

제 2 교시

수리 영역(나형)

제 3회

1. $(2^{\log_{\sqrt{2}}6} \times 3^{\log_{\sqrt{3}}6})^{\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{36}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ 1 ④ 6 ⑤ 36

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ 에 대하여 AB 의 모든 성분의 합을 a , BA 의 모든 성분의 합을 b 라 하자. $a+b$ 의 값은? [2점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

3. 다항함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 을 만족할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} nf(-\frac{3}{n})$ 의 값은? [2점]

- ① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

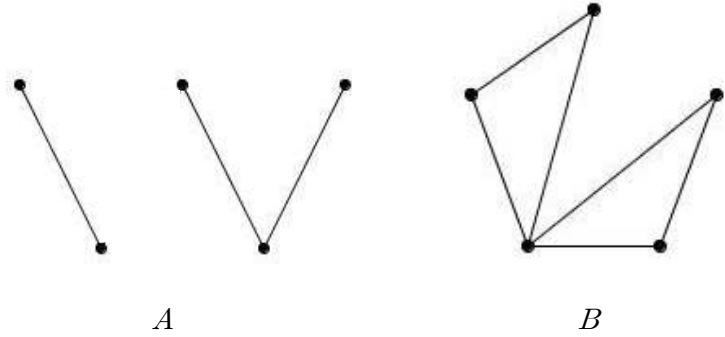
4. 방정식 $6^{2x+1} - 6^{x+2} + 6^{x+1} + 36 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta$ 의 값은? [3점]

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

5. 삼차함수 $f(x) = ax^3 - ax + 1$ 와 이차함수 $g(x) = ax^2 + 4ax + 7$ 가 있다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선이 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(-a, g(-a))$ 에서 $y = g(x)$ 와 접할 때, a 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. 다음 그림과 같이 서로 다른 두 그래프 A , B 가 있다. A 와 B 를 같은 그래프로 만들기 위해 A 에 변을 3개 추가할 때, 변을 추가하는 방법의 수는? [3점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. 미분 가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족한다.

- (가) 열린 구간 $(0, 8)$ 에서 $f(x) > 0, f'(x) > 0$
 (나) $f(4) = 3, f(6) = 5$
 (다) $\int_0^4 f(x)dx = 8, \int_6^8 f(x)dx = 16$

$\int_0^8 f(x)dx = k$ 라 할 때, k 의 범위는 $a < k < b$ 이다. $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① 52 ② 56 ③ 60 ④ 64 ⑤ 68

8. 지진의 상대적 크기를 나타내는 리히터 규모 척도 (Richter Magnitude Scale)는 지진파의 최대진폭 X 와 진앙(지진이 시작된 위치)으로부터의 거리 Y 에 따라 다음과 같이 계산한다.

$$\text{규모 } M = \log\left(\frac{X}{A}\right)^{\frac{2}{3}} - \log BY$$

(A, B 는 상수)

2011년 3월 일본 동북 지방에서 발생한 지진은 발생 당시 규모 8.8로 측정되었으나, 재측정 결과 정확한 규모는 규모 9.0임이 밝혀졌다. 발생 당시 규모 측정에 사용한 최대 진폭 값을 X_a , 재측정 시 사용한 최대 진폭 값을 X_b 라 할 때, $\frac{X_b}{X_a}$ 의 값은? (단, 두 번의 측정에서 사용한 진앙으로부터의 거리 값은 같았다.) [3점]

- ① $10^{-\frac{2}{5}}$ ② $10^{\frac{2}{5}}$ ③ $10^{-\frac{3}{10}}$ ④ $10^{\frac{3}{10}}$ ⑤ $10^{-\frac{1}{2}}$

9. 혁재는 초콜릿 11상자와 새우 맛 과자 15상자를 네 개의 바구니 A, B, C, D 에 나누어 담으려고 한다. 각 바구니에는 초콜릿과 새우 맛 과자가 각각 적어도 두 상자 이상씩 담기도록 할 때, 바구니에 물품을 나눠 담는 방법의 가짓수는? (단, 같은 종류의 물품은 서로 구별되지 않는다.) [3점]

- ① 1200 ② 2400 ③ 3600 ④ 4800 ⑤ 6000

10. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$, $(a_n)^2 = \frac{3}{a_{n+1}}$ 을 만족할 때,

