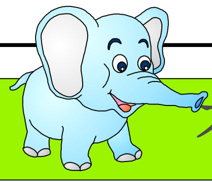
# 2018학년도 대학수학능력시험 모의평가 1회

# 수학 영역(가형) 해설지

Epsilon



## 정답 및 해설

1) [정답] ④ (출제자 : 16 송세령)

[출제의도] 벡터의 덧셈을 할 수 있는가?

[해설]

벡터 $\vec{a}+\vec{b}=(3,\,1)$ 이므로 모든 성분의 합은 4 이다.

2) [정답] ① (출제자 : 16 송세령)

[출제의도] 함수의 극한을 구할 수 있는가?

[해설]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x)}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+6x)}{6x}\times\frac{2x}{e^{2x}-1}\times 3\right\}=3$$

3) [정답] ② (출제자 : 17 문혁준)

[출제의도] 간단한 유리함수의 적분을 할 수 있는가?

[해설]

$$\int_1^{e^2}\frac{4}{x}\,dx=[4\ln x]_1^{e^2}=8-0=8$$

4) [정답] ② (출제자 : 17 문혁준)

[출제의도] 독립사건의 정의를 알고, 간단한 확률 계산을 할 수 있는가?

[해설]

사건 $A$ 와 사건 $B$ 는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{12}$ 이다.

$\mathrm{P}(A)=3\mathrm{P}(B)$ 이므로 $3\{\mathrm{P}(B)\}^2=\dfrac{1}{12}$, $\{\mathrm{P}(B)\}^2=\dfrac{1}{36}$ 이다.

$\mathrm{P}(B)\geq 0$ 이므로 $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{6}$ 이다.

5) [정답] ③ (출제자 : 16 김동균)

[출제의도] 좌표공간에서 한 점을 좌표축에 대하여 대칭이동시킬 수 있는가?

[해설]

점 $\mathrm{P}(1,\,3,\,4)$를 $x$축에 대칭이동시킨 점 Q 의 좌표는 $(1,\,-3,\,-4)$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(1-1)^2+\{3-(-3)\}^2+\{4-(-4)\}^2}=10$ 이다.

6) [정답] ① (출제자 : 17 김국연)

[출제의도] 음함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

[해설]

주어진 식의 양변을 $x$ 에 대해 미분하면

$\dfrac{3}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\times\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{dy}{dx}=0$ 이다.

점 $\left(\dfrac{1}{4},\,1\right)$ 에서의 $\dfrac{dy}{dx}$ 의 값을 구하면

$\dfrac{3}{2\times\dfrac{1}{2}}+\dfrac{1}{2\times 1}\times\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{dy}{dx}=0$ 에서

$3+\dfrac{dy}{dx}=0$ 이므로 $\dfrac{dy}{dx}=-3$ 이다.

따라서 점 $\left(\dfrac{1}{4},\,1\right)$ 에서의 접선의 기울기는 $-3$ 이다.

7) [정답] ④ (출제자 : 16 김동균)

[출제의도] 삼각함수를 활용하여 방정식의 해를 구할 수 있는가?

[해설]

삼각함수의 성질에서

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$\cos^2 x=1-\sin^2 x$

이므로 주어진 조건식에 대입하면

$1-\sin^2 x=\sin^2 x+\sin x$

$2\sin^2 x+\sin x-1=0$

$(2\sin x-1)(\sin x+1)=0$

이다. 그러므로 $\sin x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $\sin x=-1$ 이다.

$0\leq x\leq 2\pi$ 에서

$\sin x=\dfrac{1}{2}$ 일 때, $x=\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{6}$ 이다.

$\sin x=-1$ 일 때, $x=\dfrac{3\pi}{2}$ 이다.

따라서 모든 실근의 합은 $\dfrac{5\pi}{2}$ 이다.



이 해설지에 관한 저작권은 Epsilon에 있습니다.

8) [정답] ⑤ (출제자 : 17 김동규)

**[출제의도] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?**

[해설]
뽑힌 남자 회원의 수가 뽑힌 여자 회원의 수보다 클 경우는
남자 회원을 4 명, 여자 회원을 0 명 뽑는 경우와
남자 회원을 3 명, 여자 회원을 1 명 뽑는 경우가 있다.

남자 회원을 4 명, 여자 회원을 0 명 뽑는 경우의 수는
${}_5C_4 \times {}_4C_0 = 5$ 이고,
남자 회원을 3 명, 여자 회원을 1 명 뽑는 경우의 수는
${}_5C_3 \times {}_4C_1 = 40$ 이다.

따라서 뽑힌 남자 회원의 수가 뽑힌 여자 회원의 수보다 클 경우의 수는 $5+40=45$ 이다.

9) [정답] ⑤ (출제자 : 17 최수영)

**[출제의도] 합성함수의 미분법을 사용할 수 있는가?**

[해설]
$g'(2)$ 의 값을 구하기 위해서는 $g'(x)$ 를 알아야 하므로
함수 $g(x)$ 를 $x$ 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} g'(x) &= f(x^2)+xf'(x^2)\times 2x \\ &= f(x^2)+2x^2f'(x^2) \end{aligned}$$

이다.
$x=2$ 를 대입하면 $g'(2)=f(4)+8f'(4)$ 이고,
$f(4)=3$ , $f'(4)=1$ 이므로 $g'(2)=3+8=11$ 이다.

10) [정답] ② (출제자 : 17 최수영)

**[출제의도] 두 평면의 법선벡터를 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?**

[해설]
평면 $\alpha$ 의 법선벡터 $\overrightarrow{n_1}=(1,\,-1,\,k)$ 이고,
평면 $\beta$ 의 법선벡터 $\overrightarrow{n_2}=(1,\,1,\,\sqrt{2})$ 이다.

두 평면 $\alpha$ , $\beta$ 가 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{|1-1+k\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+k^2}\,\sqrt{1^2+1^2+(\sqrt{2})^2}}$$

즉, $\frac{1}{2}=\frac{|k\sqrt{2}|}{2\sqrt{2+k^2}}$

$\sqrt{2+k^2}=|k\sqrt{2}|$

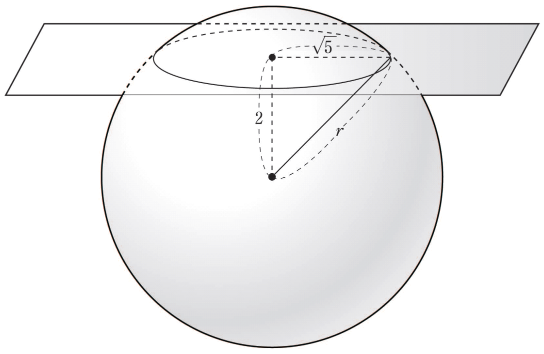
$2+k^2=2k^2$ , 따라서 $k^2=2$ 이다.

11) [정답] ④ (출제자 : 17 김동규)

**[출제의도] 점과 평면 사이의 거리를 구할 수 있는가?**

[해설]
점 $(2,\,2,\,\sqrt{2})$ 와 평면 $5x+4y-2\sqrt{2}z=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|5\times2+4\times2+(-2\sqrt{2}\times\sqrt{2})|}{\sqrt{5^2+4^2+(-2\sqrt{2})^2}}=\frac{14}{7}=2 \text{ 이다.}$$




평면과 구가 만나서 생기는 원의 둘레의 길이가 $2\sqrt{5}\pi$ 이므로
이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$ 이다. 피타고라스 정리에 의해
구의 반지름의 길이는 $\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}=3$ 이다.

12) [정답] ③ (출제자 : 17 김동규)

**[출제의도] 좌표평면 위의 한 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?**

[해설]
좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x,y)$의 시각 $t$ 에서의 위치가
$x=f(t)$ , $y=g(t)$ 일 때, 점 P 가 $t=t_1$ 에서 $t=t_2$ 까지
움직인 거리 $s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$ 이다.

$x=2t+1$ 에서 $\frac{dx}{dt}=2$ 이고, $y=\frac{1}{2}t^2-\ln t$ 에서 $\frac{dy}{dt}=t-\frac{1}{t}$ 이다.
따라서 $t_1=1$ 에서 $t_2=3$ 까지 점 P 가 움직인 거리 $s$ 를 구하면,

$$\begin{aligned} s &= \int_1^3\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_1^3\sqrt{2^2+\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}\,dt \\ &= \int_1^3\sqrt{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2+\ln t\right]_1^3=4+\ln 3 \end{aligned}$$

이다.

13) [정답] ⑤ (출제자 : 17 김국연)

**[출제의도] 여사건을 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?**

[해설]
주사위를 던져 나오는 눈의 수인 $a$ , $b$ , $c$ 를 곱한 값이 3 의 배수가 되려면
$a$ , $b$ , $c$ 중 적어도 하나는 3 의 배수가 되어야 한다.
나온 세 수의 곱이 3 의 배수가 되는 경우의 수는, 전체 경우의 수에서
나온 세 수의 곱이 3 의 배수가 되지 않는 경우의 수를 빼주면 된다.
주사위의 6 개 숫자 중 3 의 배수에 해당하는 것은 3 , 6 으로 총 두 개가
있으므로 나온 세 수의 곱이 3 의 배수가 되지 않으려면 $a$ , $b$ , $c$ 모두
3 의 배수가 아닌 1 , 2 , 4 , 5 중 하나여야 한다.
그 확률은 $\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{8}{27}$ 이다.

따라서 나온 숫자가 3의 배수일 확률은 $1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$ 이다.


이 해설지에 관한 저작권은 Epsilon에 있습니다.

14) [정답] ② (출제자 : 17 문혁준)

**[출제의도] 정규분포의 특성과 표준화를 이용해 문제를 해결할 수 있는가?**

[해설]

함수 $f(x)$ 의 그래프는 정규분포의 확률밀도함수의 그래프이므로
직선 $x=m$ 에 대하여 대칭인 종 모양 그래프이다. ([보충]-① 참고)
$f(\sigma)=f(3\sigma)$ 이므로 아래의 두 가지 경우를 생각해 볼 수 있다.

(ㄱ) $\sigma=3\sigma$ 인 경우
$\sigma=0$ 인 경우를 의미한다. 이 경우 당연히 $f(\sigma)=f(3\sigma)$ 이지만
조건에 의해 $\sigma>0$ 이므로 이 경우는 해당되지 않는다.

(ㄴ) $\sigma\neq 3\sigma$ 인 경우
$f(\sigma)=f(3\sigma)$ 이려면 두 직선 $x=\sigma$ 와 $x=3\sigma$ 가
직선 $x=m$ 을 기준으로
대칭이어야 한다는 사실을 알 수 있다. ('[보충]-①' 참고)
따라서 이 경우 $m=\dfrac{\sigma+3\sigma}{2}=2\sigma$ 가 될 때 $f(\sigma)=f(3\sigma)$ 이다.

(ㄱ), (ㄴ)에서 $m=2\sigma$ 이다.

확률변수 $X$ 가 정규분포 $\mathrm{N}(2\sigma,\ \sigma^2)$ 을 따른다는 것을 알았으므로
구하려는 값인 $\mathrm{P}(3\sigma\le X\le 4\sigma)$ 를 표준화시키면 아래와 같다.

