# <미분에 대하여>

## 김기대 지음

**약력)**

고려대학교 수학과
2018 기대모의고사 Vol.1, Vol.2 저자
오르비 클래스
9월 평가원 해설강의 (시험 당일 오후 업로드 예정, 무료)
기대모의고사 Vol.1, Vol.2 해설강의 (9월 초 런칭)

**주의사항)**

1. 본 PDF 자료는 반드시 원형 그대로 사용하세요.
   일부분 발췌, 꼬리말 삭제 등을 금지합니다.

2. 미분에 대한 기초개념을 간단히 언급한 후, 개념의 적용과 적용시킬 때의 주의점을 다룬 칼럼입니다.
쉬운 문제들은 엄밀하지 않은 풀이로 풀어도 정답이 나오는 경우가 있습니다.
정확히 말하면, 잘못된 풀이로 풀어도 정답이 나오는 경우죠.
하지만 어려운 문제에서 이러한 엄밀하지 않은 풀이로 풀 경우 틀리는 경우가 있습니다.

본 칼럼에 있는 기출문제와 자작문제들로 이를 확인해보고, 교정해보세요.

3. 문과생들은 8Page 왼쪽 까지만 읽고 이과생들은 모두 읽어보세요.

# 1. 연속

**$x=a$에서 함수 $f(x)$가 연속이기 위한 조건**

조건 1) $f(a)$가 존재

조건 2) $\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x)$ (즉, $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재)

조건 3) $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$

<개념확인문제>

[1번 문제]

연속함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x) = \begin{cases} f(x) & (x<1) \\ x^2 - x & (x \ge 1) \end{cases}$ 가

$x=1$에서 연속일 때, $f(1)$의 값은?

[2번 문제]

함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x) = \begin{cases} f(x) & (x<1) \\ x^2 - x & (x \ge 1) \end{cases}$ 가

$x=1$에서 연속일 때, $f(1)$의 값은?

(정답 공개)

1번 문제의 정답은 $f(1)=0$으로 존재하지만

2번 문제의 정답은 존재하지 않는다.

이런 문제가 나왔을 때 단순히 위, 아래 함수에 $x=1$을 넣고 두 값이 같다! 라고 푼 학생들은 적잖게 당황할 수 있다.

**1번, 2번 문제 해설**

두 문제에서 공통적으로 알 수 있는 사실은
$\lim_{x\to 1-} f(x) = 0 \left(\because \lim_{x\to 1+} (x^2 - x) = 0\right)$이다.

1번 문제에서는 $f(x)$가 연속함수이므로 $\lim_{x\to 1-} f(x) = f(1)$이 보장되기 때문에 $f(1)=0$이지만
2번 문제에서는 $f(x)$가 그냥 함수이기 때문에
$\lim_{x\to 1-} f(x) = f(1)$가 보장되지 않는다.

수능은 서술형이 아닌 오지선다형 이므로 2번 문제 같이 내긴 힘들지만, ㄱㄴㄷ문제에서의 틀린 보기로 충분히 출제할 수 있다.

100%의 확신을 취할 것인가, 5%의 불안함을 취할 것인가는 본인의 선택에 달렸다.

## <특강 1> 사이값 정리

**사이값 정리에 대한 교과서 정의**

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 실수 $k$에 대하여 $f(c)=k$를 만족하는 $c$가 $a$와 $b$ 사이에 적어도 하나 존재한다.

본 정리는 ㄱㄴㄷ 합답형문제에 있는
「$f(c)=0$을 만족시키는 $c$가 적어도 하나 존재한다.」
와 같은 보기에 많이 사용된다.

하지만, 이 정리의 역은 항상 성립하지는 않는다는 사실에 주의해줘야 한다.

예를 들어
구간 $[0, 1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가 $f(0)f(1) \neq 0$일 때
$f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값이 0이기 위해선 사이값정리에 의하여
$f(0)$과 $f(1)$의 부호가 달라야 하지만,

역으로 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$이라고 해서 $f(0)$과 $f(1)$의 부호가 다를 필요는 없다. (ex. $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$)

또한, $f(0)f(1) > 0$이라고 해서 $f(c)=0$인 $c$가 구간 $[0, 1]$에 없다고 단정하지도 못한다.
(ex. $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{8}$)

분명 '쿠쿸... 어떤 닝겐이 이런걸 착각해서 틀리죠?' 하는 학생들이 분명 있을 것이다.

