\log_2 9=\frac{\log 9}{\log 2}=\frac{2\log 3}{\log 2}$ 이고 $\log_3 32=\frac{\log 32}{\log 3}=\frac{5\log 2}{\log 3}$ 이므로
$\log_2 9\times\log_3 32=\frac{2\log 3}{\log 2}\times\frac{5\log 2}{\log 3}=10$ 이다.

26) [정답] 4 (출제자 : 16 이준희)
[출제의도] 집합의 포함관계를 이해하여 집합의 개수를 구할 수 있는가?

[해설]
$A\cup B=\{1, 2, 3, 6\}$
이므로
$(A\cup B)-A=\{2, 6\}$
이다.
$(A\cup B)-A=B\cap A^C$
이므로 집합 B 는 2 와 6 을 원소로 갖는다.
$A\cup B=\{1, 2, 3, 6\}$
이므로 집합 B 는 원소로 1 과 3 을 가질 수 있다.
따라서 조건을 만족시키는 집합 B 의 개수는 $2^2=4$ 이다.

27) [정답] 47 (출제자 : 16 이준희)

[출제의도] 중복조합을 활용하여 주어진 방정식의 해의 개수를 구할 수 있는가?

[해설]

$(a+b+c)^2 \times d = 36$ 을 만족시키는 경우를 보면

$1^2 \times 36$, $2^2 \times 9$, $3^2 \times 4$, $6^2 \times 1$ 네 가지가 있다.

case 1) $1^2 \times 36$ 이므로 $a+b+c=1$ 이고 $d=36$ 이다.
그러므로 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_1 = {}_3\mathrm{C}_1 = 3$ 이다.

case 2) $2^2 \times 9$ 이므로 $a+b+c=2$ 이고 $d=9$ 이다.
그러므로 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_2 = {}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 이다.

case 3) $3^2 \times 4$ 이므로 $a+b+c=3$ 이고 $d=4$ 이다.
그러므로 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_3 = {}_5\mathrm{C}_3 = 10$ 이다.

case 4) $6^2 \times 1$ 이므로 $a+b+c=6$ 이고 $d=1$ 이다.
그러므로 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_6 = {}_8\mathrm{C}_6 = 28$ 이다.

따라서 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 47 이다.

28) [정답] 98 (출제자 : 17 김정빈)

[출제의도] 모평균의 추정에 대한 신뢰구간을 응용할 수 있는가?

[해설]

표본의 크기가 $2n$ 이고 모표준편차가 5 이므로

표본평균을 $\overline{X}$ 라 하면 모평균 m 에 대한 신뢰도 95% 의 신뢰구간은

$\overline{X} - 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{2n}} \le m \le \overline{X} + 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{2n}}$ 이다.

따라서 $b - a = 2 \times 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{2n}}$ 이고

정리하면 $10(b-a) = \frac{196}{\sqrt{2n}}$ 이다.

근호를 제거하기 위해 $n = 2k^2$ $(k>0)$ 라 하자.

$196 = 2^2 \times 7^2$ 이므로 $10(b-a) = \frac{2^2 \times 7^2}{\sqrt{4k^2}} = \frac{2 \times 7^2}{k}$ 이다.

한편, $n > 20$ 이므로 $2k^2 > 20$ 에서 $k > \sqrt{10}$ 이다.
따라서 가능한 k 의 최솟값은 7 이고,
$n = 2k^2 = 2 \times 7^2 = 98$ 이다.

29) [정답] 7 (출제자 : 16 이준희)

[출제의도] 함수의 연속성을 이용해 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 과 $x=-1$ 이외의 점에서 연속이고
$x=1$, $x=-1$ 에서의 연속성은 a 와 b 의 값에 따라 변하므로
각각의 점에서의 극한값을 표로 나타내어보면 다음과 같다.