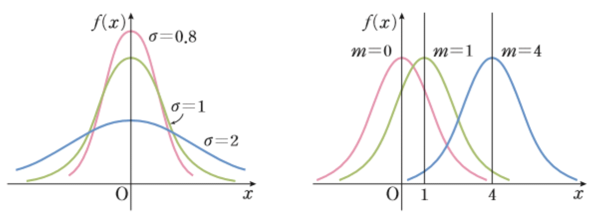
$$\mathrm{P}\left(\frac{3\sigma-2\sigma}{\sigma}\le Z\le\frac{4\sigma-2\sigma}{\sigma}\right)=\mathrm{P}(1\le Z\le 2)$$

또한 $\mathrm{P}(1\le Z\le 2)$ 의 값은 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$ 로
나타낼 수 있으므로 표준정규분포표를 사용하여 구할 수 있다.

$\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$ , $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$ 이므로
$\mathrm{P}(1\le Z\le 2)=0.4772-0.3413=0.1359$ 이다.

[보충] 이강섭 외 14인, 미래엔, 2009 개정 교육과정 확률과 통계 111p

정규분포의 확률밀도함수의 그래프는 $m$과 $\sigma$의 값에 따라 그 모양이 정해진다.




$m=0$이고 $\sigma$의 값이 변할 때　　$\sigma=1$이고 $m$의 값이 변할 때

일반적으로 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 $X$의 확률밀도함수의 그래프에는 다음과 같은 특징이 있다.

① 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이고, 점근선은 $x$축이다.
② 곡선과 $x$축 사이의 넓이는 1이다.
③ $x=m$일 때, 최댓값을 갖는다.
④ $m$의 값이 일정할 때, $\sigma$의 값이 커지면 곡선은 낮아지면서 양쪽으로 퍼지고 $\sigma$의 값이 작아지면 곡선은 높아지면서 뾰족하게 된다.
⑤ $\sigma$의 값이 일정할 때, $m$의 값이 변하면 대칭축의 위치는 바뀌지만 곡선의 모양은 같다.

15) [정답] ① (출제자 : 17 김도훈)

**[출제의도] 정적분을 이용하여 넓이를 구할 수 있는가?**

[해설]

$f(x)=\dfrac{1}{1+2e^{-x}}=\dfrac{e^x}{e^x+2}$ 의 형태로 바꿀 수 있다.

구하는 부분의 넓이는 $\displaystyle\int_0^{\ln 7}|f(x)|\,dx$ 이다.

$0\le x\le \ln 7$ 에서 $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+2}\ge 0$ 이므로

$\displaystyle\int_0^{\ln 7}|f(x)|\,dx=\int_0^{\ln 7}f(x)\,dx=\int_0^{\ln 7}\frac{e^x}{e^x+2}\,dx$ 이다.

$e^x+2=t$ 라 하면 $e^x=\dfrac{dt}{dx}$ 이고,

$x=0$ 이면 $t=3$ , $x=\ln 7$ 이면 $t=9$ 이므로

$\displaystyle\int_0^{\ln 7}\frac{e^x}{e^x+2}\,dx=\int_3^9\frac{1}{t}\,dt=[\ln t]_3^9=\ln 3$ 이다.

$\therefore\ \displaystyle\int_0^{\ln 7}|f(x)|\,dx=\ln 3$

16) [정답] ① (출제자 : 16 이준희)

**[출제의도] 이항분포의 뜻과 성질을 이용하여 기댓값을 구할 수 있는가?**

[해설]

한 번의 시행에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 1 인 사건을 $A$ 라 하고, 25 번의 시행에서 사건 $A$ 가 일어나는 횟수를 확률변수 $Y$ $(0\le Y\le 25)$ 라 하자.

한 번의 시행에서 사건 $A$ 가 일어날 확률이 $\dfrac{3}{5}$ 이고,

독립시행이므로 $\mathrm{P}(Y=n)={}_{25}\mathrm{C}_n\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\left(\dfrac{2}{5}\right)^{25-n}$ $(0\le n\le 25)$ 이다.

그러므로 확률변수 $Y$ 는 이항분포 $\mathrm{B}\left(25,\ \dfrac{3}{5}\right)$ 을 따른다.

확률변수 $Y$ 가 25 번의 시행에서 사건 $A$ 가 일어나는 횟수이므로
꺼낸 공에 적혀 있는 수가 2 인 시행의 횟수는 $25-Y$ 이다.
확률변수 $X$ 가 꺼낸 공에 적혀 있는 수의 합이므로

$$\begin{aligned}X&=Y+2(25-Y)\\&=50-Y\end{aligned}$$

이다. $\mathrm{E}(Y)=25\times\dfrac{3}{5}=15$ 이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\mathrm{E}(50-Y)\\&=50-\mathrm{E}(Y)\\&=50-15\\&=35\end{aligned}$$

이다.

$p=\dfrac{3}{5}$ , $f(Y)=50-2Y$ , $q=35$ 가 되므로

$p\times f(10)+q=53$ 이다.



이 해설지에 관한 저작권은 Epsilon에 있습니다.

17) [정답] ④ (출제자 : 17 최수영)

**[출제의도] 삼각함수의 극한을 계산할 수 있는가?**

[해설]

$\overline{OP}=\overline{AP}$ 이므로 삼각형 OAP 는 이등변삼각형이다.
점 P 에서 선분 OA 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.
삼각형 OAP 는 이등변삼각형이므로 이등변삼각형의 성질에 의해
$\overline{OH}=\overline{AH}=1$ 이고 선분 OA 와 선분 PH 는 수직이다.

삼각형 OAP 에 내접하는 원의 중심을 O$'$이라 하면
점 O$'$은 삼각형 OAP 의 내심이다.

따라서 $\angle O'OH=\frac{\theta}{2}$, $\overline{O'H}=r(\theta)$, $\overline{OH}=1$ 이므로

직각삼각형 OO$'$H 에서 $r(\theta)=\frac{\overline{O'H}}{\overline{OH}}=\tan\frac{\theta}{2}$ 이다.

삼각형 OAP 가 이등변삼각형이므로
$\angle POA=\angle PAO=\theta$ 이고, 외각의 성질에 의해 $\angle APB=2\theta$ 이다.
삼각형 OHP 에서

$\frac{\overline{OH}}{\overline{OP}}=\cos\theta$, $\overline{OP}=\frac{1}{\cos\theta}=\overline{AP}$

$\overline{BP}=2-\overline{OP}=2-\frac{1}{\cos\theta}$ 이므로
삼각형 ABP 의 넓이를 구하면

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\left(2-\frac{1}{\cos\theta}\right)\times\frac{1}{\cos\theta}\times\sin 2\theta$$
$$=\frac{(2\cos\theta-1)\times\sin 2\theta}{2\cos^2\theta}$$

이다.

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)\times S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\frac{\theta}{2}\times(2\cos\theta-1)\times\sin2\theta}{\theta^2\times2\cos^2\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\theta}\times\frac{2\cos\theta-1}{2\cos^2\theta}\times\frac{\sin2\theta}{\theta}\right)$$

에서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}\times2}=\frac{1}{2},$$

$\lim_{\theta\to0+}\cos\theta=1$ 이므로 $\lim_{\theta\to0+}\frac{2\cos\theta-1}{2\cos^2\theta}=\frac{1}{2}$,

$\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin2\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times2=2$ 이다.

따라서 $\lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)\times S(\theta)}{\theta^2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times2=\frac{1}{2}$ 이다.

18) [정답] ③ (출제자 : 17 김정빈)

**[출제의도] 모비율의 추정과 신뢰구간의 개념을 응용할 수 있는가?**

[해설]

표본비율 $\hat{p}$ 을 이용해 모비율 $p$ 를 추정할 때 신뢰도가 $k$% 라는 것은
크기가 $n$ 인 표본비율 $\hat{p}$ 100 개로 이루어진 신뢰구간 중 $k$ 개가
모비율 $p$ 를 포함한다는 뜻이다.

$\hat{p}=\frac{3}{4}$, $\sqrt{\frac{\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}}{1200}}=\frac{1}{80}$ 이고, $P(|Z|\le2)=\frac{k}{100}$ 이므로

$P(|Z|\le2)=P\left(-2\le\frac{\hat{p}-p}{\frac{1}{80}}\le2\right)=\frac{k}{100}$ 이다.

따라서 신뢰도 $k$% 의 신뢰구간은

$\frac{3}{4}-2\times\frac{1}{80}\le p\le\frac{3}{4}+2\times\frac{1}{80}$ 이다.

$\therefore b-a=2\times2\times\frac{1}{80}=\frac{1}{20}$

19) [정답] ③ (출제자 : 16 안성준)

**[출제의도] 삼수선의 정리를 활용할 수 있는가?**

[해설]

점 P 를 평면 $\alpha$ 에 정사영시킨 점을 H 라 하면, 선분 PH 는 평면 $\alpha$ 와
수직이고 그 길이는 3 이다.

(나) 조건의 $\overline{AC}\perp\overline{AP}$ 에 의해 삼각형 ACP 는 $\angle CAP=\frac{\pi}{2}$ 인
직각삼각형이다. $\overline{CP}=5$ 이고 $\overline{AC}=2$ 이므로 피타고라스 정리에 의해
$\overline{AP}=\sqrt{21}$ 이다.

선분 PH 는 평면 $\alpha$ 와 수직이고 조건 (나)에서 $\overline{AC}\perp\overline{AP}$ 이므로
삼수선의 정리에 의해 $\overline{AC}\perp\overline{AH}$ 이다.
이때, 삼각형 APH 는 $\angle AHP=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이 된다. $\overline{PH}=3$ 이고
조건 (나)에 의해 $\overline{AP}=\sqrt{21}$ 이므로 피타고라스 정리에 의해
$\overline{AH}=2\sqrt{3}$ 이다.

점 P 에서 직선 AB 에 내린 수선의 발을 H$'$이라 하자. 위와 마찬가지로
삼수선의 정리에 의해 직선 AB 와 선분 HH$'$이 수직이다. 따라서
구하고자 하는 평면 $\alpha$ 와 평면 ABP 가 이루는 예각의 크기 $\theta$ 는
각 PH$'$H 의 크기와 같다.

따라서 $\tan\theta=\frac{\overline{HP}}{\overline{HH'}}$ 이므로 이제 선분 HH$'$ 의 길이를 구하면 된다.

삼각형 AHH$'$는 $\angle AH'H=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이므로
삼각비의 정의에 의해 $\overline{HH'}=\overline{AH}\times\sin(\angle HAH')$ 이다.
조건 (가)에 의해 $\overline{AB}=\overline{AC}=2$ 이므로 삼각형 ABC 는
이등변삼각형이고 $\angle ABC=\frac{\pi}{6}$ 이므로 $\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$ 이다.

이때, $\overline{AC}\perp\overline{AH}$ 이므로 $\angle HAC=\frac{\pi}{2}$ 이다. 따라서 $\angle HAH'=\frac{\pi}{6}$ 이다.

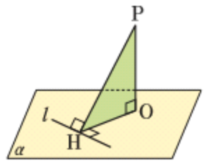
따라서 $\overline{HH'}=\overline{AH}\times\sin(\angle HAH')=2\sqrt{3}\times\sin\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$ 이다.

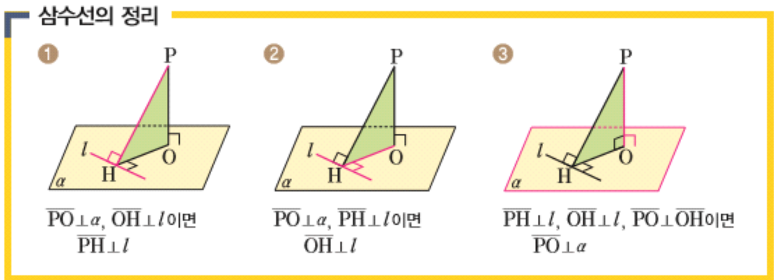

이 해설지에 관한 저작권은 Epsilon에 있습니다.