사이값 정리에 대한 역 명제만 물어본다면
역이 성립하진 않는다는 것을 잘 대답할 수 있지만
호흡이 긴 킬러문제를 풀 때에는 자주 할 수 있는 실수이니 다시 한 번 리마인드 하고 넘어가자.

## 2. 미분가능성

**미분가능에 대한 교과서 정의**

'$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}$의 극한값이 존재할 때,
이 극한값을 $f'(a)$라 정의하고,
함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.'

$y=f(x)$를 미분한 후 $x=a$를 넣었을 때 함수의 정의에 의해 함숫값이 잘 정의되면 $f'(a)$가 존재한다고 하면 안된다.

항상 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}$의 극한값이 존재하는지,
좌극한값과 우극한값이 같은지 확인해줘야 한다.
($\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}$ 도 결국 극한임을 명심하자.)

또한, $x=a$에서 미분가능하면 $x=a$에서 연속임이 잘 알려져 있다.

**[미분가능성에 대한 대표 예제] 문/이과 공통**

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ x^2 & (x \ge 1) \end{cases}$
가 미분가능한 함수일 때, $f'(1)+f(1)$의 값은? [3점]

다음 문제를 못 푸는 학생들은 거의 없을 것이다.
그렇다면, 이 문제는 어떨까?

**[자작 문제] 문/이과 공통**

모든 실수 $x$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여
함수 $g(x)=\begin{cases} x^3+x & (x \le 0) \\ f(x) & (x>0) \end{cases}$ 가 모든 실수 $x$에서
미분가능할 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(0)=0$
ㄴ. $\lim_{x \to 0+} f'(x)=1$
ㄷ. $f(x)$가 미분가능한 함수이면 $f'(0)=1$이다.

이 문제의 정답은 다음 줄에서 공개한다.

'고연전은 고대가 압승.' 의 <u>초성 자음</u>만 옳은 보기.

엥! 정답이 이상하다고? 오타인 것 같다고?

정답의 근거는 3. **도함수**에서 밝혀진다!

## 3. 미분가능성과 도함수

대표예제만 맞추고, 자작문제는 틀린 학생들이 대다수 일텐데, 그 이유를 짐작 해보면
여태 평가원에서는 학생들이 <u>잘못</u> 알고 있는 방법으로도 정답이 나오는 문제들만 나왔기 때문이 아닐까 싶다.

**[미분가능성에 대한 대표 예제]**를 풀 때,
각 구간의 도함수 $f'(x)$와 $2x$에 각각 $x=0$을 넣은 후 두 값이 같다고 하는 것이 대표적인 잘못된 풀이다.
(정답은 나왔을 것이다. 대표예제에 한해서.)

위 풀이의 각 과정에서 아무런 논리 없이 풀이전개를 했다면 **[자작문제]**는 틀릴 수 밖에 없다.

**[자작문제]**의 해설을 봐보자.

**[자작문제] 해설**

ㄱ.
$g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로, 연속이 보장된다.
따라서 $g(0)=\lim_{x \to 0+} g(x)=\lim_{x \to 0-} g(x)$ 인데
$\lim_{x \to 0+} g(x)=\lim_{x \to 0+} f(x)$, $g(0)=0$, $\lim_{x \to 0-} g(x)=\lim_{x \to 0-} (x^3-x)=0$
이므로 $\lim_{x \to 0+} f(x)=0$.

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 $f(0)=\lim_{x \to 0+} f(x)=\lim_{x \to 0-} f(x)$
가 보장된다.
따라서 $f(0)=\lim_{x \to 0+} f(x)=0$임을 알 수 있다. (참)

ㄴ.
$g(x)$가 $x=0$에서 미분가능해야 하므로 2. **미분가능성** 에서 보았듯이 $g'(0)=\lim_{x \to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x}$의 극한값이 존재해야한다.

즉, 이 극한의 좌극한값과 우극한값이 같아야 한다.

$\lim_{x \to 0-} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{x^3+x}{x} = 1$ 이고 $\lim_{x \to 0+} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x}$ 이므로, $\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x} = 1$.

따라서 우리는 $\lim_{x \to 0+} f'(x) = 1$를 알 수 있는 것이 아니고, $\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x} = 1$를 알 수 있는 것이다. 따라서 ㄴ.은 (거짓)

ㄷ.