	$f(x)$	$g(x)$	$f(x)g(x)$
$\lim\limits_{x \to 1+}$	-6	$3-b$	$6(b-3)$
$\lim\limits_{x \to 1-}$	$-2+a$	$3-b$	$-(a-2)(b-3)$
$x=1$	-6	$3-b$	$6(b-3)$
$\lim\limits_{x \to -1+}$	$2+a$	$-3-b$	$-(a+2)(b+3)$
$\lim\limits_{x \to -1-}$	6	$-3-b$	$-6(b+3)$
$x=-1$	6	$-3-b$	$-6(b+3)$

함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면

$\lim\limits_{x \to 1+} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to 1-} f(x)g(x) = f(1)g(1)$ − (ㄱ)

이고

$\lim\limits_{x \to -1+} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to -1-} f(x)g(x) = f(-1)g(-1)$ − (ㄴ)

이어야 한다.

(ㄱ)에서 $-(a-2)(b-3) = 6(b-3)$
(ㄴ)에서 $-(a+2)(b+3) = -6(b+3)$
두 식을 각각 정리해보면

(ㄱ)
$-(a-2)(b-3) = 6(b-3)$
$\Rightarrow (a-2)(b-3) + 6(b-3) = 0$
$\Rightarrow (b-3)(a+4) = 0$
이므로 $a=-4$ 또는 $b=3$ 일 때, (ㄱ)이 성립한다.

(ㄴ)
$-(a+2)(b+3) = -6(b+3)$
$\Rightarrow (a+2)(b+3) - 6(b+3) = 0$
$\Rightarrow (b+3)(a-4) = 0$
이므로 $a=4$ 또는 $b=-3$ 일 때, (ㄴ)이 성립한다.

그러므로 (a, b) 가 $(-4, -3)$ 또는 $(4, 3)$ 일 때
함수 $f(x)g(x)$ 가 연속이 된다.
가능한 $a+b$ 의 값은 7 또는 -7 이므로 $a+b$ 의 최댓값은 7 이다.

30) [정답] 187 (출제자 : 17 문혁준)

[출제의도] 규칙성을 찾아 문제를 해결할 수 있는가?

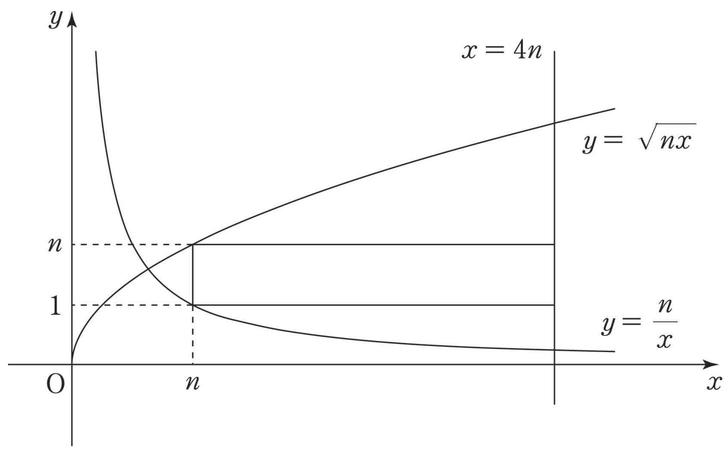
[해설]

편의를 위해 $g(x)=\frac{n}{x}$, $h(x)=\sqrt{nx}$ 라 정의하자.

$x=n$ 일 때 $g(n)=1$, $h(n)=n$ 이고,

$x=4n$ 일 때 $g(4n)=\frac{1}{4}<1$, $h(4n)=2n$ 이다.