즉, $\tan\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{HP}}}{\overline{\mathrm{HH'}}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ 이다.

[참고]

오른쪽 그림과 같이 평면 $\alpha$ 위에 있지 않은 한 점 P와 평면 $\alpha$ 위의 직선 $l$, 직선 $l$ 위의 한 점 H, 평면 $\alpha$ 위에 있으면서 직선 $l$ 위에 있지 않은 점 O에 대하여 다음이 성립한다. 이것을 **삼수선의 정리**라고 한다.




(출처 : 이강섭 외 14인, 미래엔, 2009 개정 교육과정 기하와 벡터 135p)

그림과 같은 상황에서 직선 $l$ 위의 점 H가 아닌 점 중 하나를 A라 할 때, 세 삼각형 AHO, APH, OPH 모두 직각삼각형임을 유의하자.

20) [정답] ⑤ (출제자 : 17 조영호)

**[출제의도] 미분을 활용하여 그래프의 개형을 파악할 수 있는가?**

[해설]

ㄱ.

$f(x)$에 $x=\pi$, $x=\dfrac{\pi}{2}$를 각각 대입해보자.

$f(\pi)=e^{\cos\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(|\sin t|+1)\,dt = e^{-1}\int_0^{\pi}\ln(|\sin t|+1)\,dt$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{\cos\frac{\pi}{2}}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(|\sin t|+1)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(|\sin t|+1)\,dt$

함수 $|\sin t|+1$은 주기가 $\pi$인 주기함수이고 함수의 그래프는 직선 $x=\dfrac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로, 함수 $\ln(|\sin t|+1)$ 역시 주기가 $\pi$인 주기함수이고 함수의 그래프는 직선 $x=\dfrac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이다.

따라서 $\displaystyle\int_o^{\pi}\ln(|\sin t|+1)\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(|\sin t|+1)\,dt$이다.

이를 이용하여 위의 식을 정리해보면,

$e\times f(\pi)=2f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\ f(\pi)=\dfrac{1}{e}\times 2f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

ㄴ.

$e>2$, 즉 $\dfrac{2}{e}<1$과 ㄱ에서 구한 $f(\pi)=\dfrac{1}{e}\times 2f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$를 이용하여 $f(\pi)<f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$임을 알 수 있다. 모든 양수 $x$에 대하여

$|\sin x|+1\geq 1$, $\ln(|\sin x|+1)\geq 0$, $\displaystyle\int_0^{x}\ln(|\sin x|+1)\,dx\geq 0$

이고, $e^{\cos x}>0$이므로

$e^{\cos x}\displaystyle\int_0^{x}\ln(|\sin t|+1)\,dt>0$이고, $0<f(\pi)<f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$이다.

이때, $f(0)=e^{\cos 0}\displaystyle\int_0^{0}\ln(|\sin t|+1)\,dt = e\times 0 = 0$이므로

$f(0)<f(\pi)<f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$이다.

평균값 정리를 이용해보자.

함수 $f(x)$가 구간 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$에서 연속이고 구간 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$에서 미분가능하고 $f(0)<f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$이므로 $f'(c_1)=\dfrac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{\frac{\pi}{2}}>0$인 $c_1$이 구간 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$에 적어도 하나 존재한다.

마찬가지로 함수 $f(x)$가 구간 $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$에서 연속이고 구간 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$에서 미분가능하고 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>f(\pi)$이므로 $f'(c_2)=\dfrac{f(\pi)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi-\frac{\pi}{2}}<0$인 $c_2$가 구간 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$에 적어도 하나 존재한다.

사이값 정리를 이용해보자.

함수 $f'(x)$가 구간 $[0,\pi]$에서 연속이고 $f'(c_1)>0$, $f'(c_2)<0$, $0<c_1<\dfrac{\pi}{2}<c_2<\pi$이므로 $f'(c_3)=0$인 $c_3$이 구간 $(c_1,c_2)$에 적어도 하나 존재한다.

$c_1<c_3<c_2$이고 $f'(c_1)>0$, $f'(c_2)<0$, $f'(c_3)=0$이므로
함수 $f(x)$가 $x=c_3$에서 극댓값을 가지는 $c_3$이
구간 $(c_1,c_2)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가지는 $a$가 구간 $(0,\pi)$에 있다.

ㄷ.

$f(-x)=e^{\cos(-x)}\displaystyle\int_0^{-x}\ln(|\sin t|+1)\,dt$

$=e^{\cos x}\times\left(-\displaystyle\int_{-x}^{0}\ln(|\sin t|+1)\,dt\right)$이다.

함수 $\ln(|\sin t|+1)$을 살펴보면
$\ln(|\sin(-t)|+1)=\ln(|\sin t|+1)$이므로
함수 $\ln(|\sin t|+1)$의 그래프는 $y$축 대칭이다.

따라서 $\displaystyle\int_{-x}^{0}\ln(|\sin t|+1)\,dt=\int_0^{x}\ln(|\sin t|+1)\,dt$이므로

$f(-x)=-e^{\cos x}\displaystyle\int_{-x}^{0}\ln(|\sin t|+1)\,dt$

$=-e^{\cos x}\displaystyle\int_0^{x}\ln(|\sin t|+1)\,dt=-f(x)$이다.

$f(-x)=-f(x)$이므로 $f'(-x)=f'(x)$이다.

$f'(x)=(-\sin x)\times e^{\cos x}\displaystyle\int_0^{x}\ln(|\sin t|+1)\,dt+e^{\cos x}\ln(|\sin x|+1)$

$f'(0)=(-\sin 0)\times e^{\cos 0}\displaystyle\int_0^{0}\ln(|\sin t|+1)\,dt+e^{\cos 0}\ln(|\sin 0|+1)=0$

$f'(-\pi)=f'(\pi)$

$=(-\sin\pi)\times e^{\cos\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(|\sin t|+1)\,dt+e^{\cos\pi}\ln(|\sin\pi|+1)=0$

ㄴ에 의해 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가지므로 $f'(a)=0$이다.
또한 $f'(-x)=f'(x)$이므로 $f'(-a)=f'(a)$이다. (단, $0<a<\pi$)



이 해설지에 관한 저작권은 Epsilon에 있습니다.

위에서 구한 식을 보면 $f'(0)=0$, $f'(-a)=0$, $f'(-\pi)=0$ 이다.

롤의 정리를 이용해보자.
함수 $f'(x)$가 구간 $[-a, 0]$에서 연속이고 구간 $(-a, 0)$에서 미분가능하므로 $f''(c_4)=0$인 $c_4$가 구간 $(-a, 0)$에 적어도 하나 존재하고
함수 $f'(x)$가 구간 $[-\pi, -a]$에서 연속이고 구간 $(-\pi, -a)$에서 미분가능하므로 $f''(c_5)=0$인 $c_5$가 구간 $(-\pi, -a)$에 적어도 하나 존재한다.
$\therefore$ $f''(b)=0$을 만족시키는 $b$가 구간 $(-\pi, 0)$에 적어도 둘 존재한다.

21) [정답] ① (출제자 : 16 김동균)
**[출제의도] 1. 주어진 극한식을 올바르게 해석할 수 있는가?**
**2. 주어진 조건을 만족시키는 이차함수를 찾을 수 있는가?**

[해설]
① 주어진 조건 $\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x-h)}{h}=0$의 분석

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\{g(x+h)-g(x)\}-\{g(x-h)-g(x)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\frac{g(x-h)-g(x)}{-h}\right\}$$

(ⅰ) $h\to 0+$ 인 경우,
$t=-h$로 치환하면
$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(x-h)-g(x)}{-h}=\lim_{t\to 0-}\frac{g(x+t)-g(x)}{t}$$
이므로
$\lim_{h\to 0+}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$, $\lim_{h\to 0-}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$가 각각 수렴하는 경우,
$$\lim_{h\to 0+}\left\{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\frac{g(x-h)-g(x)}{-h}\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{t\to 0-}\frac{g(x+t)-g(x)}{t}$$
로 평균변화율의 좌극한과 평균변화율의 우극한의 합이다.

(ⅱ) $h\to 0-$ 인 경우, 같은 방법으로
$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(x-h)-g(x)}{-h}=\lim_{t\to 0+}\frac{g(x+t)-g(x)}{t}$$
이므로
$\lim_{h\to 0+}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$, $\lim_{h\to 0-}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$가 각각 수렴하는 경우,
$$\lim_{h\to 0-}\left\{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\frac{g(x-h)-g(x)}{-h}\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{t\to 0+}\frac{g(x+t)-g(x)}{t}$$
로 평균변화율의 좌극한과 평균변화율의 우극한의 합이다.

② 함수 $f(x)$에 대한 정보 파악하기
주어진 조건 $\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x-h)}{h}=0$이 미분의 정의인
$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ 와 유사하게 생겼음을 통해
미분을 이용하여 $f(x)$와 $g(x)$에 대한 정보를 얻어야 함을 추측할 수 있다.

함수 $g(x)$를 $x$에 대해 미분하려는데 $|f(x)|$가 있으므로
함수 $f(x)$의 부호변화를 살펴보자.
이차함수의 함숫값의 부호변화는 실근의 개수에 따라 달라지는데
이차함수의 최고차항의 계수가 양수이므로 다음과 같은 경우가 있다.
ⅰ) 실근의 개수가 0인 경우, $f(x)>0$이다.
ⅱ) 중근을 가지는 경우, $f(x)\ge 0$이다.
ⅲ) 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우, 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 할 때,
$$f(x)=\begin{cases}- & (\alpha<x<\beta)\\ + & (x<\alpha \text{ 또는 } x>\beta)\end{cases}$$ 이다.
ⅰ), ⅱ)의 경우에서 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)\ge 0$이므로
$g(x)=e^{-f(x)}$이고, 지수함수 $e^x$와
이차함수 $f(x)$는 모두 미분가능하므로 합성함수인 $g(x)$도 미분가능하다.
따라서 모든 실수 $x$에 대해서
$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
이고,
$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x-h)}{h}=2\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=2g'(x)=0$$
이다.
함수 $g(x)$를 $x$에 대해 미분하면 도함수 $g'(x)=-f'(x)e^{-f(x)}$이다.
즉, 서로 다른 3개의 실수($=a$, $0$, $b$)는 $g'(x)=-f'(x)e^{-f(x)}=0$을 만족해야 하고 $e^{-f(x)}>0$이므로 방정식 $f'(x)=0$을 만족시키는 해에 대해서만 $g'(x)$의 함숫값이 0이 된다.
함수 $f(x)$는 이차함수이므로 도함수 $f'(x)$는 일차함수이고,
방정식 $f'(x)=0$의 해는 1개다.
그러므로 방정식 $g'(x)=0$을 만족시키는 실수가 1개이고,
$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x-h)}{h}=0$을 만족시키는 실수는 3개가 될 수 없다.
그러면 ⅰ), ⅱ)의 경우가 불가능하므로
함수 $f(x)$는 ⅲ)의 경우임을 알 수 있다. 함수 $f(x)$가 두 개의 실근을 갖는다는 것을 추론했으므로 구하고자 하는 값인 $f(8a)$를 정확히 구하기 위해서 함수 $f(x)$를 정확히 찾아보자.