$a_n = 3^{b_n}$ 이라 하자. $\sum_{k=1}^{10} \frac{3}{b_{k+1} - b_k}$ 의 값은? [4점]

- ① $1 - \frac{1}{2^9}$ ② $1 - \frac{1}{2^{10}}$ ③ $2 - \frac{1}{2^9}$ ④ $2 - \frac{1}{2^{10}}$ ⑤ $2 - \frac{1}{2^{11}}$

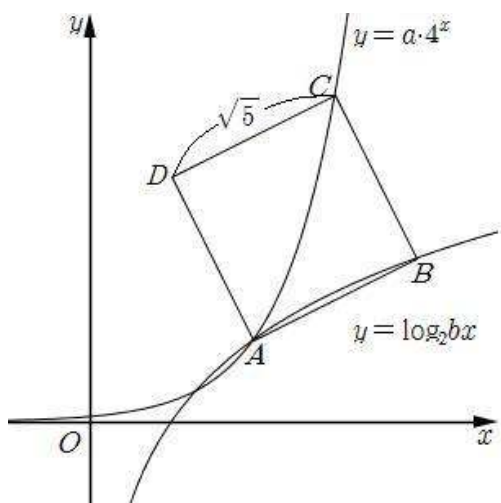
11. 사차함수 $f(x) = (x^2 - 4)^2$ 이 있다. y 축 위의 점 $(0, t)$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 에 그을 수 있는 접선의 개수를 $g(t)$ 라 할 때, 다음 중 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

—〈보 기〉—

- ㄱ. $g(1) = 2$
 ㄴ. 함수 $g(t)$ 의 불연속점은 2개이다.
 ㄷ. 함수 $(g \circ f)(t)$ 의 불연속점은 7개이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 정사각형 $ABCD$ 가 좌표평면 위에 놓여 있다. 곡선 $y=a4^x$ 가 점 A 와 점 C 를 지나고, 곡선 $y=\log_2 bx$ 가 점 A 와 점 B 를 지난다. 점 D 와 점 C 를 지나는 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 일 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은? [4점]



- ① 8 ② 12 ③ 16 ④ 20 ⑤ 24

13. 좌표평면 위에서 $y=\log_5 x - [\log_5 x]$ 의 그래프와 $y=\frac{1}{2}$ 의 그래프의 교점을 x 좌표가 작은 순서대로 $P_n(x_n, y_n)$ 이라 하자.

$x_1 > 1$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6\sqrt{5}}{x_n y_n}$ 의 값은? [3점]

- ① 5 ② 15 ③ 35 ④ 55 ⑤ 75

14. 1부터 12까지의 수가 적힌 커다란 원판이 있다. 상진, 노익, 동훈 세 학생은 이 원판을 돌린 후 원판이 멈추었을 때 화살표가 가리키는 수를 이용해 게임을 하기로 했다. 규칙은 다음과 같다.

원판을 돌렸을 때, 화살표가 가리키는 수가
 1, 4, 7, 10이면 상진의 승리
 2, 5, 8, 11이면 노익의 승리
 3, 6, 9, 12면 동훈의 승리

원판을 돌려 소수가 나왔을 때, 노익이가 승리했을 확률은? [3점]

- ① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

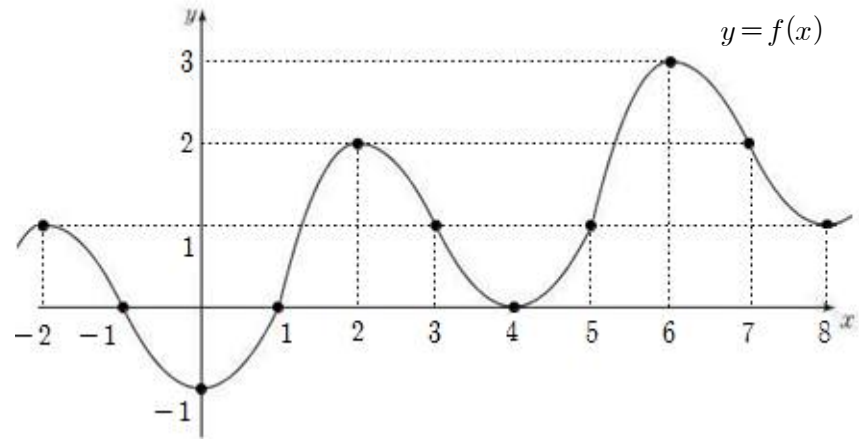
15. 이차정사각행렬 A, B, C 가 $A^{-1}B^{-1} = CA$ 를 만족할 때, 다음 중 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

