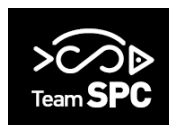


주간 초철살인

TRACK 1 - 12주차 (이과-)



Orbi Class

미친한 수학자

암기와 논리의 차이

논리도 결국 기억에 의존합니다.

하지만 그 기억들이 서로 연결성을 가지고 있다면 이것을 우리는 논리라고 합니다.

그래서 중간에 기억이 소실되더라도 추론을 통해서 기억을 되살릴 수 있습니다.

수학은 이러한 논리가 극대화 된 과목입니다.

아무리 어려워 보이는 문제라고 할지라도 분석하고 또 분석하면

결국 그 뿌리는 가장 기본적인 내용에 있음을 알게 됩니다.

교과서는 그러한 논리의 출발점을 알려줍니다.

그리고 우리는 그것을 개념이라고 합니다.

모든 기출문제는 반드시 교과서 개념을 통해서 풀립니다.

사고력은 근력과 같아서 꾸준한 훈련이 필요합니다.

목표에 따라서 훈련량과 방식도 달라야 합니다.

주간 춘철살인은 2개의 TRACK으로 진행됩니다.

<TRACK 1>를 통해 전 범위 핵심 내용을 확인할 수 있도록 구성하였습니다.

<TRACK 2>는 초고난도 사고력 문제로 <TRACK 1>과 병행하여야 의미가 있습니다.

<TRACK 2>는 9월 이후에 진행합니다.

- TRACK 1 : 1등급을 위한 지속적 훈련
- TRACK 2 : 100점을 위한 고강도 훈련 (강의)



TWO TRACK

TRACK 1	TRACK 2
1등급을 위한 지속적 훈련 주당 총 4회분 (전범위 복습) - 월, 수, 금, 일 각 1회차씩만 풀 것. (회당 시간은 40분)	100점을 위한 고강도 훈련 주당 총 10문항 - 하루에 1~2문제 정도를 깊이 고민할 것. (제한시간 없음.) - 다음날 한 번 더 고민한 후 수업에 들어올 것.

범위와 순서는 조금씩 달라질 수 있습니다.

주간 추천살인 12주차 - 1회 : 미적분 1

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{2x}}{4 - x^2}$ 의 값은?

① $\frac{1}{8}$

② $\frac{1}{4}$

③ $\frac{1}{2}$

④ 1

⑤ 2

2. 함수 $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^3 + bx - 1}{(x-1)^2} & (x \neq 1) \\ c & (x = 1) \end{cases}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b+c$ 의 값은?

(단, a, b, c 는 상수이다.)

① -1

② $-\frac{1}{2}$

③ 0

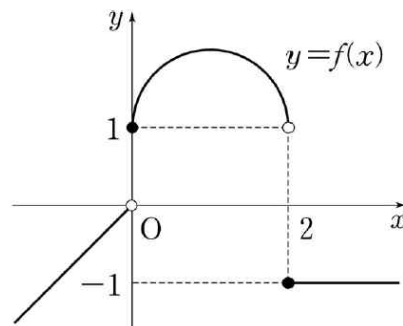
④ $\frac{1}{2}$

⑤ 1

3. $f(x) = x^2 + 4x + 1$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{3k}{n}\right)$ 의 값을 구하시오.

4. 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \sqrt{4n^2 + 1}}{n - 2}$ 을 구하시오

5. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다



보기에서 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?

< 보기 >

㉠. $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1$

㉡. $\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = -1$

㉢. 함수 $|f(x)|$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

6. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 등식 $(x^2 - x + 1)f(x) = g(x)$ 를 만족시킨다.
 $g(1) = 2$, $g'(1) = 6$ 일 때, $f'(1)$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

7. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시간 t 에서의 위치가 각각 $x_1(t) = 3t^2 - 2t$,
 $x_2(t) = t^3 - 4t^2 + 4t$ 일 때, 두 점 P, Q가 원점을 동시에 출발한 후 두 번째로 만나는 순간, 점
P의 속도를 v , 점 Q의 가속도를 a 라 하자. $v + a$ 의 값은?

① 56

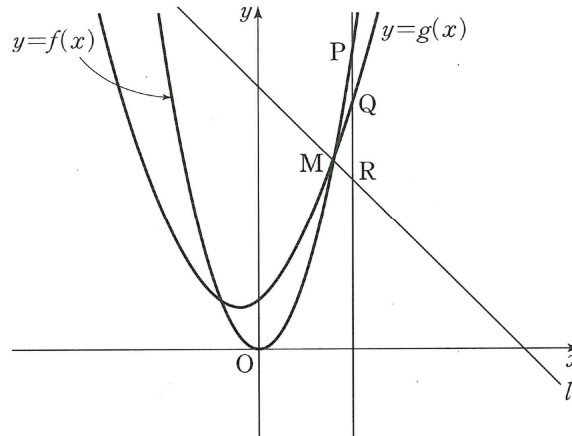
② 58

③ 60

④ 62

⑤ 64

8. 그림과 같이 두 함수 $f(x)=2x^2$, $g(x)=x^2+x+2$ 의 그래프가 제 1사분면에서 만나는 점을 M, 점 M을 지나고 기울기가 -1 인 직선을 l 이라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(t, f(t))$ 를 지나고 x 축과 수직인 직선이 곡선 $y=g(x)$ 와 만나는 점을 Q, 직선 l 과 만나는 점을 R라 할 때, 두 삼각형 PMQ, QMR의 넓이를 각각 $S(t)$, $T(t)$ 라 하자. $10 \times \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{T(t)}{S(t)}$ 의 값을 구하시오.
(단, $t > 2$)



9. 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

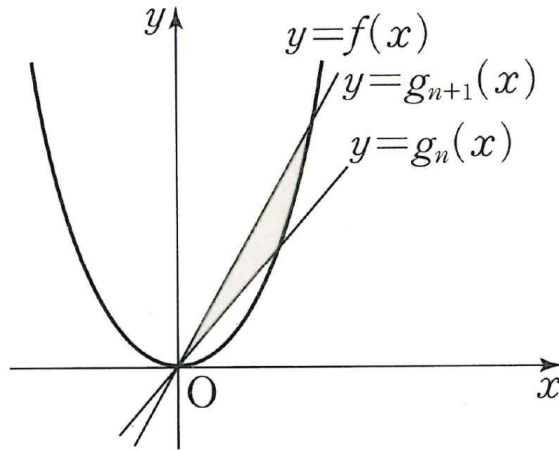
- (가) $f(x)=2x$ ($0 \leq x \leq 1$)
(나) 모든 실수 x 에 대하여
 $f(1-x)=f(1+x)$, $f(x)+f(-x)=0$ 이다.

$\int_{-9}^7 \{f(x)+2\}dx$ 의 값을 구하시오.

10. 자연수 n 에 대하여 함수 $f(x)=x^2$ 의 그래프와 함수 $g_n(x)=nx$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 두 직선 $y=g_n(x)$ 와 $y=g_{n+1}(x)$ 와 곡선 $y=f(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n 이라 할 때, 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n - \frac{1}{6}}$$

의 값은?



- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

11. 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>.

ㄱ. 두 수열 $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$ 이 모두 수렴하면 수열 $\{b_n\}$ 은 수렴한다.

ㄴ. 두 수열 $\left\{\frac{a_n}{n+1}\right\}$, $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$ 이 모두 수렴하면 수열 $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$ 은 수렴한다. (단, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \neq 0$ 이다.)

ㄷ. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n a_n$ 이 수렴하면 수열 $\{a_n\}$ 은 수렴한다.