③ 함수 $f(x)$ 구하기
방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근이 2개임을 추측했으므로
두 근을 $\alpha$, $\beta$ $(\alpha<\beta)$라 하자. 그러면
$$g(x)=\begin{cases}e^{-f(x)} & (x\le\alpha)\\ e^{f(x)} & (\alpha<x<\beta)\\ e^{-f(x)} & (x\ge\beta)\end{cases}$$
이고, $x=\alpha$, $x=\beta$가 아닌 모든 실수 $x$에 대하여
$$g'(x)=\begin{cases}-f'(x)e^{-f(x)} & (x<\alpha)\\ f'(x)e^{f(x)} & (\alpha<x<\beta)\\ -f'(x)e^{-f(x)} & (x>\beta)\end{cases}$$
이다. ($x=\alpha$, $x=\beta$일 때, 함수 $g(x)$의 식이 바뀌는 지점이므로 미분가능성을 나중에 따로 살펴보자.)
이제, $\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x-h)}{h}=0$을 만족시키는 실수 $x$를 찾아보자.
$x=\alpha$, $x=\beta$가 아닌 구간에서는 미분가능하고, 이 구간에서는 앞서 살펴본 바와 같이 방정식 $g'(x)=0$을 만족시키는 실근을 구하면 된다.
$e^{f(x)}$와 $e^{-f(x)}$의 값은 항상 양수이므로 방정식 $f'(x)=0$을 만족시키는 하나의 실근이 $\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x-h)}{h}=0$을 만족시킴을 알 수 있다.
이제, $x=\alpha$, $x=\beta$일 때를 살펴보면,
$x=\alpha$일 때, $f(\alpha)=0$이므로
$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}=\lim_{x\to\alpha+}g'(x)=f'(\alpha)e^{f(\alpha)}=f'(\alpha)$$
$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}=\lim_{x\to\alpha-}g'(x)=-f'(\alpha)e^{-f(\alpha)}=-f'(\alpha)$$


이 해설지에 관한 저작권은 Epsilon에 있습니다.

따라서 $x=\alpha$ 에서

$\lim_{h\to0}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha-h)}{h}=f'(\alpha)-f'(\alpha)=0$ 을 만족시킨다.

같은 방법으로 $x=\beta$ 일 때에도 주어진 조건

$\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x-h)}{h}=0$ 을 만족시킨다.

그러면, 이제 방정식 $f'(x)=0$ 의 한 실근과 두 실수 $\alpha$, $\beta$ 의 값이 $a$, $0$, $b$ 중 하나라는 것을 알 수 있다.

함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 양의 상수 $k$ 에 대하여

$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)=k\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$ 이고,

$f'(x)=k\{2x-(\alpha+\beta)\}$ 이다.

방정식 $f'(x)=0$ 을 만족시키는 한 실근은 $\frac{\alpha+\beta}{2}$ 이고,

$\alpha<\beta$ 에서 $\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$ 이다.

또, $a<0<b$ 에서 $\alpha=a$, $\frac{\alpha+\beta}{2}=0$, $\beta=b$ 임을 알 수 있다.

$\frac{\alpha+\beta}{2}=0$ 에서 $\alpha=-\beta$ 이므로 $a=-b$ 이다.

따라서 $f(x)=k(x-a)(x+a)=k(x^2-a^2)$ 이다.

$g(0)=\frac{1}{e}$ 에서 $g(0)=e^{-|f(0)|}=e^{-1}$ 이다.

$|f(0)|=1$ 이고 $f(0)<0$ 이므로 $f(0)=-1$ 이다.

$f(0)=k(0^2-a^2)=-ka^2=-1$ 에서 $ka^2=1$ 이므로 $k=\frac{1}{a^2}$ 이다.

따라서 $f(8a)=\frac{1}{a^2}\{(8a)^2-a^2\}=\frac{63a^2}{a^2}=63$ 이다.

[같이 풀어보면 좋은 문제]

1. 2008학년도 6월 모의평가 가형 9번 (답 : ⑤)

**9.** 함수 $f(x)$에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$이면 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이다.

ㄴ. $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$이면 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=0$이다.

ㄷ. $f(x)=|x-1|$일 때, $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=0$이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

주어진 조건 '$\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x-h)}{h}$ 의 값이 존재한다.'는 '$x$ 에서 미분가능하다.'와는 다른 의미임을 생각해보자.

2. 2016학년도 9월 모의평가 A형 21번 (답 : ⑤)

**21.** 실수 $t$에 대하여 직선 $x=t$가 두 함수

$$y=x^4-4x^3+10x-30,\quad y=2x+2$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 점 A와 점 B 사이의 거리를 $f(t)$라 하자.

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to-0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\le0$$

을 만족시키는 모든 실수 $t$의 값의 합은? [4점]

① $-7$　② $-3$　③ $1$　④ $5$　⑤ $9$

이 문제는 본 문제와 유사하게 평균변화율의 좌극한과 평균변화율의 우극한의 표현을 통해서 도함수의 좌극한과 우극한을 생각하는 문제이다.

3. 2017학년도 9월 모의평가 가형 30번 (답 : 48)

**30.** 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=|2\sin(x+2|x|)+1|$$

에 대하여 함수 $h(x)=f(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$를 갖고, $h''(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

절댓값을 포함하는 함수에 대해서 연속성 또는 미분가능성을 묻는 문제를 풀어보자.

22) [정답] 28　(출제자 : 17 김정빈)

**[출제의도] 간단한 조합의 계산을 할 수 있는가?**

[해설]

${}_8C_2=\frac{8\times7}{1\times2}=28$

23) [정답] 2　(출제자 : 17 김도훈)

**[출제의도] 부분적분법을 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?**

[해설]

$f(x)=x$, $g'(x)=\cos x$ 라 하면

$f'(x)=1$, $g(x)=\sin x$ 이므로

$$\int_{\pi}^{2\pi}x\cos x\,dx=\int_{\pi}^{2\pi}f(x)g'(x)\,dx=[f(x)g(x)]_{\pi}^{2\pi}-\int_{\pi}^{2\pi}f'(x)g(x)\,dx$$

$$=[x\sin x]_{\pi}^{2\pi}-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx=0-[-\cos x]_{\pi}^{2\pi}=1-(-1)=2$$ 이다.

$$\therefore\int_{\pi}^{2\pi}x\cos x\,dx=2$$



이 해설지에 관한 저작권은 Epsilon에 있습니다.

24) [정답] 5 (출제자 : 17 조영호)

**[출제의도] 지수함수를 활용하여 부등식을 풀 수 있는가?**

[해설]

$t=x^2+1$로 치환하면 $2^t \le 32=2^5$을 만족시키는 $t$의 범위를 구해야 한다.
밑이 1보다 큰 지수함수는 증가함수이므로, $t \le 5$를 만족시키는 $t$의 범위를 구하면 된다.
$t=x^2+1 \le 5$, 즉 $x^2 \le 4$이므로 $-2 \le x \le 2$이다.
따라서 이를 만족시키는 정수 $x$의 값은 $-2$, $-1$, $0$, $1$, $2$이므로 정수 $x$의 개수는 5이다.

25) [정답] 26 (출제자 : 17 김국연)

**[출제의도] 두 함수의 그래프가 접하는 점에서의 미분계수를 활용할 수 있는가?**

[해설]

접점의 좌표를 $(a, b)$라 하면,
곡선 $y=ke^{x-1}$과 직선 $y=5x$가 점 $(a, b)$에서 접하므로
$x=a$에서 $y=ke^{x-1}$의 접선의 기울기는 5가 되어야 한다.
$y=ke^{x-1}$이므로 $y'=ke^{x-1}$이다.
따라서 $ke^{a-1}=5$이고, 점 $(a, b)$는 곡선 $y=ke^{x-1}$ 위의 점이므로
$b=ke^{a-1}=5$이다.
또한, 점 $(a, b)$는 직선 $y=5x$ 위의 점이므로 $b=5a$이다.
$b=5$이므로 $a=1$이다.
$ke^{a-1}=5$에 $a=1$을 대입하면 $k=5$이다.
따라서 $k^2+a^2=26$이다.

26) [정답] 47 (출제자 : 16 이준희)

**[출제의도] 중복조합을 활용하여 주어진 방정식의 해의 개수를 구할 수 있는가?**

[해설]

$(a+b+c)^2 \times d=36$을 만족시키는 경우를 보면
$1^2 \times 36$, $2^2 \times 9$, $3^2 \times 4$, $6^2 \times 1$ 네 가지가 있다.

case1) $1^2 \times 36$이므로 $a+b+c=1$이고 $d=36$이다.
그러므로 순서쌍 $(a, b, c, d)$의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$이다.

case2) $2^2 \times 9$이므로 $a+b+c=2$이고 $d=9$이다.
그러므로 순서쌍 $(a, b, c, d)$의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$이다.

case3) $3^2 \times 4$이므로 $a+b+c=3$이고 $d=4$이다.
그러므로 순서쌍 $(a, b, c, d)$의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3=10$이다.

case4) $6^2 \times 1$이므로 $a+b+c=6$이고 $d=1$이다.
그러므로 순서쌍 $(a, b, c, d)$의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6=28$이다.

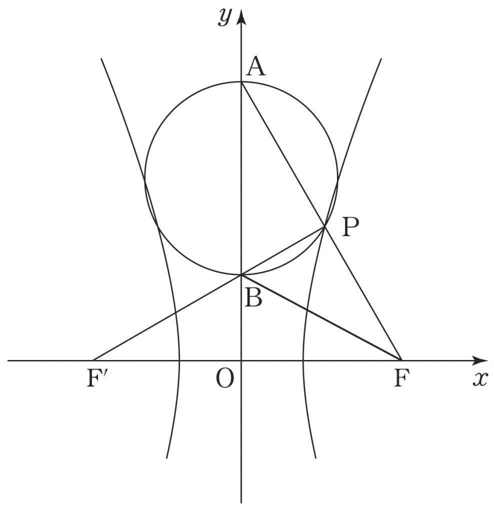
따라서 모든 순서쌍 $(a, b, c, d)$의 개수는 47이다.

27) [정답] 80 (출제자 : 16 김동균)

**[출제의도] 쌍곡선의 정의와 대칭성을 이용하여 주어진 선분의 길이를 구할 수 있는가?**

[해설]

구하려는 원의 반지름의 길이를 $r$이라 하자.
그러면 지름인 선분 AB의 길이는 $2r$이고,
각 BAP의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이므로 선분 BP의 길이는 $r$이다.
쌍곡선의 정의를 사용하기 위해서 선분 BF$'$의 길이와 선분 FP의 길이가 필요하므로 두 선분의 길이를 구하기 위해 보조선 BF를 그어보자.




그러면 우선 각 ABP의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이고

맞꼭지각의 성질에 의해 각 F$'$BO의 크기도 $\frac{\pi}{3}$이고,

직각삼각형 BF$'$O에서 각 BF$'$O의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이다.

쌍곡선의 대칭성($y$축 대칭)에 의해 각 BFO의 크기도 $\frac{\pi}{6}$이다.

직각삼각형 AFO에서 $\angle \mathrm{OAF}=\frac{\pi}{6}$이므로 $\angle \mathrm{AFO}=\frac{\pi}{3}$이다.

$\angle \mathrm{PFO}=\angle \mathrm{BFP}+\angle \mathrm{BFO}$이므로 $\angle \mathrm{BFP}=\frac{\pi}{6}$이다.

이제 직각삼각형 BFP를 보면, $\overline{\mathrm{BP}}=r$이므로
$\overline{\mathrm{BF}}=2r$, $\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{3}r$임을 알 수 있다.
다시 쌍곡선의 대칭성에 의해 선분 BF$'$의 길이는 $2r$이 된다,
따라서 쌍곡선의 정의에 의해
$\overline{\mathrm{F'P}}-\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{F'B}}+\overline{\mathrm{BP}}-\overline{\mathrm{FP}}=(3-\sqrt{3})r=2$이므로

$r=\frac{2}{3-\sqrt{3}}=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

$a=1$, $b=\frac{1}{3}$이다.