$f(x)$가 미분가능한 함수라면, $x=0$에서 미분가능하므로 $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$의 값이 존재해야 한다.

ㄴ.에서 $\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x} = 1$임을 알 수 있으므로

$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$이다. 따라서 (참) **(해설 끝)**

**(추가)**

만약 $f(x)$가 미분가능한 함수라는 조건이 있었을 때, ㄴ. 보기에 있던 $\lim_{x \to 0+} f'(x) = 1$은 과연 참이 될까?

**여전히 아니다.**

$f(x)$가 미분가능하다는 조건이 $f(x)$가 연속이라는 보장은 해주지만, 도함수 $f'(x)$가 연속이라는 보장은 해줄 수 없으므로 $f'(0) = \lim_{x \to 0+} f'(x)$의 논리를 펼칠 수 없다.

**(이과에 한하여 추가)**

그렇다면, $f(x)$가 이계도함수가 존재한다는 조건이 있을 때는?

$f'(x)$는 미분가능한 함수이므로, $f'(x)$는 연속함수이다. 이럴 때는 $f'(0) = \lim_{x \to 0+} f'(x)$의 논리를 펼칠 수 있으므로 $\lim_{x \to 0+} f'(x) = 1$이다. (즉, $f'(x)$의 연속성이 보장되었을 때만)

**(주의)**

(가)형이라면 필수적으로, (나)형이라면 선택적으로 공부하자.
지금 다루고 있는 주제는 문과 교과과정 내에 포함되지만 (나)형에서 <u>나올 가능성은 매우 희박한 주제다.</u>

### 마무리

함수 $h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \ge a) \\ g(x) & (x < a) \end{cases}$가 $x=a$에서 미분가능하기 위한 조건은

$i)$ 두 함수 $f(x), g(x)$가 $x=a$에서 미분가능한 함수라면

$$f'(a) = h'(a) = g'(a)$$

$ii)$ 함수 $f(x)$만 $x=a$에서 미분가능한 함수라면

$$f'(a) = h'(a) = \lim_{h \to 0-} \frac{g(a+h)-h(a)}{h}$$

$iii)$ 함수 $g(x)$만 $x=a$에서 미분가능한 함수라면

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = h'(a) = g'(a)$$

$iv)$ 두 함수 $f(x), g(x)$ 모두 $x=a$에서 미분 불가능한 함수라면

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = h'(a) = \lim_{h \to 0-} \frac{g(a+h)-h(a)}{h}$$

(참고로, $ii), iv)$에 있는 $g(a+h)-h(a)$의 $h(a)$는 오타가 아니다.)

**[확인문제]**

실수 전체 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능 할 때, 항상 옳은 것만을 모두 고르시오.

$i)$ $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$의 값이 존재한다.
$ii)$ $\lim_{x \to a} f(x)$의 값이 존재한다.
$iii)$ $\lim_{x \to a} f'(x)$의 값이 존재한다.
$iv)$ $f(a)$가 존재한다.
$v)$ $f'(a)$가 존재한다.

정답 : $i), ii), iv), v)$

자. 이제 무엇이 문제점인지 알겠다면
아래 문제를 '제대로, 각 잡고' 풀어보자.

<2011 수능 기출문제의 일부 - 이과 전용>

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=1,\ f'(0)=1$이고 구간 $(0,1)$에서 $f''(x)=e^x$일 때, 구간 $(0,1)$에서의 함수 $f(x)$를 구하면?

**잘못된 풀이)**

(나)를 적분하면 $f'(x)=e^x+a,\ f(x)=e^x+ax+b$이다. 이 두 식에 $x=0$을 넣으면, (가)에 의하여 $a=b=0$임을 알 수 있다. 따라서 $f(x)=e^x$ $(0<x<1)$

**잘못된 이유** : 구간 (0, 1)에는 $x=0$이 포함되지 않음에도 불구하고 자기 맘대로 $x=0$을 우겨넣은 것은 잘못된 풀이다. (정답은 맞았겠지만.)

**제대로된 풀이)**

(나)를 적분하면 $f'(x)=e^x+a,\ f(x)=e^x+ax+b$이다. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$이므로 연속성이 보장된다. 따라서 $f(0)=\lim_{x\to 0+}f(x)$여야 하고, 이로부터 $b=0$임을 알 수 있다.