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

주간 추천살인 12주차 - 1회 미적분 1 : 문항출처

- 1번. 2016. EBS FINAL. 나형. 7회
- 2번. 2014. EBS올림포스 평가문제집. 미적분1. 함수의 연속
- 3번. 2015. 수능특강. 미적분과 통계기본. 부정적분과 정적분
- 4번. (고2) 2010. 9 가형. 23번. 3점
- 5번. 2013. 6 A형. 11번. 3점
- 6번. 2016. 수능특강. 미적분1. 미분계수와 도함수
- 7번. 2015. 수능특강. 미적분과 통계기본. 도함수의 활용(2)
- 8번. 2016. EBS FINAL. 나형. 7회
- 9번. 2016. EBS Final 모의고사. 나형. 4회
- 10번. 2016. EBS FINAL. 나형. 7회
- 11번. (고2) 2009. 9 가형. 20번. 4점

주간 초월살인 12주차 - 1회 미적분 1 : 정답 및 해설

1) 정답 ①

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{2x}}{4 - x^2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 - \sqrt{2x})(2 + \sqrt{2x})}{(4 - x^2)(2 + \sqrt{2x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - 2x}{(2 - x)(2 + x)(2 + \sqrt{2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(2 - x)}{(2 - x)(2 + x)(2 + \sqrt{2x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(2 + x)(2 + \sqrt{2x})} = \frac{2}{4 \times 4} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

2) 정답 ②

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x = 1$ 에서도 연속이다. 따라서

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1), \quad \text{즉} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^3 + bx - 1}{(x - 1)^2} = c$$

$x \rightarrow 1$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (ax^3 + bx - 1) = a + b - 1 = 0 \text{이므로 } b = -(a - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^3 - (a - 1)x - 1}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(ax^2 + ax + 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + ax + 1}{x - 1} = c$$

$x \rightarrow 1$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (ax^2 + ax + 1) = 2a + 1 = 0 \text{이므로}$$

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{3}{2} \quad c = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(-x - 2)}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x - 2}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } a + b + c = \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

3) 정답 18

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{3k}{n}\right) &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{3k}{n}\right) \frac{3}{n} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{4 - 1}{n}k\right) \frac{4 - 1}{n} \\ &= \frac{1}{3} \int_1^4 f(x) dx = \frac{1}{3} \int_1^4 (x^2 + 4x + 1) dx = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + x \right]_1^4 \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{64}{3} + 32 + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + 2 + 1\right) \right\} = \frac{54}{3} = 18\end{aligned}$$

4) 정답 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \sqrt{4n^2 + 1}}{n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} + \sqrt{4 + \frac{1}{n^2}}}{1 - \frac{2}{n}} = 2$$

5) 정답 ③

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1$ 이므로 ㄱ은 참.

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = 1$ 이므로 ㄴ은 거짓.

[강남 Orbi] 주간 총체살인

ㄷ. $\square f(2)\square = \square - 1\square = 1$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \square f(x)\square = \square 1\square = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \square f(x)\square = \square - 1\square = 1$$

이므로 $\square f(x)\square$ 는 $x=0$ 에서 연속이다. 따라서 ㄷ은 참. 그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

6) 정답 ③

$$(x^2 - x + 1)f(x) = g(x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $f(1)=g(1)=2$

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 미분가능하므로 ①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$(2x-1)f(x) + (x^2 - x + 1)f'(x) = g'(x) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

②의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $f(1)+f'(1)=g'(1)=6$ 따라서 $f'(1)=6-f(1)=6-2=4$

7) 정답 ④

$$x_1(t) = x_2(t) \text{에서 } 3t^2 - 2t = t^3 - 4t^2 + 4t$$

$$t^3 - 7t^2 + 6t = 0, \quad t(t-1)(t-6) = 0 \quad \therefore t=0 \text{ 또는 } t=1 \text{ 또는 } t=6$$

따라서 두 점 P, Q가 원점을 동시에 출발한 후 두 번째로 만나는 순간은 $t=6$ 일 때이다.

$$x_1(t) = 3t^2 - 2t \text{이므로 시각 } t \text{에서의 점 P의 속도를 } v_1(t) \text{라 하면 } v_1(t) = 6t - 2$$

따라서 $t=6$ 일 때의 점 P의 속도는 $v = 6 \times 6 - 2 = 34$

$$x_2(t) = t^3 - 4t^2 + 4t \text{이므로 시각 } t \text{에서의 점 Q의 속도와}$$

$$\text{가속도를 } v_2(t), a_2(t) \text{라 하면 } v_2(t) = 3t^2 - 8t + 4, a_2(t) = 6t - 8 \text{이므로 } t=6 \text{일 때의}$$

$$\text{점 Q의 가속도는 } a = 6 \times 6 - 8 = 28 \quad \therefore v + a = 34 + 28 = 62$$

8) 정답 20

두 함수 $f(x) = 2x^2$, $g(x) = x^2 + x + 2$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표는 $2x^2 = x^2 + x + 2$ 에서

$$x^2 - x - 2 = 0, \quad (x+1)(x-2) = 0 \quad x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

점 M은 제 1사분면에 있는 점이므로 $x=2$ 이고 $M(2, 8)$ 이다.

그러므로 점 $M(2, 8)$ 을 지나고 기울기가 -1 인 직선 l 의 방정식은

$$y - 8 = -(x - 2) \text{ 즉, } y = -x + 10 \text{ 점 P의 좌표를 } (t, 2t^2) \text{ } (t > 2) \text{이라 하면}$$

점 Q의 좌표는 $(t, t^2 + t + 2)$, 점 R의 좌표는 $(t, -t + 10)$ 이므로

$$\overline{PQ} = 2t^2 - (t^2 + t + 2) = t^2 - t - 2$$

$$\overline{QR} = t^2 + t + 2 - (-t + 10) = t^2 + 2t - 8$$

점 M에서 선분 PR에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\lim_{t \rightarrow 2+} \frac{T(t)}{S(t)} = \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{\frac{1}{2} \times \overline{MH} \times \overline{QR}}{\frac{1}{2} \times \overline{MH} \times \overline{PQ}} = \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{\overline{QR}}{\overline{PQ}} = \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{t^2 + 2t - 8}{t^2 - t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{(t+4)(t-2)}{(t+1)(t-2)} = \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{t+4}{t+1} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\text{따라서 } 10 \times \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{T(t)}{S(t)} = 10 \times 2 = 20$$

9) 정답 32

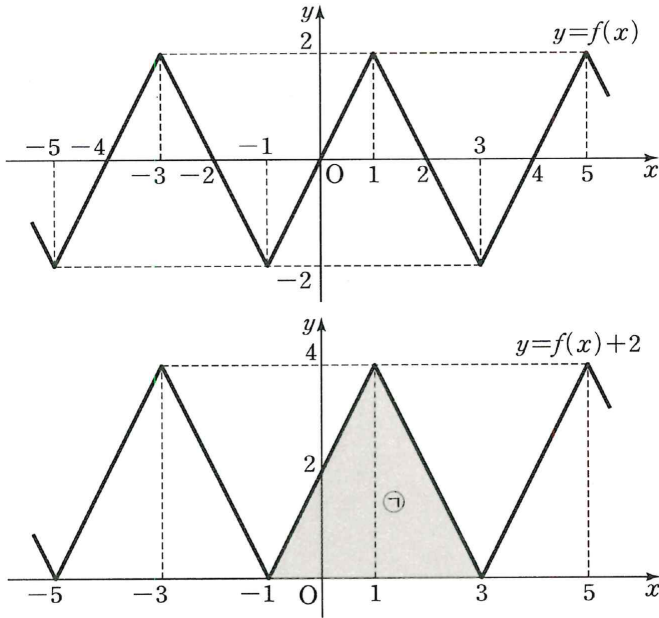
조건 (나)에서 모든 실수 x 에 대하여 $f(1-x) = f(1+x)$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이다.

또한, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) + f(-x) = 0$,

즉 $f(-x) = -f(x)$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

[강남 Orbi] 주간 총체살인

이때 $f(x) = 2x$ ($0 \leq x \leq 1$) 이므로 함수 $y = f(x)$ 와 함수 $y = f(x) + 2$ 의 그래프는 그림과 같다.