$\therefore\ 60(a+b)=60\times\left(1+\frac{1}{3}\right)=80$

[참고]
① 삼각형 AFF$'$는 정삼각형이다.
② 점 B는 정삼각형 AFF$'$의 내심, 외심, 무게중심이다.


이 해설지에 관한 저작권은 Epsilon에 있습니다.

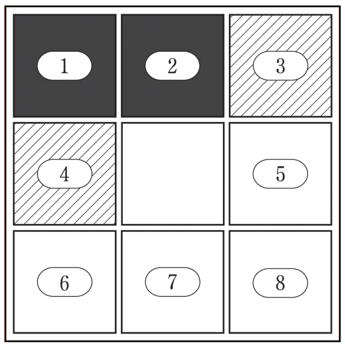
28) [정답] 84 (출제자 : 17 김도훈)

**[출제의도] 문제 상황을 이해하고 경우를 나눠 경우의 수를 구할 수 있는가?**

[해설]

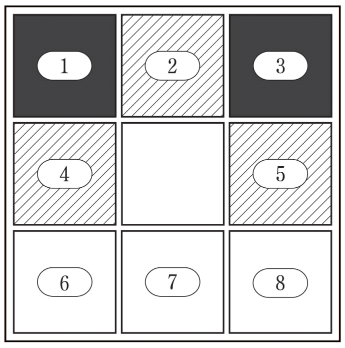
편의를 위해 2 명의 사람을 각각 A , B 라 하자.
A 와 B 에게 사물함을 배정하는 경우의 수는
A 의 사물함의 위치를 중심으로 총 4 가지의 Case로 분류하여 볼 수 있다.

Case ①) A 의 두 사물함이 이웃해 있을 때



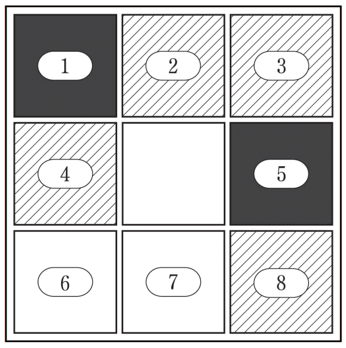

검은색 사물함이 A 의 사물함이라 하면 B 에게는 A 의 사물함과 이웃한 빗금 친 사물함을 제외한 4 개의 사물함 중 2 개의 사물함을 배정해야 하므로 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 이다. A 에게 사물함을 배정하는 경우의 수는 회전하며 세어보면 8 이다.
따라서 Case ①의 경우의 수는 $6 \times 8 = 48$ 이다.

Case ②) A 의 사물함이 한 칸 떨어져 있을 때



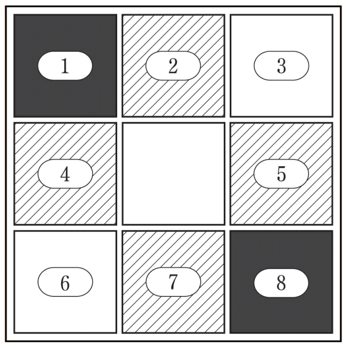

검은색 사물함이 A 의 사물함이라 하면 B 에게는 A 의 사물함과 이웃한 빗금 친 사물함을 제외한 3 개의 사물함 중 2 개의 사물함을 배정해야 하므로 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$ 이다. A 에게 사물함을 배정하는 경우의 수는 회전하며 세어보면 8 이다.
따라서 Case ②의 경우의 수는 $3 \times 8 = 24$ 이다.

Case ③) A 의 사물함이 두 칸 떨어져 있을 때




검은색 사물함이 A 의 사물함이라 하면 B 에게는 A 의 사물함과 이웃한 빗금 친 사물함을 제외한 2 개의 사물함 중 2 개의 사물함을 배정해야 하므로 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_2 = 1$ 이다. A 에게 사물함을 배정하는 경우의 수는 회전하며 세어보면 8 이다.
따라서 Case ③의 경우의 수는 $1 \times 8 = 8$ 이다.

Case ④) A 의 사물함이 세 칸 떨어져 있을 때

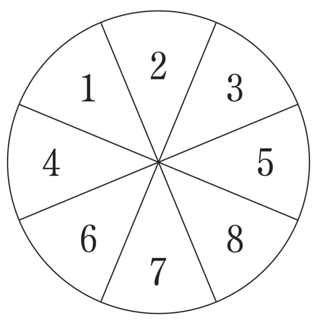



검은색 사물함이 A 의 사물함이라 하면 B 에게는 A 의 사물함과 이웃한 빗금 친 사물함을 제외한 2 개의 사물함 중 2 개의 사물함을 배정해야 하므로 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_2 = 1$ 이다. A 에게 사물함을 배정하는 경우의 수는 회전하며 세어보면 Case ①, ②, ③과 달리 중복되는 경우가 생기므로 경우의 수는 $\frac{8}{2} = 4$ 이다.
따라서 Case ④의 경우의 수는 $1 \times 4 = 4$ 이다.

A 의 사물함이 네 칸, 다섯 칸 떨어져 있는 것은 두 칸, 한 칸 떨어져 있는 경우와 같으므로 Case를 따로 분류하지 않는다. 또한 A 의 사물함이 여섯 칸 떨어져 있는 것은 이웃해 있는 것과 같으므로 Case를 따로 분류하지 않는다. 따라서 가능한 경우의 수는 Case ①, ②, ③, ④의 경우뿐이다.
$\therefore\ 48 + 24 + 8 + 4 = 84$

[보충설명]

주어진 그림을 조금 변형하여 다음 그림과 같이 나타내면
해설을 보다 쉽게 이해할 수 있다.

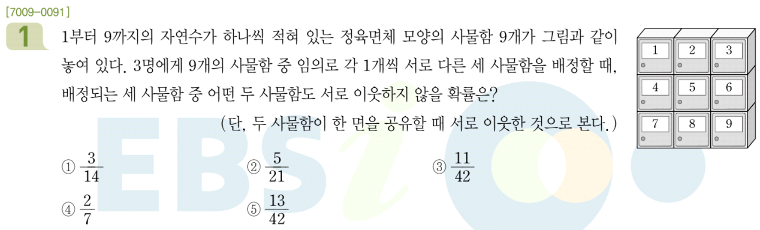





이 해설지에 관한 저작권은 Epsilon에 있습니다.

[참고문항]

2018학년도 수능특강 확률과 통계 54p 1번 문항



[7009-0091]

**1** 1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 정육면체 모양의 사물함 9개가 그림과 같이 놓여 있다. 3명에게 9개의 사물함 중 임의로 각 1개씩 서로 다른 세 사물함을 배정할 때, 배정되는 세 사물함 중 어떤 두 사물함도 서로 이웃하지 않을 확률은?

(단, 두 사물함이 한 면을 공유할 때 서로 이웃한 것으로 본다.)

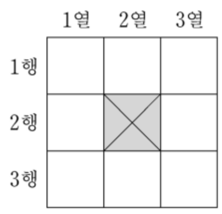


① $\frac{3}{14}$ ② $\frac{5}{21}$ ③ $\frac{11}{42}$

④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{13}{42}$

2013학년도 대학수학능력시험 29번 문항

**29.** 다음 좌석표에서 2행 2열 좌석을 제외한 8개의 좌석에 여학생 4명과 남학생 4명을 1명씩 임의로 배정할 때, 적어도 2명의 남학생이 서로 이웃하게 배정될 확률은 $p$이다. $70p$의 값을 구하시오. (단, 2명이 같은 행의 바로 옆이나 같은 열의 바로 앞뒤에 있을 때 이웃한 것으로 본다.) [4점]




29) [정답] 10 (출제자 : 16 안성준)

**[출제의도] 1. 수선의 발을 내린 후 벡터의 분해를 통하여 벡터의 내적을 구할 수 있는가?**

**2. 단면화를 통해 움직이는 점과 고정된 직선 사이의 거리의 최댓값을 구할 수 있는가?**

[풀이 개요]

① 조건의 내적 값을 통하여 점들과 직선 사이의 위치관계를 파악한다.

② 점 Q 의 위치를 파악한다.

③ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=39$ 를 통해 삼각형 넓이의 최댓값을 구한다.

[풀이 방안]

주어진 조건을 파악하면 두 점 A, B 는 비교적 고정적이고,
두 점 P, Q 는 움직이는 점이다.
두 점 P, Q 에 대한 내적 값을 두 점 A, B 에 대하여 표현하여 식을 파악한다.

[해설]

① (가) 조건을 변형해보면

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AQ})=(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PA})+(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ})$,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PA}=0$ 이므로 $(\because \overline{AB}\perp\overline{AP})$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ}=12$ 이다.

(가) 조건의 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ}=12$ 와

(나) 조건의 $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ}$ 에 의해

$2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ}=12$ 이다.

두 점 A, B 를 지나는 직선을 $l$ 이라 하자.

조건에 의해 점 P 에서 직선 $l$ 에 내린 수선의 발은 A 가 된다.

점 O 와 점 Q 에서 직선 $l$ 에 내린 수선의 발을 각각 $H_O$, $H_Q$ 라 하자.

$2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AH_O}+\overrightarrow{H_OO})$

$=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH_O}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{H_OO}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH_O}$

$(\because \overline{AB}\perp\overline{H_OO})$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AH_Q}+\overrightarrow{H_QQ})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH_Q}$

$(\because \overline{AB}\perp\overline{H_QQ})$

점 A, B, $H_O$, $H_Q$ 모두 직선 $l$ 위의 점이고 $|\overrightarrow{AB}|=2$ 이므로

$2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH_O}=2|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AH_O}|=4|\overrightarrow{AH_O}|=12$ 이고

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH_Q}=|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AH_Q}|=2|\overrightarrow{AH_Q}|=12$ 이다.

따라서 $\overline{AH_O}=3$, $\overline{AH_Q}=6$ 이다.

②-1) (나) 조건을 변형해보자.

(나) 조건에 의해 $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ}$ 이고

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OQ})=(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO})+(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OQ})$

이므로

$2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO})+(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OQ})$ 이다.

즉, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OQ}=6$ 이다.

직선 $l$ 과 평행하고 점 O 를 지나는 직선을 $m$,

점 Q 에서 직선 $m$ 에 내린 수선의 발을 O′ 이라 하면

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'Q})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{O'Q}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OO'}$ $(\because \overline{AB}\perp\overline{O'Q})$

두 점 A, B 는 직선 $l$ 위의 점이고, 두 점 O, O′ 은 직선 $m$ 위의 점이고

직선 $l$ 과 직선 $m$ 은 평행하므로 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OO'}$ 은 평행하다.

따라서 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OO'}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{OO'}|=6$ 이고 $|\overrightarrow{AB}|=2$ 이므로

$|\overrightarrow{OO'}|=3$ 이다.

점 O′ 을 지나고 직선 $l$ 과 수직이고 점 O 로부터의 거리가 3 인 평면을 $\beta$ 라 할 때, 점 Q 는 구 $C$ 와 평면 $\beta$ 가 만나 생기는 원 위의 점이다.

구의 반지름의 길이는 5 이고 평면 $\beta$ 는 점 O 로부터의 거리가 3 이므로

피타고라스 정리에 의해 점 Q 는 평면 $\beta$ 위에서 점 O′ 을 중심으로 하고

반지름의 길이가 4 인 원 위의 점이다.