$f'(0)$를 사용할 때도 이와 같은 방법으로 $f'(0)=\lim_{x\to 0+}f'(x)$라고 할 수 있을까?

**아니다.** $f'(x)$가 $x=0$에서의 연속성이 보장되지 않았기 때문에 그러지 못한다.

**참고)**

구간 $(0,1)$에서 $f''(x)$가 존재하니까 $f(x),\ f'(x)$의 연속성과 미분가능성이 보장된 것 아니냐고 반문할 수 있다.
하지만 이 구간에는 $x=0$이 없으므로, $x=0$에서 $f''(x)$가 존재하는 것은 아니다.
따라서 $x=0$ 에서의 $f'(x)$의 연속성을 보장할 수 없다.

**제대로된 풀이 이어서)**

따라서 $f'(0)=1$을 활용하기 위해선, 미분계수의 정의에서 시작되어야 한다.

$f'(0)$의 값이 1로 존재한다.

$\Rightarrow\ \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$의 값이 1로 존재한다.

$\Rightarrow$ 우극한인 $\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-1}{h}$의 값도 1이다.

$\Rightarrow\ \lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-1}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{(e^h+ah)-1}{h}$의 값이 1이다.

$\Rightarrow \lim_{h\to 0+}\frac{(e^h-1)}{h}+\lim_{h\to 0+}\frac{ah}{h}=1+a$가 1이다.

$\Rightarrow\ a=0$이다.

따라서 $a=0,\ b=0$이므로 구간 $(0,1)$에서 $f(x)=e^x$이다.

## <특강 2> - 증가와 감소 (feat. 역함수)

**증가와 감소에 대한 교과서 정의**

어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2\ (x_1<x_2)$에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)$이면 그 구간에서 증가, $f(x_1)>f(x_2)$이면 그 구간에서 감소한다고 한다.

원래 정의는 위와 같지만, 대부분의 문제에선 $f(x)$가 미분가능한 함수라는 조건이 있기 때문에 $f'(x)$를 이용하여 증가, 감소를 따지는 편이다.

그럼
미분가능한 함수 $f(x)$가 증가함수이기 위한 필요충분조건이 $f'(x)>0$일까 $f'(x)\geq 0$일까?

정답은 (다음 페이지에)

이 두 개 중에 없다.(!?)
정확한 정답은
$f'(x) \ge 0$ (단, $f'(x)=0$의 해는 셀 수 있다.) 이다.

뒤의 조건 '단, $f'(x)=0$의 해는 셀 수 있다.'는
$y=f(x)$의 그래프의 일부에 상수함수가 포함되는 경우를 방지하기 위해 있는 조건인데,
이유는 상수함수인 구간의 임의의 두 실수 $x_1$, $x_2$에 대해서 함숫값 $f(x_1)=f(x_2)$이므로 증가의 정의에 모순되기 때문이다.

그러면 왜 '셀 수 있다.'일까? '유한개이다.' 하면 안되는걸까? 증가함수인 $f(x)=\sin x+x$를 생각해보면,
$f'(x)=\cos x+1$이 되고, $f'(x)=0$의 실근은 $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$
($n$은 정수)로 무수히 많기 때문이다

**(참고)** 대학 수학까지 끌어오면 $f'(x)=0$의 해가 셀 수 있는(countable) 경우에도 여전히 찝찝한 구석이 있지만 (칸토어 set 으로 반례 잡을 수 있다.),
**고등학교에서는 아래과 같이 정리하면 충분하다.**

*마무리*

고등학교 수준에서 편하게 받아들일 수 있게 정리하면
- $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 증가함수이다. (역은 성립 X)
- $f'(x) \ge 0$이고 $f(x)$의 그래프에 상수함수가 포함돼있지 않으면 $f(x)$는 증가함수이다. (역도 성립)

역함수가 존재하기 위해선 결국 원함수가 증가함수이거나 감소함수여야 하므로 같은 기준을 적용시킬 수 있다.

**(문과에게 희소식♡)**
문과는 상수함수가 아닌 다항함수만 나온 문제가 자주 나오므로 이렇게 어렵게 생각할 필요 없이 증가함수라면 $f'(x) \ge 0$만 생각해주면 된다.
**(참고)** $n$차 방정식 $f(x)=k$의 근은 $n$개 이하라서 다항함수 내에 상수함수부분이 있을 수 없다.