- ㄱ. C 의 역행렬이 존재한다.
 ㄴ. $BAC = CBA$
 ㄷ. $C(ABC)^n = (BAC)^nC$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 수열 $\{a_n\}$ 의 제 1항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하고, 수열 $\{S_n\}$ 의 제 1항부터 제 n 항까지의 합을 T_n 이라 하자. $T_n = f(n)$ 일 때, 다음은 $y = f(x)$ 의 그래프이다.

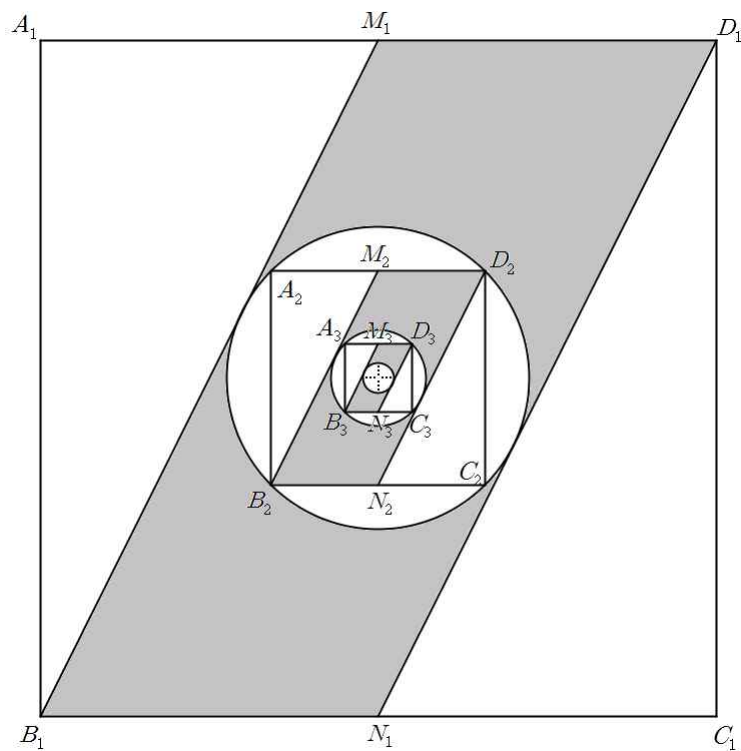


$f(x) + 1 = f(x+4)$ 이 항상 성립할 때, $a_1 + a_{2013}$ 의 값은? [4점]

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

17. 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 에서 $\overline{A_1D_1}$ 의 중점을 M_1 , $\overline{B_1C_1}$ 의 중점을 N_1 이라 할 때, 평행사변형 $B_1N_1D_1M_1$ 의 내부가 나타내는 영역에서 중심이 G 이고 $\overline{B_1M_1}$ 과 $\overline{D_1N_1}$ 에 동시에 접하는 원 C_1 의 내부가 나타내는 영역을 제외한 부분의 넓이를 S_1 이라 하자.

원 C_{n-1} 에 내접하는 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$ 에서 $\overline{A_nD_n}$ 의 중점을 M_n , $\overline{B_nC_n}$ 의 중점을 N_n 이라 할 때, 평행사변형 $B_nN_nD_nM_n$ 의 내부가 나타내는 영역에서 중심이 G 이고 $\overline{B_nM_n}$ 과 $\overline{D_nN_n}$ 에 동시에 접하는 원 C_n 의 내부가 나타내는 영역을 제외한 부분의 넓이를 S_n 이라 하자. 이때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? (단, G 는 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 의 두 대각선의 교점이고, $A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ 은 $\overline{A_1G}$ 위에 있다.) [4점]



- ① $\frac{2}{9}(10-\pi)$ ② $\frac{4}{9}(10-\pi)$ ③ $\frac{2}{9}(15-\pi)$
 ④ $\frac{4}{9}(15-\pi)$ ⑤ $\frac{2}{9}(20-\pi)$

18. 다음은 수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1 = 1, \quad na_{n+1} + \sum_{k=1}^n (2k+1)a_k = 0 \quad \text{을 만족시킬 때,}$$

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \cdot (-1)^{n-1} \quad (n \geq 1) \quad \dots \bullet$$

임을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n=1$ 일 때, $a_1=1$ 이고,

$$1 \cdot a_2 + \sum_{k=1}^1 (2k+1)a_k = a_2 + 3a_1 = a_2 + 3 = 0$$

이므로 $a_2 = -3$ 이다.