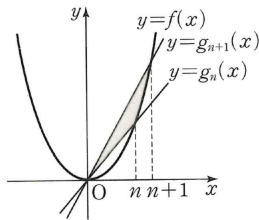


따라서 색칠된 ㉠과 같은 모양의 삼각형이 $-9 \leq x \leq 7$ 에서 4개 존재하므로

$$\int_{-9}^7 \{f(x) + 2\} dx = 4 \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 4 \right) = 32$$

10) 정답 ③

두 직선 $y = g_n(x)$ 와 $y = g_{n+1}(x)$ 와 곡선 $y = f(x)$ 가 만나는 점 중 원점이 아닌 점의 x 좌표는 각각 n , $n+1$ 이므로



$$S_n = \int_0^{n+1} \{(n+1)x - x^2\} dx - \int_0^n \{nx - x^2\} dx = \left[\frac{n+1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{n+1} - \left[\frac{n}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^n$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)^3 - \frac{1}{6}n^3 = \frac{1}{6}(3n^2 + 3n + 1) \quad \text{따라서 } S_n - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}n(n+1) \text{ 이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n - \frac{1}{6}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 2$$

11) 정답 ①

$$\neg. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \beta \text{ 라 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n + b_n) - (a_n - b_n)\} = \frac{\alpha - \beta}{2} \text{ (참)}$$

$$\neg. \text{ (반례) } a_n = 1, b_n = n \text{ 이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n+1}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} \text{ 이 모두 존재하지만 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty \text{ 이다. (거짓)}$$

[강남 Orbi] 주간 추천서인

c. (반례) $a_n = (-1)^n$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n a_n$ 은 수렴하지만 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 은 존재하지 않는다. (거짓)

[강남 Orbi] 주간 추천살인

주간 추천살인 12주차 - 2회 : 미적분 2

1. $a = \log_2 9 - \log_{\sqrt{2}} \frac{3}{5}$ 일 때, 4^a 의 값을 구하시오.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ 2

⑤ 4

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 6 \cos 2x \, dx$ 값을 구하시오.

4. $\int_1^5 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} \right) dx = \ln \alpha$ 일 때, 실수 α 의 값을 구하시오.

5. 좌표평면에서 곡선 $y^3 = \ln(5-x^2) + xy + 4$ 의 점 $(2, 2)$ 에서의 접선의 기울기는?

① $-\frac{3}{5}$

② $-\frac{1}{2}$

③ $-\frac{2}{5}$

④ $-\frac{3}{10}$

⑤ $-\frac{1}{5}$

6. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = \ln \sqrt[3]{x}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때,

$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(g(x))}{g(x) - 1}$ 의 값은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{1}{4}$

③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{2}{3}$

⑤ $\frac{3}{2}$

7. $-3 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ 의 최솟값은?

① $\frac{5}{8}$

② $\frac{11}{16}$

③ $\frac{3}{4}$

④ $\frac{13}{16}$

⑤ $\frac{7}{8}$

8. 부등식 $\log_2(x-1) + 2\log_2(x-4) \leq 2$ 를 만족시키는 정수 x 의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

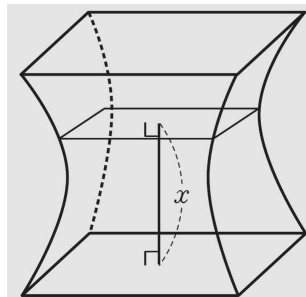
④ 4

⑤ 5

9. 곡선 $y = \log_3(x-2) + 3$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 후 y 축에 대하여 대칭이동한 곡선을 나타내는 식을 $y = f(x)$ 라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 가 점 $(a, 4)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

10. 그림과 같이 어떤 그릇에 물을 넣으면 수면의 높이가 x ($0 \leq x \leq 2$)일 때 수면은 한 변의 길이가 $x^2 - 2x + 2$ 인 정사각형이라 한다. 이 그릇의 부피는?



① $\frac{52}{15}$ ② $\frac{53}{15}$ ③ $\frac{18}{5}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ $\frac{56}{15}$

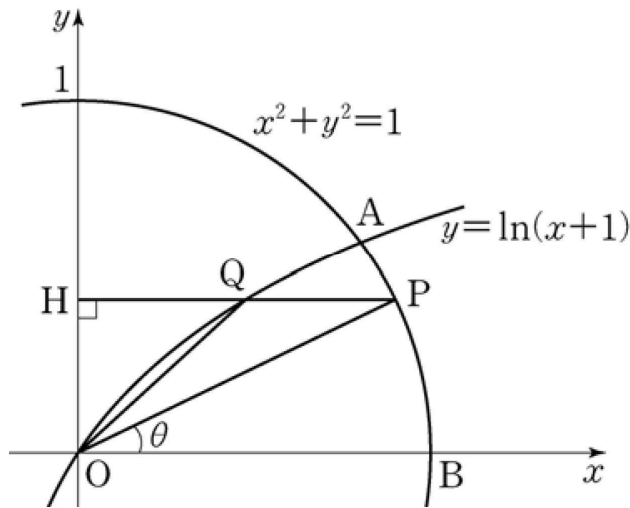
11. 양의 실수 t 에 대하여 곡선 $y = \ln x$ 위의 두 점 $P(t, \ln t)$, $Q(2t, \ln 2t)$ 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 각각 $R(r(t), 0)$, $S(s(t), 0)$ 이라 하자. 함수 $f(t)$ 를 $f(t) = r(t) - s(t)$ 라 할 때, 함수 $f(t)$ 의 극솟값은?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

12. $0 < t < 41$ 인 실수 t 에 대하여 곡선 $y = x^3 + 2x^2 - 15x + 5$ 와 직선 $y = t$ 가 만나는 세 점 중에서 x 좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t), t)$, x 좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t), t)$ 라 하자. $h(t) = t \times \{f(t) - g(t)\}$ 라 할 때, $h'(5)$ 의 값은?

- ① $\frac{79}{12}$ ② $\frac{85}{12}$ ③ $\frac{91}{12}$ ④ $\frac{97}{12}$ ⑤ $\frac{103}{12}$

13. 그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 곡선 $y = \ln(x+1)$ 이 제 1 사분면에서 만나는 점을 A 라 하자. 점 B(1, 0)에 대하여 호 AB 위의 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 곡선 $y = \ln(x+1)$ 이 만나는 점을 Q라 하자. $\angle POB = \theta$ 라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 HQ의 길이를 $L(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S(\theta)}{L(\theta)} = k$ 일 때, $60k$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ 이고, O는 원점이다.)



주간 추천살인 12주차 — 2회 미적분 2 : 문항출처

- 1번. 2016. EBS FINAL. 나형. 7회
- 2번. 2016. EBS FINAL. 가형. 1회
- 3번. 2016. EBS FINAL. 가형. 1회
- 4번. 2016. 4. 가형. 25번. 3점
- 5번. 2010. 11. 가형. 27번. 3점
- 6번. 2010. 10. 가형. 27번. 3점
- 7번. 2016. 수능특강. 미적분2. 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프
- 8번. 2016. 수능특강. 미적분2. 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프
- 9번. 2016. 수능특강. 미적분2. 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프
- 10번. 2016. 수능특강. 미적분2. 정적분의 활용
- 11번. 2016. 4. 가형. 18번. 4점
- 12번. 2015. 11. B형. 21번. 4점
- 13번. 2015. 11. B형. 28번. 4점

주간 초월살인 12주차 - 2회 미적분 2 : 정답 및 해설

1) 정답 625

$$a = \log_2 9 - \log_{\frac{1}{2^2}} \frac{3}{5} = 2\log_2 3 - 2(\log_2 3 - \log_2 5) = 2\log_2 5 = \log_2 25$$

$$\text{따라서 } 4^a = 4^{\log_2 25} = 25^{\log_2 4} = 25^{2\log_2 2} = 25^2 = 625$$

2) 정답 ④

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 2 \times 1 = 1$$

3) 정답 3

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 6 \cos 2x \, dx = \left[3 \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 3 \sin \frac{\pi}{2} - 3 \sin 0 = 3$$

4) 정답 15

$$\int_1^5 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} \right) dx = \left[\ln |x+1| + \ln |x| \right]_1^5 = \ln 6 + \ln 5 - \ln 2 = \ln 15 = \ln \alpha \quad \text{따라서 } \alpha = 15$$