**(친애하는 이과에게....ㅠㅜ)**

이과는... $f'(x)=0$에 대한 경계를 늦춰선 안된다.
항상 $f'(x) \ge 0$를 쓸 때, 도함수에 대한 관찰을 해주자..
이과의 숙명...

## <특강 3-1>
## "명제 '미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 연속함수이다.' 의 반례

**아래의 내용은 비문학 읽듯이 한 번만 슥 읽어보고, 머릿속에는 '위의 명제가 거짓이다.'와 명제의 반례 정도만 남아있으면 됩니다.**

도함수에 관한 명제
'미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 연속함수이다.' 는 거짓명제로 유명하다.

거짓이라면 반례가 존재해야한다.
그 반례로는 $g(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & (x\ne 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$가 있다.

**반례가 되는 이유**

미분계수 정의에 의해 $g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left\{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right\}=0$
($\because \sin\left(\frac{1}{x}\right)$의 값이 $-1$과 $1$사이의 어느 값으로 확정시킬 수 없지만, 남아있는 $x$때문에 $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$의 값에 관계없이 항상 0으로 수렴한다.)

이지만

$g'(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$에서 $\lim_{x\to 0}g'(x)$는 $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ 때문에 정의되지 않는다.

따라서 $g'(0)\ne\lim_{x\to 0}g'(x)$

즉, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지만 ($=g'(0)$의 값이 존재하지만) $g'(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. **(끝)**

## <특강 3-2>
## 어떤 조건 때문에 불연속인거죠?

(Warning)
**다음에 소개할 내용 중에는 대학과정의 내용이 포함되어 있습니다.**

이번에는 $x=a$에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $x=a$에서 불연속일 때,

연속의 3조건 **(1. 연속 참고)** 중 어느 조건을 만족시키지 못하는지 알아보자.

조건 1)

이 조건은 항상 만족시킨다.
왜냐하면 $f(x)$가 미분가능한 함수이므로 $f'(a)$의 값이 존재해야하기 때문이다.

조건 2)

$f'(x)$가 $x=a$에서 불연속이고 $\lim\limits_{x \to a+} f'(x)$, $\lim\limits_{x \to a-} f'(x)$의 값이 각각 존재하면, $f'(a)$의 값은 정의될 수 없다는 명제가 있다.
(대학과정에 있는 '**다르부 정리**'이므로 받아들이자.)

조건 1)에서 $f'(a)$는 반드시 존재한다 했으므로, $\lim\limits_{x \to a+} f'(x)$, $\lim\limits_{x \to a-} f'(x)$의 값 중 적어도 하나가 존재하지 않음을 알 수 있다.

조건 3)은 논의할 필요 없다.

## <특강 4> - 평균값 정리

**평균값 정리에 대한 교과서 정의**

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 $(a, b)$에서 미분가능할 때,
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$
인 $c$가 $a, b$ 사이에 적어도 하나 존재한다.

본 정리는 ㄱㄴㄷ 합답형문제에 있는 「$f'(c)=k$를 만족시키는 $c$가 구간 $(a, b)$에 적어도 하나 존재한다.」와 같은 보기에 많이 사용된다.

**주의사항** 1)

평균값 정리를 쓸 수 있는 함수인지 체크하기
(닫힌 구간 $[a, b]$ 연속, 열린 구간 $(a, b)$ 미분가능인지)

**주의사항** 2)

보통 $k$는 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$의 값으로 주어지는데, 그렇지 않은 경우가 있다.

예를 들어, $k$를 $\dfrac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)}{\frac{a+b}{2}-a}$의 값으로 주고서는 $f'(c)=k$을 만족시키는 $c$가 구간 $(a, b)$에 존재하는지 묻는 경우이다.

따라서 구간의 양 끝점으로 평균값 정리를 적용시켜봤는데 보기에 있는 $k$값이 나오지 않았다면,
구간 $(a, b)$에 있는 특징적인 점 (ex. 변곡점, 극점)과 끝점 중 하나를 잡아 평균값 정리를 적용시켜보자.