이 결과를 토대로 두 함수 $g(x)$ 와 $h(x)$ 의 그래프와, 네 점 $(n,1)$, (n,n), $(4n,1)$, $(4n,n)$ 을 꼭짓점으로 갖는 직사각형, 그리고 직선 $x=4n$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



①
위의 그래프를 보면, 문제에서 언급한 영역은 다음의 4가지 영역으로 구분됨을 알 수 있다.
Ⅰ) $x \le n$
Ⅱ) $x \ge n$, $y \ge n$
Ⅲ) $x \ge n$, $1 \le y \le n$
Ⅳ) $x \ge n$, $y \le 1$
이 중에서 Ⅳ)의 경우 $y \le 1$ 이므로 정사각형이 만들어질 수 없다.
따라서 정사각형의 개수를 셀 때는 Ⅰ), Ⅱ), Ⅲ)만 고려한다.

②
①의 Ⅱ)에도 정사각형이 만들어질 수 있으므로 이 영역에서 정사각형의 꼭짓점이 가질 수 있는 y 좌표의 최댓값이 무엇인지, 다시 말해 정사각형을 만들 수 있는 한계가 되는 지점이 어디인지를 구할 필요가 있다.
이를 구해보자.
$g(4n)<h(4n)$ 이고 $h(4n)=2n$ 이므로 위의 그래프에서 알 수 있듯 $y=2n$ 일 때 생기는 격자점의 개수는 하나이다. 정사각형이 만들어지기 위해서는 같은 y 좌표 상에 2개 이상의 격자점이 존재해야 한다.
$y=2n$ 에서는 이를 만족시키지 못하므로 구하는 정사각형의 꼭짓점의 y 좌표의 최댓값은 $2n-1$ 임을 알 수 있다.

③
①에서 언급한 Ⅲ) $x \ge n$, $1 \le y \le n$ 안에 있는 정사각형의 개수에 대하여 생각해 보자.
x 좌표를 먼저 보면, $n \le x \le 4n$ 에 존재하는 격자점은 총 $3n+1$ 개이므로 이 격자점을 이어서 만들 수 있는, 길이가 1인 선분은 총 $3n$ 개다.
다음으로 y 좌표를 보면, $1 \le y \le n$ 에 존재하는 격자점은 총 n 개이므로 이 격자점을 이어서 만들 수 있는, 길이가 1인 선분은 총 $n-1$ 개다.
따라서 조건에 맞는 정사각형은 이 직사각형 안에 $3n(n-1)$ 개 들어감을 알 수 있다.

④
$x=1$ 일 때와 $x=2$ 일 때를 n 의 값에 따라 살펴보면 아래와 같다.

ㄱ. $x=1$ 일 때, $n=2$, 3, 4, 5 에 대하여 $n>\sqrt{n}$ 이므로 $g(1)>h(1)$ 이다.

ㄴ. $x=2$ 일 때, $n=2$, 3, 4, 5 에 대하여 $g(2)$ 와 $h(2)$ 의 값을 비교해 보면 다음과 같다.
$n=2$ 일 때 $1<2$
$n=3$ 일 때 $\frac{3}{2}<\sqrt{6}$
$n=4$ 일 때 $2<2\sqrt{2}$
$n=5$ 일 때 $\frac{5}{2}<\sqrt{10}$
따라서 $n=2$, 3, 4, 5 일 때 $g(2)<h(2)$ 이다.

ㄱ, ㄴ에서 $g(1)>h(1)$ 이고 $g(2)<h(2)$ 이므로 $n=2$, 3, 4, 5 일 때의 Ⅰ)에는 x 좌표의 값이 1인 점이 포함되지 않는다.

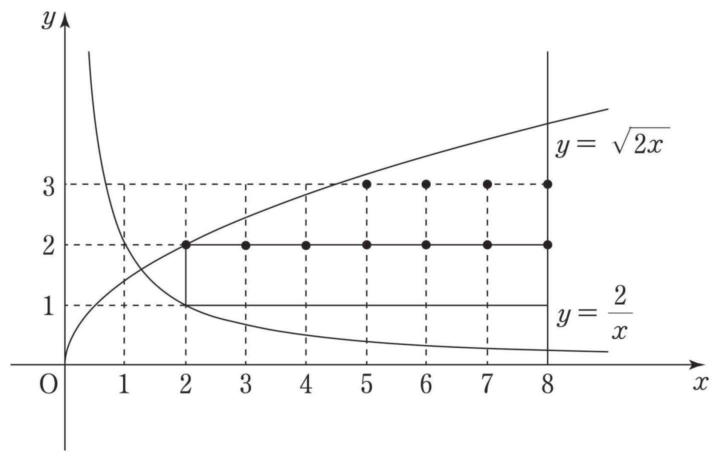
① ~ ④를 정리하면 다음과 같다.