②-2)

점 $H_Q$ 는 점 Q 에서 직선 $l$ 에 내린 수선의 발이므로

점 Q 는 직선 $l$ 에 수직이고 점 $H_Q$ 를 지나는 평면 위의 점이다.

그 평면을 $\beta$ 라 하면 점 Q 는 구 $C$ 와 평면 $\beta$ 가 만나서 생기는 원 위의 점이다. ①에서 구한 $\overline{AH_O}=3$, $\overline{AH_Q}=6$ 에 의해 $\overline{H_OH_Q}=3$ 이므로

평면 $\beta$ 는 점 O 로부터 떨어진 거리가 3 이다.

따라서 점 Q 는 평면 $\beta$ 위에서 점 O′ 을 중심으로 하고

반지름의 길이가 4인 원 위의 점이다.



이 해설지에 관한 저작권은 Epsilon에 있습니다.

③ $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 39$ 을 수직분해하면 다음과 같다.

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (\overrightarrow{\mathrm{OH_0}} + \overrightarrow{\mathrm{H_0A}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OH_0}} + \overrightarrow{\mathrm{H_0B}})$

$(\overrightarrow{\mathrm{OH_0}} + \overrightarrow{\mathrm{H_0A}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OH_0}} + \overrightarrow{\mathrm{H_0B}})$

$= (\overrightarrow{\mathrm{OH_0}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OH_0}}) + (\overrightarrow{\mathrm{OH_0}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{H_0A}})$

$\quad + (\overrightarrow{\mathrm{OH_0}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{H_0B}}) + (\overrightarrow{\mathrm{H_0A}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{H_0B}})$

$= |\overrightarrow{\mathrm{OH_0}}|^2 + (\overrightarrow{\mathrm{H_0A}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{H_0B}}) \qquad (\because \overline{\mathrm{OH_0}} \perp \overline{\mathrm{H_0A}}, \overline{\mathrm{OH_0}} \perp \overline{\mathrm{H_0B}})$

이때, $\overrightarrow{\mathrm{H_0A}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{H_0B}} = |\overrightarrow{\mathrm{H_0A}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{H_0B}}| = 3$ 이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{OH_0}}|^2 + \overrightarrow{\mathrm{H_0A}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{H_0B}} = |\overrightarrow{\mathrm{OH_0}}|^2 + 3 = 39$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{OH_0}}|^2 = 36$ 이다. 즉, $\overline{\mathrm{OH_0}} = 6$ 이다.

두 직선 $l$ 과 $m$ 은 평행하고
직선 $m$ 위의 점 O, O′ 에서 직선 $l$ 에 내린 수선의 발은
각각 $\mathrm{H_0}$, $\mathrm{H_Q}$ 이므로 $\overline{\mathrm{OH_0}} = \overline{\mathrm{O'H_Q}} = 6$ 이다.

삼각형 ABQ 에서 선분 AB 를 밑변으로 보면 선분 $\mathrm{QH_Q}$ 가 높이가 된다. 이때, 선분 AB 의 길이는 2 로 일정하므로
선분 $\mathrm{QH_Q}$ 의 길이가 최대일 때, 삼각형 ABQ 의 넓이가 최대가 된다.

점 $\mathrm{H_Q}$ 는 점 Q 에서 직선 $l$ 에 내린 수선의 발이므로
선분 $\mathrm{QH_Q}$ 의 길이는 점 Q 로부터 직선 $l$ 까지의 거리와 같다.
평면 $\beta$ 에 대하여 직선 $l$ 과 점 Q 의 위치관계를 파악하자.
점 Q 는 평면 $\beta$ 위에서 점 O′ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 4 인 원 위의 점이다.
직선 $l$ 은 평면 $\beta$ 에 수직인 직선이고 직선 $l$ 과 평면 $\beta$ 의 교점은 $\mathrm{H_Q}$ 이다.
직선 $l$ 은 평면 $\beta$ 에 수직이므로 직선 $l$ 위의 임의의 점에 대하여
평면 $\beta$ 로의 정사영은 점 $\mathrm{H_Q}$ 가 된다.

평면 $\beta$ 위에 점 O′ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 4 인 원 위의 점 Q 가 있고, 점 O′ 으로부터 거리가 6 만큼 떨어진 곳에 점 $\mathrm{H_Q}$ 가 있다.
따라서 선분 $\mathrm{QH_Q}$ 의 길이의 최댓값은 선분 $\mathrm{QH_Q}$ 가 점 O′ 을 지날 때이고, 그 값은 $6 + 4 = 10$ 이 된다.
즉, 점 Q 로부터 직선 $l$ 까지의 거리의 최댓값은 10 이다.

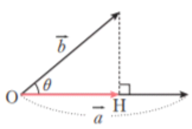
따라서 삼각형 ABP 의 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{2} \times 2 \times 10 = 10$ 이 된다.

[참고]
(출처 : 이강섭 외 14인, 미래엔, 2009 개정 교육과정 기하와 벡터 187p)

오른쪽 그림과 같이 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기가 $\theta$ 이고,
벡터 $\vec{b}$ 의 종점에서 벡터 $\vec{a}$ 에 내린 수선의 발을 H라고 할 때,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |\vec{a}||\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$$

이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 의 내적은 벡터 $\vec{a}$ 의 크기와 벡터 $\vec{b}$ 의 벡터 $\vec{a}$ 위로의 정사영인 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ 의 크기를 곱한 것과 같다.




30) [정답] 140 (출제자 : 16 김동균)

**[출제의도] 1. 이계도함수로부터 함수에 대한 정보를 찾을 수 있는가?**
**2. 조건식을 통해서 함수의 그래프의 기하적 성질을 파악할 수 있는가?**

[해설]

① 함수 $g(x)$, $h(x)$ 의 관찰

함수 $g(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,dt$ 에서 $x$, $-x$ 를 통해서 $x = 0$ 인 지점과 관련이 있음을 유추할 수 있고, $x = 0$ 을 대입하면 $g(0) = \int_{0}^{0} f(t)\,dt = 0$ 임을 알 수 있다. 즉, 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 점 $(0, 0)$ 을 지난다.

같은 방법으로 함수 $h(x)$ 에 $x = 1$ 을 대입하면 $h(1) = \int_{1}^{1} f(t)\,dt = 0$ 을 통해서 함수 $y = h(x)$ 의 그래프는 점 $(1, 0)$ 을 지남을 알 수 있다.

② (가) 조건의 해석

(가) 조건에서 두 함수 $g(x)$, $h(x)$ 의 그래프에 대한 서술이 있으므로 두 함수 $g(x)$, $h(x)$ 의 그래프를 살펴보자. 두 함수의 그래프가 점 $(2, 4)$ 에서 만나므로 $g(2) = 4$, $h(2) = 4$ 라는 정보를 얻을 수 있다.

③ (나) 조건의 해석

이제, (나) 조건에서 두 함수의 그래프에 대한 정보를 찾아보자.
(나) 조건은 $g'(x)$, $h'(x)$, $g''(x)$, $h''(x)$ 에 대한 조건으로
이계도함수가 도함수의 도함수라는 점을 떠올리자. – [보충 설명] 참고
함수 $g''(x)h''(x)$ 가 등장하여 함수 $g'(x)h'(x)$ 의 도함수를 생각해볼 수 있지만, 미분한 결과가 $g'(x)h''(x) + g''(x)h'(x)$ 라는 점에서
(나) 조건에서 주어진 정보로 해석하기 어렵다는 판단이 들고 다른 관점으로 조건을 해석해야한다.
우선, 양의 상수 $c$ 에 대하여 $g'(x)h'(x) = c$ 에서
$g'(x) = 0$ 이면 $c = 0$ 이므로 모순이다.

따라서 $g'(x) \neq 0$ 이므로 $h'(x) = \frac{c}{g'(x)}$ 이고,

$h''(x) = -\frac{c}{\{g'(x)\}^2} \times g''(x)$ 이므로

$g''(x)h''(x) = -\frac{c}{\{g'(x)\}^2}\{g''(x)\}^2$ 이다.

$c > 0$, $\{g'(x)\}^2 > 0$, $\{g''(x)\}^2 \geq 0$ 이므로
$g''(x)h''(x) \leq 0$ 이다.
(나) 조건에서 $g''(x)h''(x) \geq 0$ 이므로 $g''(x)h''(x) = 0$ 이다.
따라서 $g''(x) = 0$ 또는 $h''(x) = 0$ 이다.
$g''(x) = 0$ 이면 상수 $c_1$ $(c_1 \neq 0)$ 에 대하여 $g'(x) = c_1$ 이다.

그러면, $h'(x) = \frac{c}{g'(x)} = \frac{c}{c_1}$ 이므로

함수 $h'(x)$ 는 상수함수이고, $h''(x) = 0$ 이다.
따라서 $g''(x) = 0$ 이고 $h''(x) = 0$ 이고, (나) 조건이 모든 실수 $x$ 에 대해 성립하므로 두 함수 $g'(x)$, $h'(x)$ 는 모든 실수 $x$ 에 대하여 상수함수임을 알 수 있다.

$g'(x) = c_1$, $h'(x) = c_2$ (단, $c_1$, $c_2$ 는 0 이 아닌 상수이다.)

라 놓으면 양변을 $x$ 에 대하여 적분하면

$g(x) = c_1x + c_3$, $h(x) = c_2x + c_4$ (단, $c_3$, $c_4$ 는 적분상수이다.)

이므로 두 함수 $g(x)$, $h(x)$ 가 일차함수임을 알 수 있다.

④ (가), (나) 조건에서 얻은 정보의 결합

함수 $g(x)$ 가 일차함수이고, 함수 $g(x)$ 의 그래프가
두 점 $(0, 0)$, $(2, 4)$ 를 지나므로 $g(x) = 2x$ 임을 알 수 있고,



이 해설지에 관한 저작권은 Epsilon에 있습니다.

같은 방법으로 $h(x)=4x-4$ 임을 알 수 있다.

⑤ 함수 $f(x)$ 에 대한 정보 파악하기
최종적으로 구하고자 하는 것은 함수 $f(x)$ 에 관한 값이다. 따라서 나온 정보인 $g(x)$, $h(x)$ 를 통해서 함수 $f(x)$ 에 대한 정보를 찾아보자.
함수 $g(x)$ 에서 $x$, $-x$ 가 있고, 함수 $h(x)$ 에서 $x$, $2-x$ 가 있으므로 대칭성을 생각하면서 풀어보자. - [관련 개념] 참조
함수 $f(x)$ 에 대한 정보를 얻기에는
두 함수 $g(x)$ 와 $h(x)$ 에 $\int$ 이 있으므로
두 함수 $g(x)$ 와 $h(x)$ 의 양변을 $x$ 에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$g'(x)=f(x)+f(-x)=2$$
$$h'(x)=f(x)+f(2-x)=4$$

즉, 모든 실수 $x$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

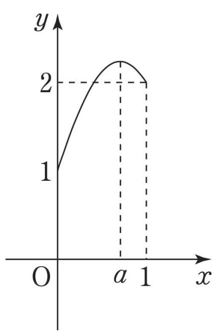
$$f(x)+f(-x)=2$$
$$f(x)+f(2-x)=4$$

를 만족시킨다.
$f(x)+f(-x)=2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 점 $(0,1)$ 을 지나고, 점 $(0,1)$ 에 대하여 점대칭임을 알 수 있다.
같은 방법으로 $f(x)+f(2-x)=4$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 점 $(1,2)$ 를 지나고, 점 $(1,2)$ 에 대하여 점대칭임을 알 수 있다.