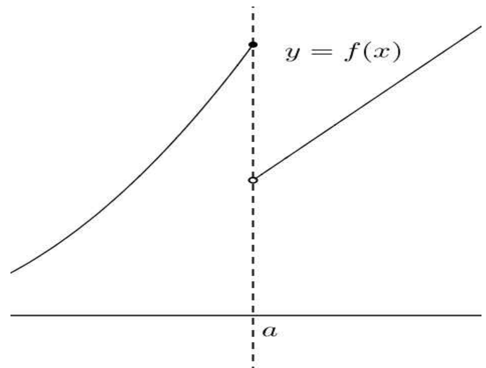
## 4. 극대와 극소

**극대의 교과서 정의**

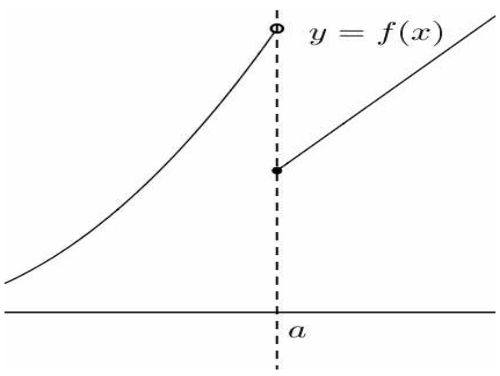
'$x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 $x$에 대하여 $f(x) \le f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대가 된다고 한다.'

문제에 제시되어있는 함수의 특성에 따라
위 정의는 여러 방법으로 바꿔 생각할 수 있다.

ㄱ. $x=a$에서 불연속인 함수 $f(x)$
$\Rightarrow$ 극대의 정의를 그대로 적용.
**(주의)** $x=a$에서 $f'(x)$의 부호가 변화할 필요 없음!
**(예시)**




$\rightarrow$ $x=a$에서 극대




$\rightarrow$ $x=a$에서 극소

ㄴ. 연속함수 $f(x)$가 $x=a$에서만 미분 불가능하면?
$\Rightarrow$ $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호변화가 있다고 **생각해도 무방하다. (고등수학 내에서)**

(Warning 함부로 읽지 마시오.
이해안되면 넘기시오. 그래도 수능 100점 핵가능.)
사실, 정확히는 $f'(x)$의 부호변화를 확실히 알 수 있는 함수일 때 성립하는 명제이다. 고등학교 과정에서는 본 반례를 떠올리라는 요구를 하지 않으므로, 그냥 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호변화가 있다고 생각해도 무방하다. 반례로는
$f(0)=0$이고 $f(x)=\begin{cases} x\sin(x^{-1})+x & (x>0) \\ x\sin(x^{-1})-x & (x<0) \end{cases}$ 이 있다.
$x>0$에서 $f(x)=x\left(\sin\dfrac{1}{x}+1\right)\ge 0=f(0)$ 이고
$x<0$에서 $f(x)=x\left(\sin\dfrac{1}{x}-1\right)=-x\left(1-\sin\dfrac{1}{x}\right)\ge 0=f(0)$
이므로 극소의 정의에 의하여 $f(0)$이 극솟값이지만, $x=0$의 좌우에서 미분가능 하지만 $f'(x)$의 부호는 $\sin(x^{-1})$ 때문에 결정시킬 수 없기 때문이다.

ㄷ. 미분가능한 함수 $f(x)$이면?
$\Rightarrow$ $f'(x)$의 부호가 $x=a$의 좌우에서 변화가 있고 $f'(a)=0$

대부분의 문제에 ㄷ.인 함수가 나오기 때문에 많은 학생들이 이것을 극값의 판정법으로 알고 있다. 하지만, 모든 문제에서 이 판정법이 먹히는 것은 아니다. (**명백한 오개념**)

## 5. 이계도함수와 변곡점

**볼록성의 교과서 정의**

함수 $y=f(x)$가 어떤 구간에서 항상
① $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 그 구간에서 아래로 볼록하다.
② $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 그 구간에서 위로 볼록하다.

**변곡점의 교과서 정의**

$x=a$의 좌우에서 곡선의 모양의 볼록성이 바뀌면, $(a, f(a))$를 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이라 한다.

여기서 주의해야할 점은 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호만 바뀌면 된다는 점이다.
즉, 반드시 $f''(a)=0$일 필요는 없다.