① 문제에서 언급한 영역은 4개로 쪼갤 수 있고, 그 중 Ⅳ) $x \ge n$, $y \le 1$ 에서는 조건에 맞는 정사각형을 만들 수 없으니 정사각형의 개수를 셀 때 고려하지 않는다.
② 정사각형의 꼭짓점이 가질 수 있는 y 좌표의 최댓값은 $2n-1$ 이다.
③ ①에서 나눈 영역 중 Ⅲ) $x \ge n$, $1 \le y \le n$ 안에 있는 정사각형의 개수는 $3n(n-1)$ 이다.
④ 문제의 영역에는 $x=1$ 이 포함되지 않는다.

①에 의해 이제부터 정사각형의 개수를 셀 때 Ⅳ) $x \ge n$, $y \le 1$ 에 대하여 고려하지 않는다. Ⅲ) $x \ge n$, $1 \le y \le n$ 일 때의 정사각형의 개수는 쉽게 셀 수 있으므로 Ⅰ) $x \le n$ 일 때와 Ⅱ) $x \ge n$, $y \ge n$ 일 때를 생각하여 n 의 값에 따라 정사각형의 개수를 세 보자.

(ㄱ) $n=2$
Ⅰ) $x \le n$
$x \le 2$ 를 만족시키는 자연수 x 의 값은 1, 2 이다. ④에 의해 $x=1$ 은 고려하지 않는다. 조건에 맞는 정사각형을 만들기 위해서는 값이 1만큼 차이 나는 x 좌표가 2개 이상이어야 하므로 $x=2$ 밖에 존재하지 않는 상황에서는 정사각형이 만들어질 수 없다.
따라서 $x \le 2$ 일 때 정사각형의 개수는 0이다.
Ⅱ) $x \ge n$, $y \ge n$
②에 의해 이 범위에서 정사각형의 꼭짓점이 가질 수 있는 y 좌표의 값의 범위는 $n \le y \le 2n-1$ 이다. $n=2$ 일 때 이를 만족시키는 자연수인 y 의 값은 2, 3 이므로 $y=2$ 일 때와 $y=3$ 일 때의 영역 안의 격자점을 세 보면 다음과 같다.

	격자점 개수
$y=2$	7
$y=3$	4



위 그래프에서 알 수 있듯 y 좌표를 기준으로 격자점을 셀 때 격자점들은 $x=4n$ 부터 시작해서 영역을 벗어나기 전까지 존재한다. $y \geq n$ 에서 영역의 모양이 y 좌표가 커질수록 좁아지는 모양임을 생각할 때, 이러한 격자점으로 만들 수 있는 정사각형의 개수는 정사각형의 위쪽 변을 만드는 격자점에 따라 결정된다고 할 수 있다.

예를 들어, 위와 같이 $y=2$, $y=3$ 에 격자점이 있는 상황에서는 $y=3$ 에 있는 격자점의 개수가 정사각형의 개수에 영향을 끼친다. $y=3$ 에서 격자점이 4 개이므로 $y=2$ 와 $y=3$ 에 있는 격자점들로 만들 수 있는 한 변의 길이가 1 인 정사각형의 개수는 $4-1=3$ 이다.

Ⅲ) $x \geq n$, $1 \leq y \leq n$

③에 의해 $3 \times 2 \times (2-1)=6$ 개가 존재한다.