5) 정답 ⑤

$y^3 = \ln(5 - x^2) + xy + 4$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3y^2 \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{5-x^2} + y + x \frac{dy}{dx} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y^2 - x} \left(\frac{-2x}{5-x^2} + y \right)$$

$$\text{따라서 점 } (2, 2) \text{에서의 접선의 기울기는 } \frac{1}{3 \cdot 2^2 - 2} \left(\frac{-2 \cdot 2}{5-2^2} + 2 \right) = -\frac{1}{5}$$

6) 정답 ③

$$f(x) = \ln \sqrt[3]{x} \text{ 이므로 } g(x) = e^{3x} \text{ 이다. } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(g(x))}{g(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{e^{3x} - 1} = \frac{1}{3}$$

7) 정답 ③

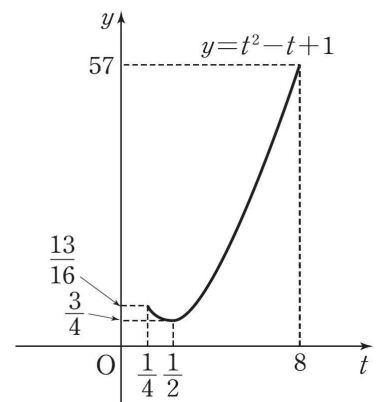
함수 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ 에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$ 로 놓자. $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이고 $-3 \leq x \leq 2$ 이므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \quad \text{에서 } \frac{1}{4} \leq t \leq 8$$

$$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 = t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{4} \leq t \leq 8 \text{ 이므로 다음 그림에서 } \frac{3}{4} \leq y \leq 57$$

따라서 주어진 함수의 최솟값은 $\frac{3}{4}$ 이다.



8) 정답 ①

로그의 진수의 조건에 의하여 $x-1 > 0$, $x-4 > 0$ 이므로 $x > 4$

$$\log_2(x-1) + 2\log_2(x-4) \leq 2 \text{에서}$$

$$\log_2(x-1)(x-4)^2 \leq 2 \quad 0 < (x-1)(x-4)^2 \leq 4$$

$$(x-1)(x-4)^2 - 4 = x^3 - 9x^2 + 24x - 20 \leq 0$$

$$(x-2)^2(x-5) \leq 0 \quad x=2 \text{ 또는 } x \leq 5$$

이때 $x > 4$ 이므로 $4 < x \leq 5$ 따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 는 5뿐이므로 그 개수는 1이다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -9 & 24 & -20 \\ & & 2 & -14 & 20 \\ \hline 2 & 1 & -7 & 10 & 0 \\ & & 2 & -10 & \\ \hline & 1 & -5 & 0 & \end{array}$$

9) 정답 ①

곡선 $y = \log_3(x-2) + 3$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면 $y = \log_3(x-1) + 3$

.....㉠

곡선 ㉠을 y 축에 대하여 대칭이동하면 $y = \log_3(-x-1) + 3$

.....㉡

곡선 ㉡이 점 $(a, 4)$ 를 지나므로 $4 = \log_3(-a-1) + 3 \quad -a-1 = 3$

따라서 구하는 a 의 값은 $a = -4$

10) 정답 ⑤

수면의 높이가 x ($0 \leq x \leq 2$)일 때 수면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = (x^2 - 2x + 2)^2 = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4$$

따라서 구하는 그릇의 부피는

$$\int_0^2 S(x)dx = \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4)dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^2 + 4x \right]_0^2 = \frac{32}{5} - 16 + \frac{64}{3} - 16 + 8 = \frac{56}{15}$$

11) 정답 ③

$y = \ln x$ 를 x 에 대하여 미분하면 $y' = \frac{1}{x}$ 점 $P(t, \ln t)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \ln t = \frac{1}{t}(x - t) \quad \therefore r(t) = t - t \ln t$$

점 $Q(2t, \ln 2t)$ 에서의 접선의 방정식은 $y - \ln 2t = \frac{1}{2t}(x - 2t) \quad \therefore s(t) = 2t - 2t \ln 2t$

$$f(t) = r(t) - s(t) = (2 \ln 2 - 1)t + t \ln t \quad f'(t) = 2 \ln 2 + \ln t = 0 \text{에서 } t = \frac{1}{4}$$

함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

t	(0)	...	$\frac{1}{4}$	...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$

따라서 극솟값은 $-\frac{1}{4}$

12) 정답 ④

$$h(t) = t \times \{f(t) - g(t)\} \text{이므로 } h'(t) = \{f(t) - g(t)\} + t \times \{f'(t) - g'(t)\}$$

$$\text{그러므로 } h'(5) = \{f(5) - g(5)\} + 5\{f'(5) - g'(5)\} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

[강남 Orbi] 주간 추천사상인

한편, $y = x^3 + 2x^2 - 15x + 5$ 와 직선 $y = 5$ 가 만나는 점의 x 좌표는 $x^3 + 2x^2 - 15x + 5 = 5$

$$x(x^2 + 2x - 15) = 0 \quad x(x+5)(x-3) = 0 \quad \therefore x = -5 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$

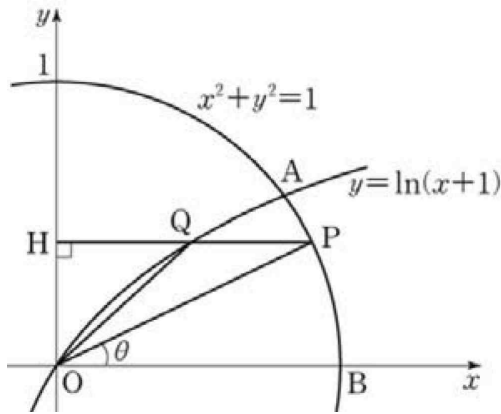
그러므로 $f(5) = 3$, $g(5) = -5$ ㉠

$$\text{한편, } y' = 3x^2 + 4x - 15 \text{에서 } f'(5) = \frac{1}{3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 15} = \frac{1}{24} \quad g'(5) = \frac{1}{3 \cdot (-5)^2 + 4 \cdot (-5) - 15} = \frac{1}{40} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠과 ㉡을 ㉢에 대입하면

$$h'(5) = \{3 - (-5)\} + 5\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{40}\right) = 8 + \frac{1}{12} = \frac{97}{12}$$

13) 정답 30



$P(\cos \theta, \sin \theta)$ 이므로 점 Q의 x 좌표는 $\sin \theta = \ln(x+1)$ 에서 $x = e^{\sin \theta} - 1$

$$\text{따라서 } Q(e^{\sin \theta} - 1, \sin \theta) \text{이므로 } S(\theta) = \frac{1}{2} \times (\cos \theta - e^{\sin \theta} + 1) \times \sin \theta$$

한편 $H(0, \sin \theta)$ 이므로

$$L(\theta) = e^{\sin \theta} - 1 \quad \therefore k = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S(\theta)}{L(\theta)} = \frac{1}{2} \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{(\cos \theta - e^{\sin \theta} + 1) \sin \theta}{e^{\sin \theta} - 1}$$

$$= \frac{1}{2} \times \lim_{\theta \rightarrow +0} (\cos \theta - e^{\sin \theta} + 1) \times \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin \theta}{e^{\sin \theta} - 1} = \frac{1}{2} \times (1 - 1 + 1) \times 1 = \frac{1}{2} \quad \therefore 60k = 60 \times \frac{1}{2} = 30$$

주간 추천살인 12주차 - 3회 : 기하와 벡터

1. 두 벡터 $\vec{a} = (2, 2, 1)$, $\vec{b} = (1, 4, -1)$ 이 이루는 각의 크기 θ 의 값은? (단, $0 \leq \theta \leq \pi$ 이다.)

① $\frac{\pi}{6}$

② $\frac{\pi}{4}$

③ $\frac{\pi}{3}$

④ $\frac{\pi}{2}$

⑤ $\frac{2}{3}\pi$

2. 좌표공간에서 평면 $x - 2z - 7 = 0$ 과 평면 $y - 3z - 14 = 0$ 의 교선을 l 이라 하자. 원점에서 직선 l 에 내린 수선의 발의 좌표를 (a, b, c) 라 할 때, $a + b + c$ 의 값은?