⑥ 구간 $[0,1]$ 에서 함수 $f(x)$ 구하기
함수 $f(x)$ 의 그래프가 두 점 $(0,1)$, $(1,2)$ 를 지나고,
구간 $[0,1]$ 에서 $f(x)=a\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)+b\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ 이므로
$x=0$ 을 대입하면, $f(0)=b=1$ 이고,
$x=1$ 을 대입하면, $f(1)=a=2$ 이다.
따라서 $a=2$, $b=1$ 이고,
구간 $[0,1]$ 에서 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ 이다.
함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형을 그리기 위해 증감을 조사해보자.
$0<x<1$ 일 때, $f'(x)=\pi\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ 이고,
$f'(x)=0$ 이 되는 점을 찾아보자.

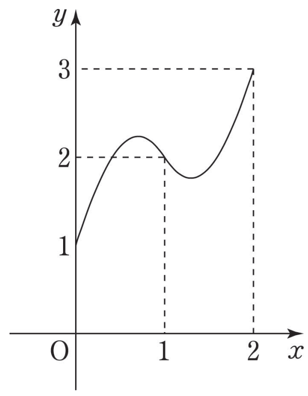
$$f'(x)=\pi\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0$$
$$\pi\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$
$$\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)=2$$

이다. 구간 $[0,1]$ 에서 함수 $\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ 의 그래프를 그리면 함숫값이 2 가 되는 점이 하나이므로 $\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)=2$ 를 만족시키는 $x$ 의 값을 $a$ 라 하자.
함수 $f(x)$ 는 두 점 $(0,1)$, $(1,2)$ 를 지나며, $0<x<a$ 에서 감소하고 $a<x<1$ 에서 증가하므로 구간 $[0,1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.

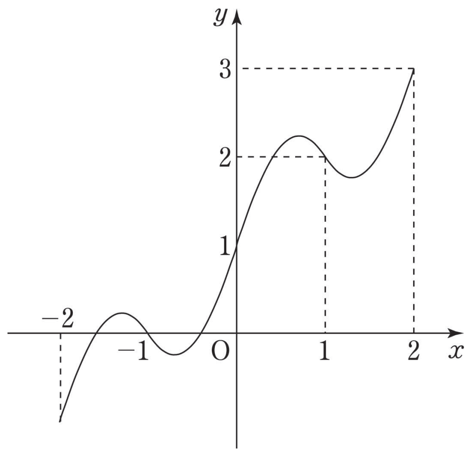



⑦ 함수 $f(x)$ 의 그래프를 알고 있는 구간을 확장하기
* ⑦-(1)에서 직관적인 풀이를, ⑦-(2)에서 수식을 통한 풀이로 두 가지 방식으로 풀이가 적혀있습니다.

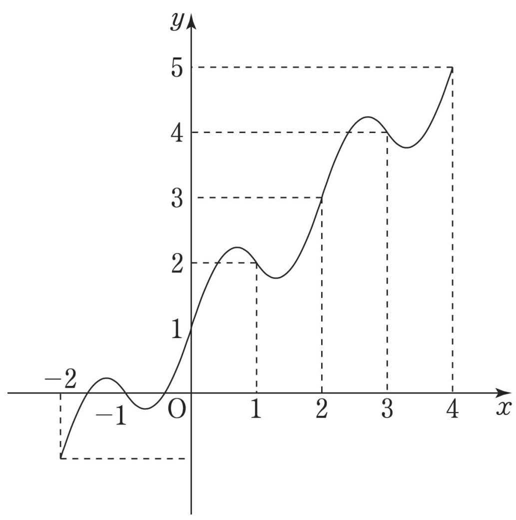
⑦-(1) 기하적 성질을 이용한 풀이
구간 $[0,1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프에 대한 정보를 얻었고,
구해야 하는 값은 $\int_{-1}^{16} f(x)\,dx$ 이므로
구간 $[-1,16]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프를 파악해야한다.
이전의 ⑤에서 얻었던 함수 $f(x)$ 의 그래프에 대한 정보 중 사용하지 않은 점 $(0,1)$ 에 대하여 점대칭과 점 $(1,2)$ 에 대하여 점대칭을 이용해보자.
우선 점 $(1,2)$ 에 대하여 점대칭인 조건을 먼저 사용해보자.
(두 조건 중 무엇을 먼저 쓰던 결과는 똑같이 나온다.)
그러면 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.




그 다음 점 $(0,1)$ 에 대하여 점대칭인 조건을 써보자.

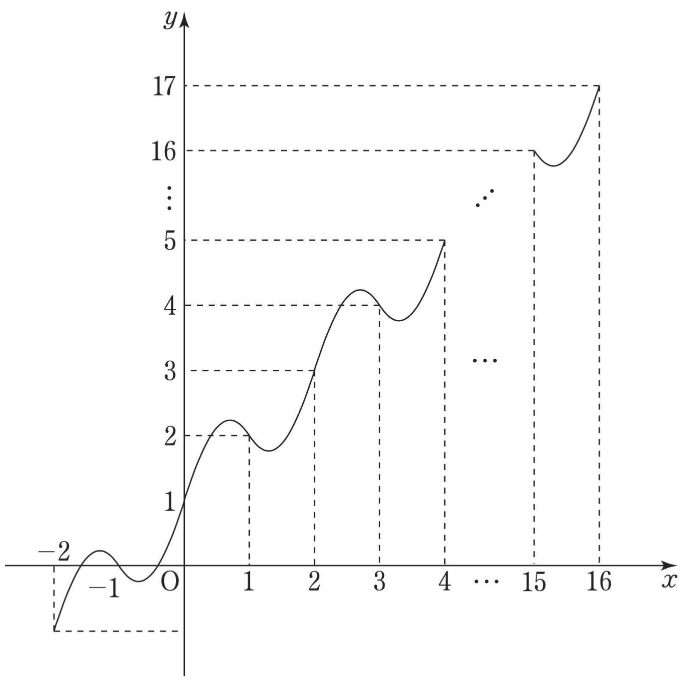



다시 점 $(1,2)$ 에 대하여 점대칭을 사용하면 다음 그림과 같이 계속해서 함수 $f(x)$의 그래프를 알고 있는 구간을 확장해나갈 수 있다.




따라서 구간 $[-1,16]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같은 그림이 된다.


이 해설지에 관한 저작권은 Epsilon에 있습니다.

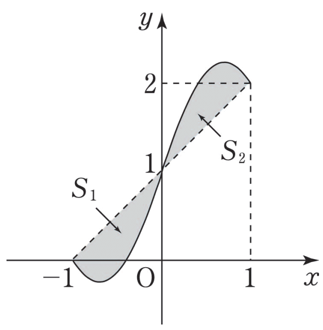



그러면, $x$ 의 값이 2 증가하면, 그래프의 개형이 동일함을 짐작할 수 있다.
실제로 수식을 통해서 확인해보자.
조건 $f(x)+f(-x)=2$ 에서 $x$ 대신 $2-x$ 를 대입하면,
$f(2-x)=2-f(x-2)$ 이므로

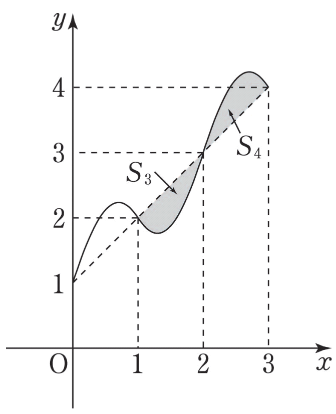
$$f(x)+f(2-x)=4$$

$$f(x)=4-f(2-x)=f(x-2)+2$$

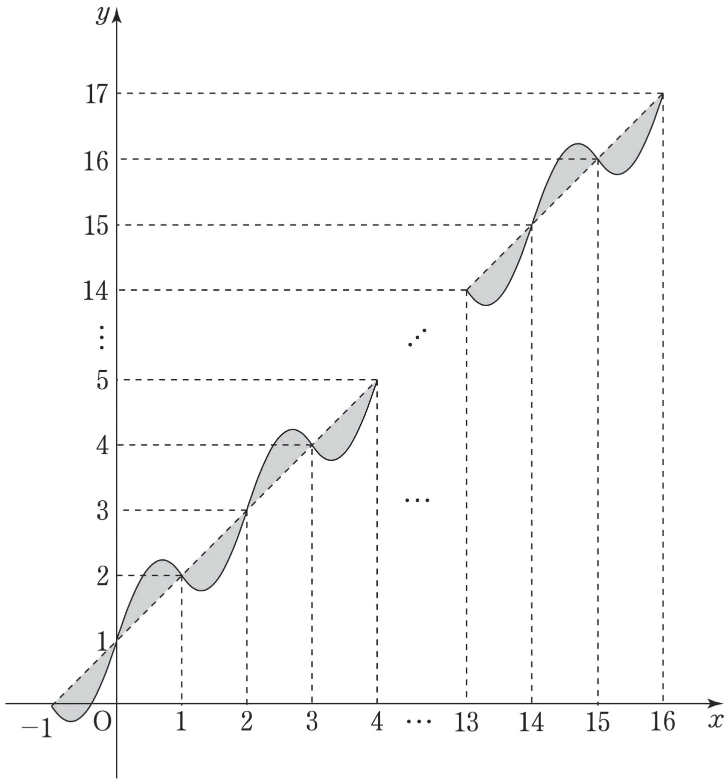
이다.
이제 $\int_{-1}^{16} f(x)\,dx$ 를 구해보자.
조건 $f(x)=f(x-2)+2$ 에서 함수 $f(x)$ 가
$x$ 의 값이 2 씩 증가하면 $f(x)$ 의 값도 2 씩 증가한다는 점에서
기울기가 1 이고, 함수 $f(x)$ 의 그래프의 대칭점인 $(0, 1)$, $(1, 2)$ 를 지나는 직선 $y=x+1$ 과 비교하여 함수 $f(x)$ 의 그래프를 관찰해보자.
우선, 구간 $[-1, 1]$ 에서 관찰해보자.