따라서 $n=2$ 일 때 만들어지는, 조건에 맞는 정사각형의 개수는 다음과 같다.

Ⅰ) $x \leq n$: 0

Ⅱ) $x \geq n$, $y \geq n$: 3

Ⅲ) $x \geq n$, $1 \leq y \leq n$: 6

$\therefore f(2)=0+3+6=9$

㈁ $n=3$

Ⅰ) $x \leq n$

$x \leq 3$ 을 만족시키는 자연수 x 의 값은 1 , 2 , 3 이다. ④에 의해 $x=1$ 은 고려하지 않는다.

$x=2$ 일 때 $g(2)=\frac{3}{2}$, $h(2)=\sqrt{6}$ 으로 영역에서 격자점 1 개를 갖는다.

영역 안의 $x=2$에서의 격자점이 1 개이므로 $x=3$ 에서의 격자점의 개수와 상관없이 꼭짓점의 x 좌표가 2 , 3 인 정사각형이 만들어질 수 없다. 따라서 $x \leq 3$ 일 때 정사각형의 개수는 0 이다.

Ⅱ) $x \geq n$, $y \geq n$

㈀−Ⅱ)에서와 같은 방식으로, $n=3$ 일 때 $n \leq y \leq 2n-1$ 을 만족시키는 자연수인 y 는 3 , 4 , 5 이므로 $y=3$, $y=4$, $y=5$ 일 때의 영역 안의 격자점을 세 보면 다음과 같다.

	격자점 개수
$y=3$	10
$y=4$	7
$y=5$	4

㈀에서와 같은 방식으로 구해 보자.

$y=3$ 와 $y=4$ 에 있는 격자점들로 만들 수 있는 한 변의 길이가 1 인 정사각형의 개수는 $7-1=6$ 이다.

$y=4$ 와 $y=5$ 에 있는 격자점들로 만들 수 있는 한 변의 길이가 1 인 정사각형의 개수는 $4-1=3$ 이다.

따라서 $x \geq 3$, $y \geq 3$ 에서 만들어지는 한 변의 길이가 1 인 정사각형의 개수는 $6+3=9$ 이다.

Ⅲ) $x \geq n$, $1 \leq y \leq n$

③에 의해 $3 \times 3 \times (3-1)=18$ 개가 존재한다.

따라서 $n=3$ 일 때 만들어지는 조건에 맞는 정사각형의 개수는 다음과 같다.

Ⅰ) $x \leq n$: 0

Ⅱ) $x \geq n$, $y \geq n$: 9

Ⅲ) $x \geq n$, $1 \leq y \leq n$: 18

$\therefore f(3)=0+9+18=27$

㈂ $n=4$

Ⅰ) $x \leq n$

$x \leq 4$ 를 만족시키는 자연수 x 의 값은 1 , 2 , 3 , 4 이다. ④에 의해 $x=1$ 은 고려하지 않는다.

$x=2$ 일 때 $g(2)=2$, $h(2)=2\sqrt{2}$ 로 영역에서 격자점 1 개를 갖는다.

$x=3$ 일 때 $g(3)=\frac{4}{3}$, $h(3)=2\sqrt{3}$ 으로 영역에서 격자점 2 개를 갖는다.

$x=4$ 일 때 $g(3)=1$, $h(4)=4$ 로 영역에서 격자점 4 개를 갖는다.

$x=2$ 에서 격자점이 하나이기 때문에 꼭짓점의 x 좌표가 2 , 3 인 정사각형은 만들어질 수 없고, $x=3$ 에서 격자점이 2 개이고 $x=4$ 에서 격자점이 4 개이므로 꼭짓점의 x 좌표가 3 , 4 인 정사각형이 1 개 존재한다.

따라서 $x \leq 4$ 일 때 정사각형의 개수는 $0+1=1$ 이다.