① -3

② -2

③ -1

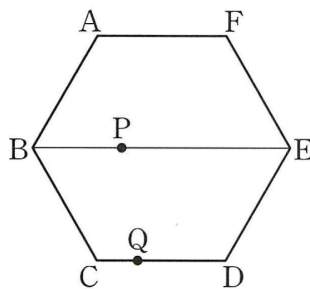
④ 0

⑤ 1

3.곡선 $ax^2 + \sqrt{y} = b$ 위의 점 $(1, 4)$ 에서의 접선의 기울기가 -2 일 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은?

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

4.그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육각형 ABCDEF에서 선분 BE위의 한 점을 P, 선분 CD위의 한 점을 Q라 하자. 두 벡터 $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PQ}$ 가 서로 평행할 때, $|\overrightarrow{PQ}|$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자. M^2+m^2 의 값을 구하시오.



5. 평면 α 위에 $\angle A = 90^\circ$ 이고 $\overline{BC} = 6$ 인 직각이등변삼각형 ABC 가 있다. 평면 α 밖의 한 점 P 에서 이 평면까지의 거리가 4이고, 점 P 에서 평면 α 에 내린 수선의 발이 점 A 일 때, 점 P 에서 직선 BC 까지의 거리는?

① $3\sqrt{2}$

② 5

③ $3\sqrt{3}$

④ $4\sqrt{2}$

⑤ 6

6. 포물선 $y^2 = 4(x + y - 4)$ 의 초점을 지나고 기울기가 2인 직선이 포물선과 두 점 P, Q에서 만날 때, 선분 PQ의 길이는?

① 4

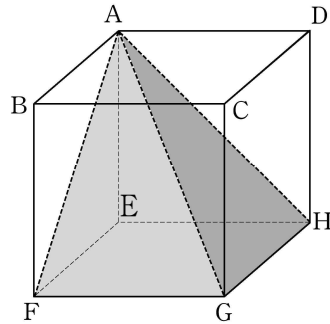
② $\frac{9}{2}$

③ 5

④ $\frac{11}{2}$

⑤ 6

7. 정육면체 $ABCD-EFGH$ 에서 평면 AFG 와 평면 AGH 가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos^2 \theta$ 의 값은?



① $\frac{1}{6}$

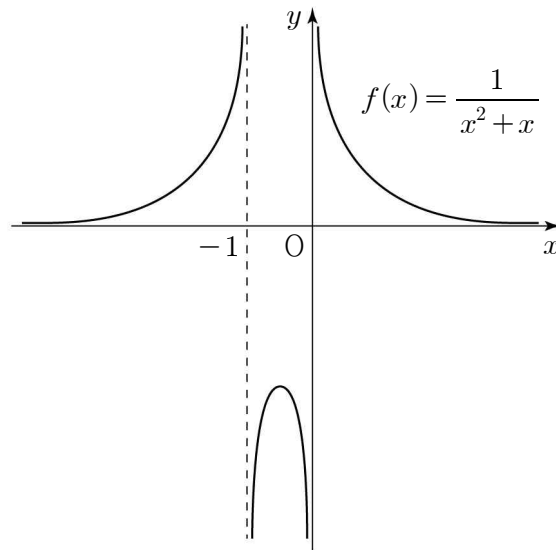
② $\frac{1}{5}$

③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{3}$

⑤ $\frac{1}{2}$

8. 함수 $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$ 의 그래프는 그림과 같다. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 두 점 $P(1, f(1))$, $Q\left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ 을 지나는 직선의 방향벡터 중 크기가 $\sqrt{10}$ 인 벡터를 $\vec{u}=(a, b)$ 라 하자. $|a-b|$ 의 값은?

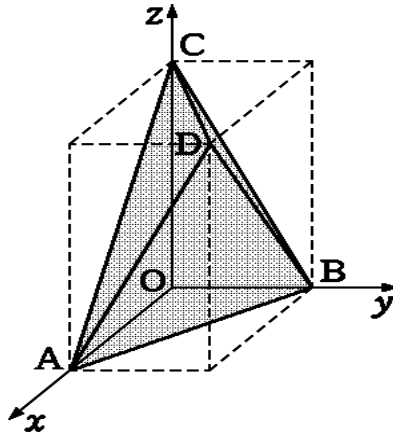


- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

9. 좌표공간에 점 $A(2, 2, 1)$ 과 평면 $\alpha: x+2y+2z-14=0$ 이 있다. 평면 α 위의 점 P 가 $\overline{AP} \leq 3$ 을 만족시킬 때, 점 P 가 나타내는 도형의 xy 평면 위로의 정사영의 넓이는?

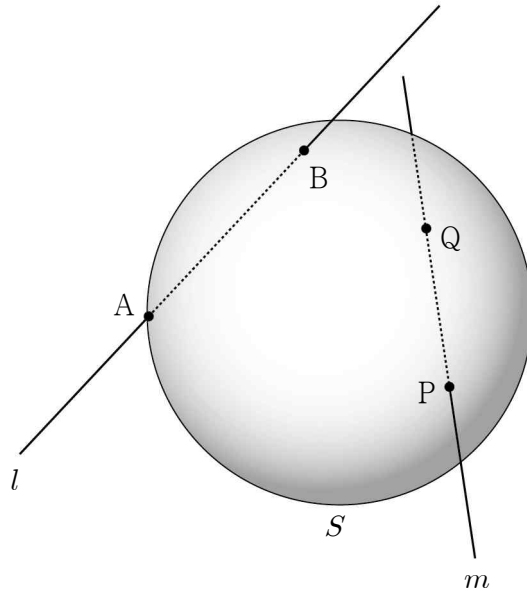
- ① $\frac{14}{3}\pi$ ② $\frac{13}{3}\pi$ ③ 4π ④ $\frac{11}{3}\pi$ ⑤ $\frac{10}{3}\pi$

10. 좌표공간 위의 네 점 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 4)$, $D(2, 2, 4)$ 에 대하여 그림과 같이 사면체 $DABC$ 의 꼭짓점 D 에서 삼각형 ABC 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, 선분 DH 의 길이는?



- ① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

11. 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 구 S 와 서로 다른 두 직선 l, m 이 있다. 구 S 와 직선 l 이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B , 구 S 와 직선 m 이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q 라 하자. 삼각형 APQ 는 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형이고 $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\angle ABQ = \frac{\pi}{2}$ 일 때 평면 APB 와 평면 APQ 가 이루는 각의 크기 θ 에 대하여 $100\cos^2\theta$ 의 값을 구하시오.



12. 좌표공간에서 평면 $\sqrt{3}y - z = 0$ 위에 있는 사각형 $ABCD$ 의 xy -평면으로의 정사영은 사각형 $A'B'C'D'$ 이다. $A'\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $B'\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $C'\left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$, $D'\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$ 일 때, 사각형 $ABCD$ 의 둘레의 길이는?

① $2\sqrt{3}$

② $2\sqrt{3}+2$

③ $4\sqrt{3}$

④ 6

⑤ 8

주간 추천살인 12주차 - 3회 기하와 벡터 : 문항출처

- 1번. 2006. 9. 가형. 3번. 2점
- 2번. 2010. 10. 가형. 5번. 3점
- 3번. 2016. 수능특강. 기하와 벡터. 평면곡선의 접선
- 4번. 2015. 수능특강. 기하와 벡터. 벡터의 뜻과 연산
- 5번. 2009. 11. 가형. 5번. 3점
- 6번. 2015. 수능특강. 기하와 벡터. 포물선
- 7번. 2006. 11. 가형. 6번. 3점
- 8번. 2016. 7. 가형. 13번. 3점
- 9번. 2015. 11. B형. 19번. 4점
- 10번. 2012. 사관학교. 이과. 12번. 3점
- 11번. 2016. 7. 가형. 29번. 4점
- 12번. 2004. 9. 가형. 12번. 4점

주간 초월살인 12주차 - 3회 기하와 벡터 : 정답 및 해설

1) 정답 ②

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2+8-1}{\sqrt{2^2+2^2+1^2} \sqrt{1^2+4^2+(-1)^2}} = \frac{9}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \leq \theta \leq \pi \text{이므로 } \theta = \frac{\pi}{4}$$

2) 정답 ①

$l: \frac{x-7}{2} = \frac{y-14}{3} = z$ 이고 방향벡터는 $\vec{d} = (2, 3, 1)$ 이므로 수선의 발 H를 $H(2t+7, 3t+14, t)$ 라 하면

$$\overrightarrow{OH} \cdot \vec{d} = 0 \text{에서 } 2(2t+7) + 3(3t+14) + t = 0 \quad \therefore t = -4$$

따라서 $H(-1, 2, -4)$ 이므로 $a+b+c = -3$ 이다.