이 주의사항은
**극값의 판정에서 많이 본 주의사항**일 것이다.
극점이라고 해서 그 점에서 항상 $f'(a)=0$일 필요가 없었듯이, 변곡점에서도 항상 $f''(a)=0$일 필요가 없다.

함수 $f(x)$의 이계도함수가 존재한다는 조건이 있을 때만 변곡점 $(a, f(a))$에서 $f''(a)=0$이다.

또한 $f''(x)$는 $f'(x)$의 도함수라는 관점에서 본다면, $(a, f(a))$가 변곡점이라면 $x=a$의 좌, 우에서 $f'(x)$의 도함수의 부호변화가 있어야 하므로 변곡점은
**함수 $y=f'(x)$의 극점**
이라고 생각할 수 있겠다.

## 6. $f(x)$가 무슨 함수인지 알려줬을 때, 우리가 할 수 있는 것

$i)$ $f(x)$가 연속함수일 때,
$f(x)$가 포함된 식을 함부로 미분할 수 없다.

다만 문제에 적분을 포함한 항등식이 있다면,
(예를 들어 '모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)=\int_1^{x+1} f(t)dt$'
라는 항등식이 있다면)
오른쪽 식이 미분가능한 함수이므로 $f(x)$가 연속함수라는 조건밖에 없음에도 불구하고 위 식의 양변을 미분할 수 있으므로, 이 경우는 예외가 된다.

(이런 예외들은 무수히 많고, 이들을 다 외운다면 수학은 암기과목이 될 것이다.
**<u>핵심은 이 함수가 미분할 수 있는 함수인지 확인하고 미분하자는 것이다.</u>**)

$ii)$ $f(x)$가 미분가능한 함수라면,
이 함수는 한 번만 미분할 수 있다.
또한 $f(x)$의 연속성을 보장한다.
하지만, $f'(x)$의 연속성은 보장되지 않는다.

(주의)
$i)$에서의 예외처럼 **<u>문제의 조건에 따라</u>** 여러 번 미분가능한 문제도 존재한다.

$iii)$ $f(x)$가 이계도함수를 갖는다고 하면,

$f(x)$를 두 번 까진 마음 놓고 미분할 수 있다.

즉, 위 조건은
$f(x)$의 연속성과 미분가능성
$f'(x)$의 연속성과 미분가능성 까지만 보장한다.
$f''(x)$의 연속성은 보장하지 못한다.

그렇기 때문에, 이계도함수가 연속이라는 조건을 주고 싶다면, 다음 기출문제에서처럼 따로 명시해줘야 한다.

160930 수학 가형
~~~ 함수 $h(x)=f(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$를 갖고, $h''(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. ~~~

## 7. 특정구간에서 정의된 함수의 미분

열린 구간 $(a, b)$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 문제에서 주어져있다.
<u>→ 열린구간 $(a, b)$ 에서의 $f'(x)$를 알 수 있다.</u>

닫힌 구간 $[a, b]$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 문제에서 주어져있다.
<u>→ 열린구간 $(a, b)$ 에서의 $f'(x)$를 알 수 있다.</u>

두 번째 경우 왜 $f'(a), f'(b)$가 정의되지 않는지 탐구해보자.
(힌트 : 도함수의 정의 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$에 의해 $f'(a), f'(b)$가 정의될 수 있는지)

## 8. 요약, 정리

1. 사이값정리의 역은 성립하지 않는다.

2. 미분가능성의 본질은 미분계수의 정의다.

3. $f'(x)$와 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$는 다른 함수다.

함수 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$의 극한값을 이용해 $f'(x)$의 함숫값을 결정하는 것이다.

4. $f'(x)$의 부호변화가 없다고 해서 그 함수가 증가함수인지 감소함수인지 단정지을 수 없다.
(반례 : 상수함수를 일부분으로 갖는 함수)

5. 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수는 연속이 아닐 때도 있다.

6. 극대와 극소의 정의는 중요하다.

7. 변곡점은 도함수의 극점이다.

**8. 우리가 알고 있는 모든 보조정리들의 바닥에는 항상 정의가 깔려있다.**

**기본 정의에 어떤 조건들이 추가되어야 보조정리를 활용할 수 있는지 정리해보자. (feat. 교과서)**
**(ex. 극대, 극소인 점에서 $f'(x)=0$이기 위한 조건은 $f(x)$가 미분가능한 함수일 때)**
~~~