Ⅱ) $x \geq n$, $y \geq n$

㈀−Ⅱ)에서와 같은 방식으로, $n=4$ 일 때 $n \leq y \leq 2n-1$ 을 만족시키는 자연수인 y 는 4 , 5 , 6 , 7 이므로 $y=4$, $y=5$, $y=6$, $y=7$ 일 때의 영역 안의 격자점을 세 보면 다음과 같다.

	격자점 개수
$y=4$	13
$y=5$	10
$y=6$	8
$y=7$	4

만들 수 있는 한 변의 길이가 1 인 정사각형의 개수를 구하는 과정은 ㈁과 같다.

여기에서 만들어지는 한 변의 길이가 1 인 정사각형의 개수는 $(10-1)+(8-1)+(4-1)=19$ 이다.

Ⅲ) $x \geq n$, $1 \leq y \leq n$

③에 의해 $3 \times 4 \times (4-1)=36$ 개가 존재한다.

따라서 $n=4$ 일 때 만들어지는, 조건에 맞는 정사각형의 개수는 다음과 같다.

Ⅰ) $x \leq n$: 1

Ⅱ) $x \geq n$, $y \geq n$: 19

Ⅲ) $x \geq n$, $1 \leq y \leq n$: 36

$\therefore f(4)=1+19+36=56$

㈃ $n=5$

Ⅰ) $x \le n$

$x \le 5$를 만족시키는 자연수 x의 값은 1, 2, 3, 4, 5이다. ④에 의해 $x=1$은 고려하지 않는다.

$x=2$일 때 $g(2)=\frac{5}{2}$, $h(2)=\sqrt{10}$으로 영역에서 격자점 1개를 갖는다.

$x=3$일 때 $g(3)=\frac{5}{3}$, $h(3)=\sqrt{15}$로 영역에서 격자점 2개를 갖는다.

$x=4$일 때 $g(4)=\frac{5}{4}$, $h(4)=\sqrt{20}$으로 영역에서 격자점 3개를 갖는다.

$x=5$일 때 $g(5)=1$, $h(5)=5$로 영역에서 격자점 5개를 갖는다.

$x=2$에서 격자점이 하나이기 때문에 꼭짓점의 x좌표가 2, 3인 정사각형은 만들어질 수 없고, $x=3$에서 격자점이 2개이므로 꼭짓점의 x좌표가 3, 4인 정사각형은 1개 생기며, $x=4$에서 격자점이 3개이므로 꼭짓점의 x좌표가 4, 5인 정사각형은 2개 생긴다.

따라서 $x \le 5$일 때 정사각형의 개수는 $0+1+2=3$이다.

Ⅱ) $x \ge n$, $y \ge n$

㈀-Ⅱ)에서와 같은 방식으로, $n=5$일 때 $n \le y \le 2n-1$을 만족시키는 자연수인 y는 5, 6, 7, 8, 9이므로 $y=5$, $y=6$, $y=7$, $y=8$, $y=9$일 때의 영역 안의 격자점을 세 보면 다음과 같다.

	격자점 개수
$y=5$	16
$y=6$	13
$y=7$	11
$y=8$	8
$y=9$	4

만들 수 있는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수를 구하는 과정은 ㈁과 같다.

여기에서 만들어지는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수는 $(13-1)+(11-1)+(8-1)+(4-1)=32$이다.

Ⅲ) $x \ge n$, $1 \le y \le n$

③에 의해 $3\times5\times(5-1)=60$개가 존재한다.

따라서 $n=5$일 때 만들어지는, 조건에 맞는 정사각형의 개수는 다음과 같다.

Ⅰ) $x \le n$: 3

Ⅱ) $x \ge n$, $y \ge n$: 32

Ⅲ) $x \ge n$, $1 \le y \le n$: 60

$\therefore f(5)=3+32+60=95$

㈀~㈃을 정리하면 아래와 같다.

n	$f(n)$
2	9
3	27
4	56
5	95

$\therefore \sum_{n=2}^{5} f(n)=9+27+56+95=187$