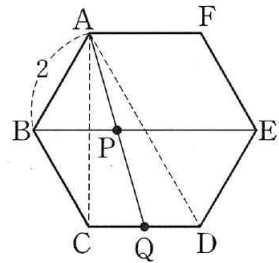
3) 정답 ④

$$ax^2 + \sqrt{y} = b \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면 } 2ax + \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} = 0 \text{ (단, } y \neq 0)$$

$$\frac{dy}{dx} = -4ax\sqrt{y} \quad \text{점 } (1, 4) \text{에서의 접선의 기울기가 } -2 \text{이므로 } -4a\sqrt{4} = -2 \text{에서 } a = \frac{1}{4}$$

$$\text{또 점 } (1, 4) \text{가 곡선 } ax^2 + \sqrt{y} = b \text{ 위의 점이므로 } a+2 = b \quad b = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} \quad \text{따라서 } a+b = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2}$$

4) 정답 7



$\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{PQ}$ 에서 $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{PQ}$ (k 는 0이 아닌 실수)이므로 세 점 A, P, Q는 한 직선 위에 있다. 정육각형 ABCDEF의 한 변의 길이가 2이므로 $\overline{AD} = 2 \times 2 = 4$

$$\overline{AC} = 2\overline{AP} = 2 \cdot 2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$$

$|\overrightarrow{PQ}|$ 의 값은 선분 PQ의 길이이므로 점 P가 선분 BE의 중점이고 점 Q가 점 D의 위치에 있을 때 최대이고, 최댓값은 $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$

점 P가 두 선분 AC, BE의 교점이고 점 Q가 점 C의 위치에 있을 때 최소이고, 최솟값은 $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$

$$\therefore \sqrt{3} \leq |\overrightarrow{PQ}| \leq 2 \text{에서 } M=2, m=\sqrt{3} \quad \therefore M^2+m^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 = 7$$

5) 정답 ②

$\angle A = 90^\circ$ 이므로 점 M은 선분 BC의 중점이다.

$\overline{BC}=6$ 이므로 $\overline{AM}=\frac{1}{2}\times\overline{BC}=3$ $\overline{PA}=4$ 이므로 삼각형 PAM에서

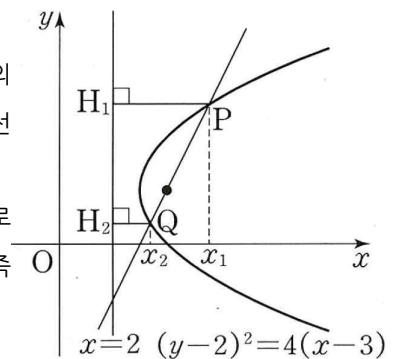
$$\overline{\text{PM}} = \sqrt{\overline{\text{PA}}^2 + \overline{\text{AM}}^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$y^2 = 4(x + y - 4) \Leftrightarrow y^2 = 4x + 4y - 16, \quad y^2 - 4y + 4 = 4x - 12,$$

$(y-2)^2 = 4(x-3)$ 이므로 주어진 포물선은 곡선 $y^2 = 4x$ 를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. 포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점의 좌표가 $(1, 0)$ 이므로 포물선 $(y-2)^2 = 4(x-3)$ 의 초점의 좌표는 $(4, 2)$ 이다.

점 (4, 2)를 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은 $y-2=2(x-4)$, 즉 $y=2x-6$ 이므로
 두 점 P, Q의 x 좌표를 각각 x_1, x_2 라 하면 x_1, x_2 는 이차방정식 $(2x-8)^2=4(x-3)$, 즉
 $x^2-9x+19=0$ 의 두 근이다.

따라서 근과 계수와의 관계에 의하여 $x_1 + x_2 = 9$ 이다.



포물선 $(y-2)^2 = 4(x-3)$ 의 준선의 방정식이 $x=2$ 이므로 두 점 P, Q에서 준선 $x=2$ 에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2 라 하면 $\overline{PQ} = \overline{PH_1} + \overline{QH_2} = (x_1 - 2) + (x_2 - 2) = x_1 + x_2 - 4 = 9 - 4 = 5$

점 E를 원점으로 하고, 직선 EF를 x 축, 직선 EH를 y 축, 직선 EA를 z 축으로 하는 좌표공간을 설정하자.

세 점 $A(0,0,1)$, $F(1,0,0)$, $G(1,1,0)$ 을 지나는 평면의 방정식은 $x+z=1$ 이고,

세 점 $A(0,0,1)$, $H(0,1,0)$, $G(1,1,0)$ 을 지나는 평면의 방정식은 $y+z=1$ 이다.

이 때, 두 평면 AFG, AHG 가 이루는 각의 크기는 두 평면의 법선벡터

$\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$ 이 이루는 각 중 예각의 크기와 같으므로 $\cos\theta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$P\left(1, \frac{1}{2}\right), Q\left(-\frac{1}{2}, -4\right)$ 이므로 $\overrightarrow{PQ} = -\frac{3}{2}(1, 3)$ $\vec{u}$ 와 $\overrightarrow{PQ}$ 는 평행하므로 $\vec{u} = k(1, 3)$ (k 는 실수)

$$|\vec{u}| = \sqrt{10} \text{ 이므로 } 10k^2 = 10, k = \pm 1$$

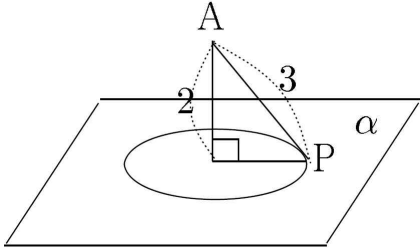
그러므로 $a=1, b=3$ 또는 $a=-1, b=-3$ 따라서 $|a-b|=2$

9) 정답 ⑤

점 A(2, 2, 1)과 평면 $\alpha : x + 2y + 2z - 14 = 0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 14|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 2$$

그러므로 $\overline{AP} \leq 3$ 인 점 P가 나타내는 도형은 그림에서 반지름의 길이가 $\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$ 인 원의 경계 및 내부이다.



한편, xy 평면의 법선벡터는 $(0, 0, 1)$ 이고 평면 α 의 법선벡터는 $(1, 2, 2)$ 이므로 xy 평면과 평면 α 가 이루는 예각의 크기를

$$\theta \text{라 하면 } \cos \theta = \frac{|0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는 $(\sqrt{5})^2 \pi \times \cos \theta = 5\pi \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}\pi$

10) 정답 ④

평면 ABC의 x, y, z 절편이 각각 2, 2, 4이므로 평면 ABC의 방정식은 $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$

즉, $2x + 2y + z - 4 = 0$ 이다. 따라서 $\overline{DH}$ 는 점 D에서 평면 $2x + 2y + z - 4 = 0$ 에 이르는 거리이므로

$$\overline{DH} = \frac{|2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 - 4|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1}} = \frac{8}{3}$$

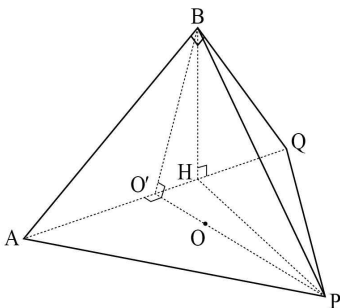
11) 정답 60

구 S 의 중심을 O라 하면 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형 APQ의 무게중심은 점 O와 같다. 점 P에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 O'라 하면 점 O'는 선분 AQ의 중점이고 $\angle ABQ = \frac{\pi}{2}$ 이므로 점 B는 점 O'를 중심으로 하고 반지름이 선분 AO'인 원 위의 점이다.