●에서 $n=2$ 일 때 $a_2 = -3$ 이다.

따라서 주어진 식이 성립한다.

(2) $n=i$ ($i \geq 2$)일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하고 $n=i+1$ 일 때 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned} 0 &= ia_{i+1} + \sum_{k=1}^i (2k+1)a_k \\ &= ia_{i+1} + \sum_{k=1}^{i-1} (2k+1)a_k + (2i+1)a_i \\ &= ia_{i+1} + (\boxed{\text{가}}) \times a_i + (2i+1)a_i \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} a_{i+1} &= \boxed{\text{나}} \times a_i \\ &= \frac{(i+1)(i+2)}{2} \cdot (-1)^i \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 모든 자연수 n 에 대하여

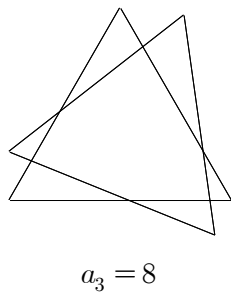
$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \cdot (-1)^{n-1} \text{이다.}$$

위의 (가)에 들어갈 식을 $f(i)$, (나)에 들어갈 식을 $g(i)$ 라 할 때, $f(9)g(8)$ 의 값은?

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

24. 이차정사각행렬 A 가 $A^3 + A^4 = -A - E$ 를 만족한다. A 의 모든 성분의 합이 18일 때, $A^7 + A^6$ 의 모든 성분의 합을 구하시오. [3점]

25. 변의 길이가 서로 같은 두 정 n 각형을 적당히 겹쳐 평면을 분할할 때, 분할된 영역의 최대 개수를 a_n 이라 하자. 예를 들어, 그림과 같이 $a_3 = 8$ 이다. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ 의 값을 구하시오. [3점]



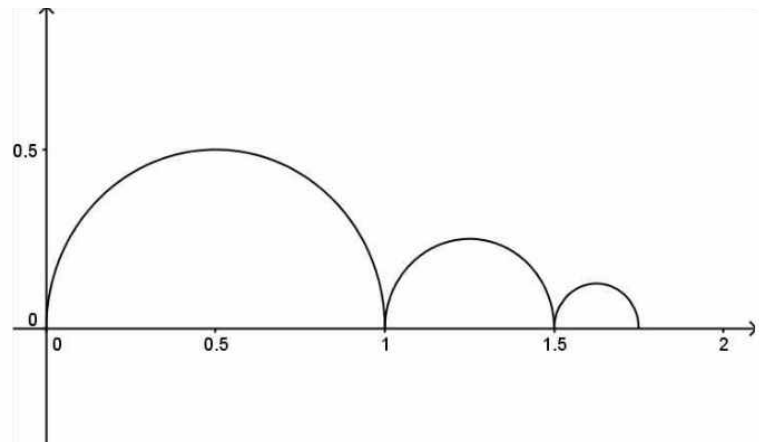
26. 확률변수 X 의 분포곡선 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 2$)의 일부분은

다음과 같이 중심의 x 좌표가 $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{13}{8}$, y 좌표가 0,

반지름이 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ 인 세 반원으로 이루어져 있다.

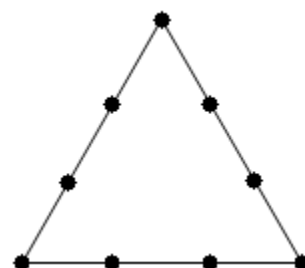
$P(1.75 \leq X \leq 2) = k - \frac{q}{p}\pi$ 일 때, $k + p + q$ 의 값을 구하시오.