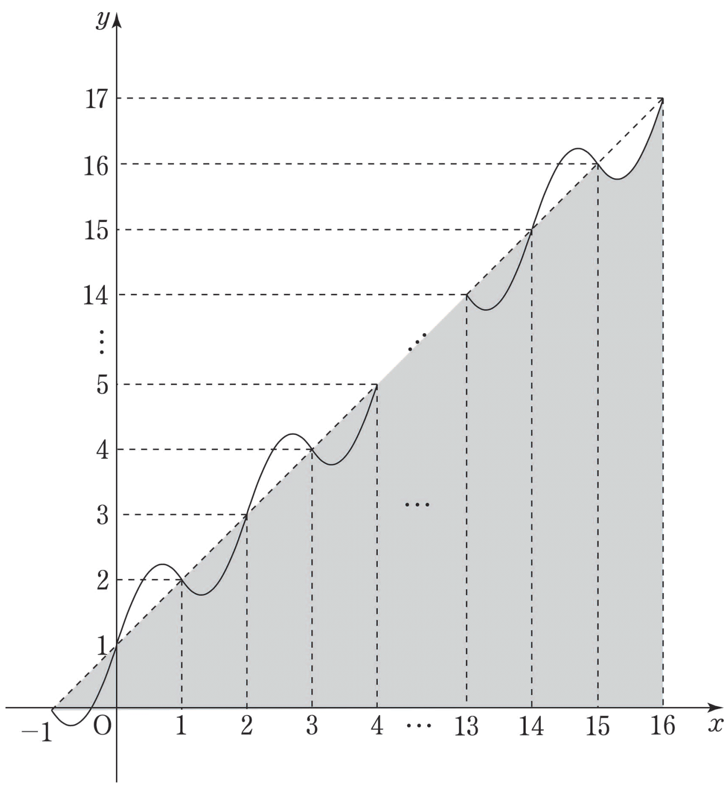

여기서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 $(0, 1)$ 에 점대칭이므로
$S_1$ 의 넓이와 $S_2$ 의 넓이가 동일함을 알 수 있다. − [증명] 참고
따라서 $\int_{-1}^{1}\{f(x)-(x+1)\}\,dx=0$ 이므로
$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(x+1)\,dx$ 이다. 즉, $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ 의 값은 세 점
$(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이와 같다.
구간 $[1, 3]$ 에서 $f(x)=f(x-2)+2$ 이므로 같은 방법으로
다음 그림에서 보듯




$S_3$ 의 넓이와 $S_4$ 의 넓이가 동일함을 알 수 있다.
따라서 구간 $[-1, 16]$ 에서 살펴보면




구간 $[-1, 1]$. $[1, 3]$. $[3, 5]$, ⋯ , $[13, 15]$ 까지 같은 넓이를 가지는 도형의 쌍을 찾을 수 있다.
그리고 구간 $[0, 1]$, $[2, 3]$, ⋯ , $[15, 16]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형이 동일하므로 구간 $[15, 16]$ 에서 도형의 쌍을 찾지 못한 부분은 함수 $f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x+1$ 로 둘러싸인 영역의 넓이로 $S_1$ 의 넓이와 동일함을 알 수 있다.
따라서 $\int_{-1}^{16} f(x)\,dx$ 의 값은 다음 그림과 같이
(직각삼각형의 넓이 − $S_1$ 의 넓이)와 같다.




(직각삼각형의 넓이)$=\frac{1}{2}\times 17\times 17=\frac{289}{2}$

$$S_1=\int_0^1\{f(x)-(x+1)\}\,dx$$

$$=\int_0^1\left\{2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-x-1\right\}dx$$

$$=\left[-\frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\frac{1}{2}t^2-t\right]_0^1=\frac{6}{\pi}-\frac{3}{2}$$


이 해설지에 관한 저작권은 Epsilon에 있습니다.

이므로 $\int_{-1}^{16} f(x)\,dx = \frac{289}{2} - \left(\frac{6}{\pi} - \frac{3}{2}\right) = 146 - \frac{6}{\pi}$ 이고,

따라서 $p = 146$, $q = -6$ 이므로 $p + q = 140$

⑦-(2) 수식을 통한 풀이

조건 $f(x) = f(x-2) + 2$ 을 통해서

$$\int_{x}^{x+2} f(t)\,dt = \int_{x-2}^{x} f(t+2)\,dt = \int_{x-2}^{x} \{f(t)+2\}\,dt$$

$$= \int_{x-2}^{x} f(t)\,dt + \int_{x-2}^{x} 2\,dt = \int_{x-2}^{x} f(t)\,dt + 4$$

이므로

$$\int_{0}^{16} f(t)\,dt = \int_{14}^{16} f(t)\,dt + \int_{12}^{14} f(t)\,dt + \cdots + \int_{0}^{2} f(t)\,dt$$

이다. $F(n) = \int_{2n-2}^{2n} f(t)\,dt$ 로 놓으면 자연수 $n$ 에 대하여

$F(n+1) = F(n) + 4$, $F(1) = \int_{0}^{2} f(t)\,dt$ 이고,

$F(n)$ 은 등차수열로 등차수열의 합인 $\sum_{n=1}^{8} F(n)$ 을 계산하면 된다.

남은 부분인 $\int_{-1}^{0} f(t)\,dt$ 는 $f(x) + f(-x) = 2$ 를 이용하여

$$\int_{0}^{x} \{f(t) + f(-t)\}\,dt = \int_{0}^{x} 2\,dt$$

$$\int_{0}^{x} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(-t)\,dt = 2x$$

$$\int_{0}^{x} f(t)\,dt + \int_{-x}^{0} f(t)\,dt = 2x$$

이고, $x = 1$ 을 대입하면,

$\int_{-1}^{0} f(t)\,dt = 2 - \int_{0}^{1} f(t)\,dt$ 이다.

[증명]

$S_1$ 의 넓이와 $S_2$ 의 넓이가 같다는 뜻은

$\int_{-1}^{1} \{f(t) - (t+1)\}\,dt = 0$ 이라는 뜻이다.

따라서 $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \int_{-1}^{1} (t+1)\,dt$ 임을 증명하면 된다.

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \int_{0}^{1} f(t)\,dt + \int_{-1}^{0} f(t)\,dt = \int_{0}^{1} f(t)\,dt + \int_{0}^{1} f(-t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{1} \{f(t) + f(-t)\}\,dt = \int_{0}^{1} 2\,dt = 2$$

$$\int_{-1}^{1} (t+1)\,dt = 2$$

이므로 $S_1$ 의 넓이와 $S_2$ 의 넓이는 같다.

[관련 개념]

다음은 함수와 관련하여 자주 등장하는 조건들로 조건을 통해 알 수 있는 함수 성질은 다음과 같다.

(1) $f(-x) = f(x)$ 이면 함수 $f(x)$ 는 우함수이다.
 (또는 $y$ 축에 대하여 선대칭이다.)

(2) $f(-x) = -f(x)$ 이면 함수 $f(x)$ 는 기함수이다.
 (또는 원점에 대하여 점대칭이다.)

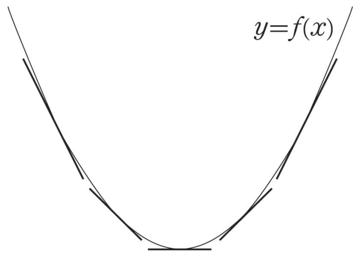
(3) $f(a+x) = f(a-x)$ 또는 $f(x) = f(2a-x)$ 이면
 함수 $f(x)$ 의 그래프는 $x = a$ 에 대해 선대칭인 함수이다.

(4) $f(a+x) + f(a-x) = 2b$ 또는 $f(x) + f(2a-x) = 2b$ 이면
 함수 $f(x)$ 의 그래프는 점$(a, b)$ 에 대하여 점대칭이다.

[보충 설명]

출제자 본인이 함수 $f(x)$ 의 이계도함수 $f''(x)$ 를 바라보는 관점은 함수 $f(x)$ 의 볼록성에 대한 지표가 되어주는 함수이기도 하지만 조금 더 확장하여 도함수 $f'(x)$ 의 도함수로 보는 입장이다. 즉, 도함수 $f'(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 증감을 나타내듯 이계도함수 $f''(x)$ 는 도함수 $f'(x)$ 의 증감을 나타낸다고 보는 입장이다.

도함수 $f'(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 그래프의 한 점에서의 접선의 기울기를 나타내고, $f''(x)$ 가 양의 값을 갖는다는 뜻은 접선의 기울기가 증가한다는 뜻으로 이 의미를 함수 $f(x)$ 의 그래프에서 해석하면 다음 그림과 같이 함수 $f(x)$ 의 그래프가 아래로 볼록하다는 결론이 나온다.




이처럼 볼록성에 대한 관점은 도함수의 도함수로 보는 관점으로도 충분히 설명가능하다. 하지만, 이계도함수를 볼록성에 대한 관점만으로는 문제 접근이 어려울 수 있다. 다음 문항은 2016학년도 6월 모의평가 B형 21번으로, 해당 문항은 이계도함수가 도함수의 도함수라는 관점으로 봐야 문제를 풀 수 있는 문항이었다.

**21.** 2 이상의 자연수 $n$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = e^{x+1}\{x^2 + (n-2)x - n + 3\} + ax$$

가 역함수를 갖도록 하는 실수 $a$ 의 최솟값을 $g(n)$ 이라 하자. $1 \le g(n) \le 8$ 을 만족시키는 모든 $n$ 의 값의 합은? [4점]

① 43 ② 46 ③ 49 ④ 52 ⑤ 55

해당 문항에서 주어진 조건인 '함수 $f(x)$ 가 역함수를 갖도록 한다.'를 만족시키기 위해서는 함수 $f'(x)$ 의 값이 모든 실수 $x$ 에 대하여 $f'(x) \le 0$, $f'(x) \ge 0$ 이다.

함수 $f'(x)$ 는 $x \to \infty$ 이면 $f'(x) \to \infty$ 이므로 함수 $f'(x)$ 의 값이 무조건 양수인 구간이 존재해서 $f'(x) \le 0$ 이 아니라 $f'(x) \ge 0$ 라는 결론을 도출하는 문제였다. 그 이후, 함수 $f'(x)$ 의 최솟값이 0 이상이라는 결론을 통해서 함수 $f''(x)$ 를 구해서 함수 $f'(x)$ 의 그래프를 관찰하여 푸는 문제였다. 즉, 이계도함수를 함수의 그래프의 볼록성으로 본다면,
이 문제에서 이계도함수가 주는 정보를 얻기 힘들었겠지만 도함수의 도함수의 관점으로 이계도함수를 관찰하였다면 풀기 쉬운 문항이었다. 따라서 이계도함수는 단순히 함수의 그래프의 볼록성을 나타내는 것이 아니라 도함수의 그래프를 관찰할 수 있게 도와주는 함수로 볼록성은 이계도함수가 나타내는 수많은 정보 중 하나일 뿐이다.


이 해설지에 관한 저작권은 Epsilon에 있습니다.

[출제자의 말]
이번 2018학년도 6월 모의평가 30번에서 $y$축에 대하여 대칭이면 적분한 함수는 점대칭이 된다는 내용이 출제되었으며, 해당 문항에 대한 이의신청의 결과는 다음과 같다.

2018학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가

| |
|---|
| 수학 영역, 유형(과목) : 가형<br>문제 및 정답 이의신청 관련 답변 자료 |

**【문항별 정답 이의신청 내역과 타당성 심사 결과】**

| 번호 | 이의신청 내역 | 심사 결과 | 설명 탑재 여부 |
|---|---|---|---|
| 30 | **교육과정 위배 이의 신청** | 교육과정 내 문항으로 이상이 없음 | - |

위의 이의신청에 대해 구체적인 내용을 알 수 없지만, 출제자의 입장에서 이의신청의 내용이 선대칭함수를 적분한 결과가 점대칭함수가 된다는 내용이라고 추측된다.
이를 통해 출제자 본인은 이제 평가원이 선대칭, 점대칭 등 다양한 함수의 성질들을 출제할 가능성이 있다고 판단하였고, 해당 문항은 올해 수능완성 문항 중 선대칭 및 점대칭과 적분의 개념이 연결된 문항을 변형하여 출제하였다.

수능완성 1회 19번

**19** ▸ 7050-0380

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_{-x}^{x} f(t)dt$$

라 하자. **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

**보기**

ㄱ. 모든 실수 $x$에 대하여 $g(x)+g(-x)=0$이다.
ㄴ. 함수 $y=f(-x)-2$의 그래프가 원점에 대하여 대칭일 때, $g(2)=8$이다.
ㄷ. $g(x)=2x$이고, $\sum_{n=1}^{10} f(-n)=8$일 때, $f(0)+\sum_{n=1}^{10} f(n)=13$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

또한, 출제자 본인은 앞으로 평가원이 다양한 함수의 성질들을 출제할 가능성이 있다고 판단하여 [관련 개념]을 통해서 함수의 성질에 관한 다양한 조건들을 추가 설명하였다.


이 해설지에 관한 저작권은 Epsilon에 있습니다.