삼각형 BO'O에서 $\overline{OB} = \sqrt{3}$, $\overline{OB} = 2$, $\overline{OO'} = 1$ 이므로 $\angle BO'O = \frac{\pi}{2}$

그러므로 $\overline{OO'} \perp \overline{OB}$, $\overline{PO'} \perp \overline{OB}$, $\overline{AO'} \perp \overline{PO'}$, $\overline{PO'} \perp \overline{OB}$ 이므로 직선 PO'는 평면 ABQ와 수직이고, 평면 ABQ와 평면 APQ는 수직이다.

그러므로 점 B에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 APB의 평면 APQ 위로의 정사영은 삼각형 APH이다.



[강남 Orbi] 주간 추천사인

삼각형 $BO'P$ 는 직각삼각형이고 $\overline{O'B} = \sqrt{3}$, $\overline{O'P} = 3$ 이므로 $\overline{PB} = 2\sqrt{3}$

삼각형 APB 는 $\overline{PA} = \overline{PB} = 2\sqrt{3}$ 인 이등변삼각형이고, $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 APB 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{10} = 2\sqrt{5}$

삼각형 ABQ 와 삼각형 AHB 는 닮음이므로 $\overline{AH} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

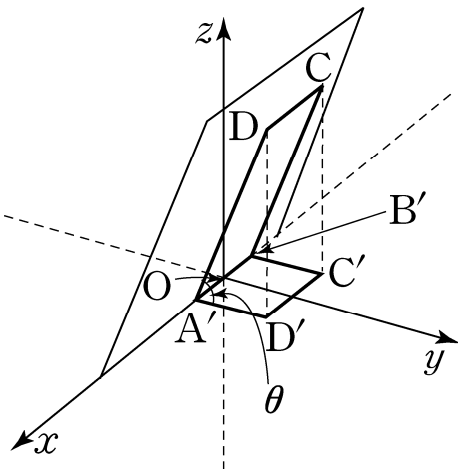
그러므로 삼각형 APH 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} \times 3 = 2\sqrt{3} \cos \theta = \frac{(\text{삼각형 } APH \text{의 넓이})}{(\text{삼각형 } APB \text{의 넓이})} = \frac{\sqrt{15}}{5} \text{ 따라서 } 100 \cos^2 \theta = 100 \times \frac{3}{5} = 60$$

12) 정답 ④

평면 $\sqrt{3}y - z = 0$ 과 평면 $z = 0$ 의 법선벡터는 각각 $\vec{u} = (0, \sqrt{3}, -1)$, $\vec{v} = (0, 0, 1)$ 이므로 두 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라

$$\text{하면 } \cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|-1|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \sqrt{1^2}} = \frac{1}{2}$$



위의 그림에서 점 A, B 와 점 A', B' 은 같은 점이고 $\overline{AB} = \overline{A'B'} = \overline{CD} = \overline{C'D'} = \overline{AD} \cos \theta$,

$\overline{BC} \cos \theta$ 이므로 $\overline{AB} = 1, \overline{CD} = 1, \overline{AD} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2, \overline{BC} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ 따라서, 사각형 $ABCD$ 의 둘레의 길이는 6이다.

[강남 Orbi] 주간 초청살인

주간 초청살인 12주차 - 4회 : 확률과 통계

1. 확률변수 X 가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{7}\right)$ 을 따르고, X 의 평균이 3일 때, n 의 값을 구하시오.

2. A, B를 포함한 5명을 일렬로 세울 때, A는 맨 앞에서부터 두 번째 이내에 서고 A와 B는 서로 이웃하게 서는 경우의 수는?

① 12

② 14

③ 16

④ 18

⑤ 20

3. 확률변수 x 의 확률분포표가 아래와 같을 때, 확률변수 $2X+5$ 의 평균을 구하시오.

X	0	1	2	3	계
$P(X)$	$\frac{7}{30}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{7}{30}$	1

4. 두 사건 A, B 가 서로 배반사건이고 $P(A \cup B) = 0.85$, $P(A) = 0.24$ 일 때, $P(B)$ 의 값은 α 이다. 100α 의 값을 구하시오.

5. 100원짜리 동전 8개를 같은 종류의 저금통 3개에 넣으려고 한다. 빈 저금통이 없도록 넣는 경우의 수는?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

6. 어느 회사에서 생산된 야구공의 무게는 평균이 144.9g, 표준편차가 6g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산된 야구공 중 임의로 선택한 야구공 9개 무게의 표본평균 이 141.7g 이상 148.9g 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.6	0.4452
1.7	0.4554
1.8	0.4641
1.9	0.4713
2.0	0.4772

- ① 0.9165 ② 0.9224 ③ 0.9267
④ 0.9282 ⑤ 0.9413

7. 두 사건 A, B 가 서로 독립이고 $P(A^C) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ 일 때, $P(B)$ 의 값은? (단, A^C 은 사건 A 의 여사건이다.)

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

8. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 A 에서 B 로의 함수 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는?

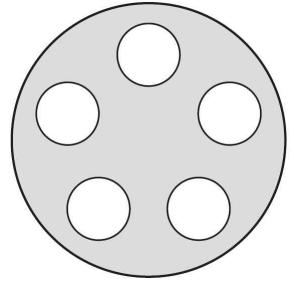
(가) 집합 A 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2 < 3$ 이면 $f(x_1) \geq f(x_2)$ 이고, $3 < x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.
 (나) $f(3) = 3$

- ① 294 ② 301 ③ 308 ④ 315 ⑤ 322

9. 상자 A에는 딸기맛 사탕이 2개, 포도맛 사탕이 4개 있고, 상자 B에는 딸기맛 사탕이 3개, 포도맛 사탕이 3개 있다. 두 상자 A, B에서 각각 임의로 1개씩 사탕을 동시에 꺼내어 같은 맛 사탕이면 먹고, 다른 맛 사탕이면 꺼낸 상자에 다시 넣는 시행을 연속하여 두 번 할 때, 첫 번째 시행과 두 번째 시행에서 뽑은 사탕을 모두 먹을 확률은? (단, 모든 사탕의 크기와 모양은 같다.)

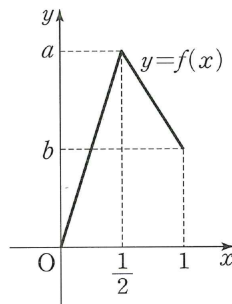
- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{16}{75}$ ③ $\frac{17}{75}$ ④ $\frac{6}{25}$ ⑤ $\frac{19}{75}$

10. 서로 다른 접시 5개와 같은 종류의 박하맛 사탕 3개, 같은 종류의 딸기맛 사탕 2개가 있다. 각 접시에 사탕을 한 개씩 담아 그림과 같은 원형의 식탁의 5곳에 배치하는 경우의 수는? (단, 회전시켜 일치하는 경우는 같은 것으로 본다.)



- ① 210 ② 220 ③ 230 ④ 240 ⑤ 250

11. 연속확률변수 X 가 갖는 값의 범위가 $0 \leq X \leq 1$ 이고 X 의 확률밀도함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq 1\right) = \frac{9}{10}$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 양수이다.)

- ① $\frac{8}{5}$ ② $\frac{9}{5}$ ③ 2 ④ $\frac{11}{5}$ ⑤ $\frac{12}{5}$

12. 어느 공장에서 생산하는 제품의 무게는 모평균이 m , 모 표준편차가 $\frac{1}{2}$ 인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 제품 중에서 25개를 임의추출하여 신뢰도 95%로 추정한 모평균 m 에 대한 신뢰구간이 $[a, b]$ 일 때, $P(|Z| \leq c) = 0.95$ 를 만족시키는 c 를 a, b 로 나타낸 것은? (단, 확률변수 Z 는 표준정규분포를 따른다.)