(단, k 는 자연수, p, q 는 서로소인 자연수) [3점]

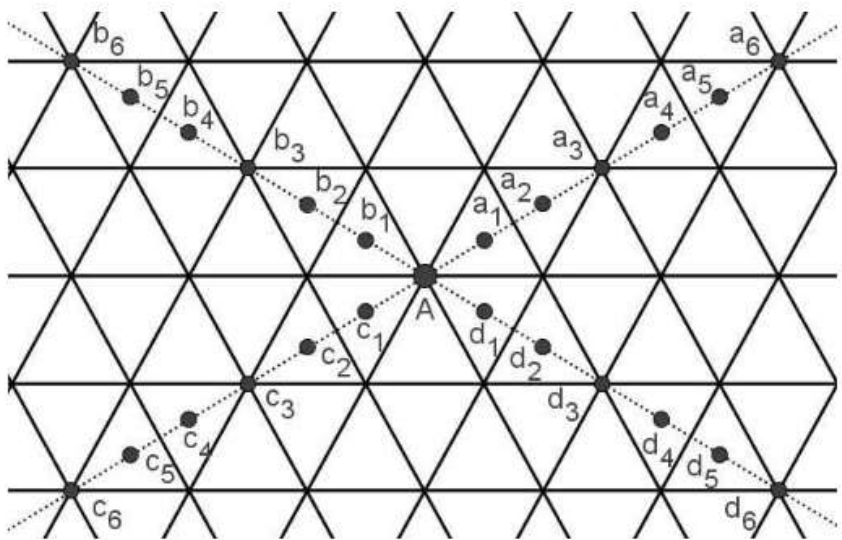


27. 좌표평면 위에 중심이 $(3 - \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2})$ 이고 반지름이 $2 - \sqrt{2}$ 인 원이 있다. 로그함수 $f(x) = \log_a x$ ($a > 1$)에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 와 이 원의 교점을 A, B 라 하고, 곡선 $y = f^{-1}(x)$ 와 이 원의 교점을 B, C 라 하자. $\widehat{AB} = \widehat{BC}$ 이고, $\widehat{AC} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \pi$ 일 때, 점 B 와 현 $\overline{AC}$ 사이의 거리를 구하시오. (단, f^{-1} 은 f 의 역함수이다.) [4점]

28. 그림과 같이 정삼각형의 꼭짓점과 각 변의 삼등분점에 점을 찍었다. 9개의 점 중 4개를 선택했을 때, 4개의 점이 모두 한 직각삼각형 위에 놓일 확률을 $\frac{q}{p}$ 라 하자. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, '한 직각삼각형'이란 세 꼭짓점이 그림의 9개의 점 중 3개와 일치하는 도형이고, p, q 는 서로소인 자연수이다) [4점]



29. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형들로 좌표 평면을 가득 메웠다. 정삼각형 6개가 만나는 점 중 하나를 원점 $A(0,0)$ 로 정한다. 직선 $l_1: \frac{\sqrt{3}}{2}x - y = 0$ 과 $l_2: \frac{\sqrt{3}}{2}x + y = 0$ 가 지나는 삼각형들의 무게중심, 혹은 정삼각형의 꼭짓점들을 각 사분면마다 원점과 가까운 순서대로 a_n, b_n, c_n, d_n 이라 하자. 이 때, 직사각형 $a_n b_n c_n d_n$ 과 공유 면적을 갖는 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 개수를 e_n 이라 하자. 예를 들어, $e_1 = 6$, $e_2 = 10$, $e_3 = 14$ 이다. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{3n+1} - e_{3n}}{e_{3n} - e_{3n-1}} = E$ 일 때, $10E$ 의 값을 구하시오. [4점]



30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g_t(x)$ 가 다음과 같이 정의된다.

$$g_t(x) = \begin{cases} f(2t-x) & (x < t) \\ f(x) & (x \geq t) \end{cases}$$

집합 S 를

$$S = \{a \mid \text{함수 } |g_t(x)| \text{ 가 } x=a \text{에서 미분 가능하지 않다}\}$$

라 할 때, 집합 S 의 원소의 개수를 $h(t)$ 라 하자. $h(t)$ 가 다음을 만족할 때, $f(5)$ 의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\lim_{t \rightarrow a} h(t) \neq h(a)$ 인 a 는 오직 1, 4 뿐이다.

(나) $\lim_{t \rightarrow b+0} h(t) \neq \lim_{t \rightarrow b-0} h(t)$ 인 b 는 오직 0 뿐이다.

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.