- ① $3(b-a)$ ② $\frac{7}{2}(b-a)$ ③ $4(b-a)$ ④ $\frac{9}{2}(b-a)$ ⑤ $5(b-a)$

주간 추천살인 12주차 — 4회 확률과 통계 : 문항출처

- 1번. 2013. 10. B형. 23번. 3점
- 2번. 2016. 수능특강. 확률과 통계. 순열
- 3번. 2005. 4. 가형. 18번. 3점
- 4번. 2016. 4. 가형. 23번. 3점
- 5번. 2016. 수능특강. 확률과 통계. 이항정리와 분할
- 6번. 2015. 10. A형. 11번. 3점
- 7번. 2016. EBS Final 나형. 1회
- 8번. 2016. EBS FINAL. 나형. 7회
- 9번. 2016. EBS FINAL. 나형. 7회
- 10번. 2016. 수능특강. 확률과 통계. 순열
- 11번. 2016. EBS FINAL. 나형. 7회
- 12번. 2012. 9. 나형. 20번. 4점

주간 추천살인 12주차 - 4회 확률과 통계 : 정답과 해설

13) 정답 21

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{7}\right)$ 을 따르므로 $E(X) = \frac{n}{7} = 3 \therefore n = 21$

14) 정답 ④

A의 위치에 따라 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

A	B			
---	---	--	--	--

(i) A가 첫 번째에 서는 경우

B는 두 번째에 서야 하므로 나머지 3명을 오른쪽 그림의 칸에 일렬로 나열하면 된다.

그러므로 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 순열의 수이므로

$${}_3P_3 = 3! = 6$$

B	A			
	A	B		

(ii) A가 두 번째에 서는 경우

B는 첫 번째 또는 세 번째에 서야 하고, 이 각각에 대하여 나머지 3명을 오른쪽 그림의 칸에 일렬로 나열하면 된다.

그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해 $2 \times {}_3P_3 = 2 \times 3! = 12$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해 $6 + 12 = 18$

15) 정답 8

$$E(X) = 1 \times \frac{4}{15} + 2 \times \frac{4}{15} + 3 \times \frac{7}{30} = \frac{45}{30} = \frac{3}{2} \text{ 이므로 } E(2X+5) = 2E(X) + 5 = 8$$

16) 정답 61

두 사건 A, B 가 서로 배반사건이므로 $P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0.61$ 따라서 $\alpha = 0.61$ 이고 $100\alpha = 61$

17) 정답 ③

구하는 경우의 수는 자연수 8을 세 개의 자연수로 분할하는 경우의 수 $P(8, 3)$ 과 같다.

$$8 = 6 + 1 + 1 = 5 + 2 + 1 = 4 + 3 + 1 = 4 + 2 + 2 = 3 + 3 + 2 \text{ 이므로 } P(8, 3) = 5$$

18) 정답 ②

임의로 추출된 야구공 9개 무게의 평균을 $\bar{X}$ 라 하면, $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(144.9, 2^2)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} & P(141.7 \leq \bar{X} \leq 148.9) \\ &= P\left(\frac{141.7 - 144.9}{2} \leq Z \leq \frac{148.9 - 144.9}{2}\right) = P(-1.6 \leq Z \leq 2) = P(0 \leq Z \leq 1.6) + P(0 \leq Z \leq 2) = 0.9224 \end{aligned}$$

19) 정답 ②

$$P(A^c) = \frac{1}{4} \text{ 에서}$$

[강남 Orbi] 주간 추천살인

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로 $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ 에서

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times P(B) = \frac{1}{3} \quad \text{따라서} \quad P(B) = \frac{4}{9}$$

20) 정답 ④

조건 (가), (나)에 의하여 함수 f 는 $f(1) \geq f(2)$, $f(3) = 3$, $f(4) < f(5)$

를 만족시켜야 한다. 따라서 집합 $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 1부터 6까지의 6개의 수 중에서 중복을 허락하여 2개를 뽑아 큰 수부터 차례대로 $f(1), f(2)$ 에 대응시키고, 3은 $f(3)$ 에 대응시키고, 1부터 6까지의 6개의 수 중에서 서로 다른 2개를 뽑아 작은 수부터 차례대로 $f(4), f(5)$ 에 대응시키면 된다.

$$\text{따라서 구하는 함수 } f \text{의 개수는 } {}_6H_2 \times 1 \times {}_6C_2 = {}_7C_2 \times 1 \times {}_6C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} \times 1 \times \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 315$$

21) 정답 ⑤

첫 번째 시행과 두 번째 시행에서 뽑은 사탕을 모두 먹을 확률은 첫 번째 시행과 두 번째 시행에서 모두 같은 맛 사탕을 뽑을 확률과 같다.

첫 번째 시행에서 같은 맛 사탕을 뽑을 확률

$$(i) \text{ 상자 A에서 딸기맛 사탕, 상자 B에서 딸기맛 사탕을 뽑을 확률은 } \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

$$(ii) \text{ 상자 A에서 포도맛 사탕, 상자 B에서 포도맛 사탕을 뽑을 확률은 } \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{6}$$

두 번째 시행에서도 같은 맛 사탕을 뽑을 확률

(i)인 경우가 일어나고 두 번째 시행에서 상자 A에서 딸기맛 사탕, 상자 B에서 딸기맛 사탕을 뽑을 확률은

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{150}$$

(i)인 경우가 일어나고 두 번째 시행에서 상자 A에서 포도맛 사탕, 상자 B에서 포도맛 사탕을 뽑을 확률은

$$\frac{1}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{150}$$

(ii)인 경우가 일어나고 두 번째 시행에서 상자 A에서 딸기맛 사탕, 상자 B에서 딸기맛 사탕을 뽑을 확률은

$$\frac{2}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{150}$$

(ii)인 경우가 일어나고 두 번째 시행에서 상자 A에서 포도맛 사탕, 상자 B에서 포도맛 사탕을 뽑을 확률은

$$\frac{2}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{150}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{2}{150} + \frac{12}{150} + \frac{12}{150} + \frac{12}{150} = \frac{38}{150} = \frac{19}{75}$$

22) 정답 ④

접시를 원형으로 배열하는 경우의 수는 $(5-1)! = 4! = 24$

이 각각에 대하여 박하맛 사탕 3개, 딸기맛 사탕 2개를 배열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{3!2!} = 10$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해 $24 \times 10 = 240$

23) 정답 ⑤

$f(x)$ 가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times a + \frac{1}{2} \times (a+b) \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b = 1 \quad 2a+b=4 \dots\dots ㉠$$

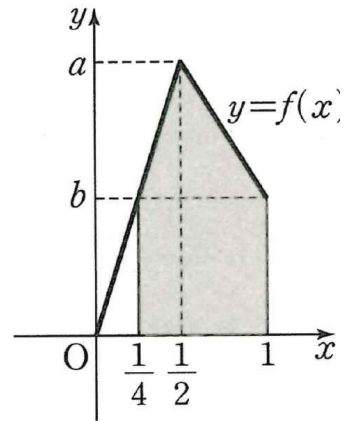
확률 $P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq 1\right)$ 은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq 1\right) = 1 - P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{4}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{a}{2} = 1 - \frac{a}{16} = \frac{9}{10}$$

$$\frac{a}{16} = \frac{1}{10}, \quad a = \frac{8}{5}$$

$$a = \frac{8}{5} \text{을 } ㉠ \text{에 대입하면 } 2 \times \frac{8}{5} + b = 4, b = \frac{4}{5} \text{ 따라서 } a+b = \frac{8}{5} + \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$$



24) 정답 ⑤

정규분포 $N\left(m, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$ 을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기 25인 표본의 표본평균을 $\bar{X}$ 라 할 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도

95%의 신뢰구간은 $P(|Z| \leq c) = 0.95$ 에서

$$\left[\bar{X} - c \times \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{25}}, \bar{X} + c \times \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{25}} \right] \left[\bar{X} - \frac{c}{10}, \bar{X} + \frac{c}{10} \right] \text{에서 } a = \bar{X} - \frac{c}{10}, b = \bar{X} + \frac{c}{10} \quad \therefore c = 5(b-a)$$

주간
초청살인