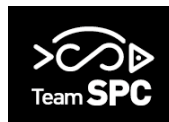


주간 초철살인

TRACK 1 - 12주차 (문과)



Orbi Class

미친한 수학자

암기와 논리의 차이

논리도 결국 기억에 의존합니다.

하지만 그 기억들이 서로 연결성을 가지고 있다면 이것을 우리는 논리라고 합니다.

그래서 중간에 기억이 소실되더라도 추론을 통해서 기억을 되살릴 수 있습니다.

수학은 이러한 논리가 극대화 된 과목입니다.

아무리 어려워 보이는 문제라고 할지라도 분석하고 또 분석하면

결국 그 뿌리는 가장 기본적인 내용에 있음을 알게 됩니다.

교과서는 그러한 논리의 출발점을 알려줍니다.

그리고 우리는 그것을 개념이라고 합니다.

모든 기출문제는 반드시 교과서 개념을 통해서 풀립니다.

사고력은 근력과 같아서 꾸준한 훈련이 필요합니다.

목표에 따라서 훈련량과 방식도 달라야 합니다.

주간 춘철살인은 2개의 TRACK으로 진행됩니다.

〈TRACK 1〉를 통해 전 범위 핵심 내용을 확인할 수 있도록 구성하였습니다.

〈TRACK 2〉는 초고난도 사고력 문제로 〈TRACK 1〉과 병행하여야 의미가 있습니다.

〈TRACK 2〉는 9월 이후에 진행합니다.

- TRACK 1 : 1등급을 위한 지속적 훈련
- TRACK 2 : 100점을 위한 고강도 훈련 (강의)



TWO TRACK

TRACK 1	TRACK 2
1등급을 위한 지속적 훈련 주당 총 4회분 (전범위 복습) - 월, 수, 금, 일 각 1회차씩만 풀 것. (회당 시간은 40분)	100점을 위한 고강도 훈련 주당 총 10문항 - 하루에 1~2문제 정도를 깊이 고민할 것. (제한시간 없음.) - 다음날 한 번 더 고민한 후 수업에 들어올 것.

범위와 순서는 조금씩 달라질 수 있습니다.

주간 초철살인 12주차 - 1회 : 수학 1

1. 두 다항식 $A = x^2 + 1$, $B = 2x^2 + x - 1$ 에 대하여 $3A - B$ 를 간단히 하면?

- ① $3x^2 + x + 2$ ② $3x^2 + x$ ③ $x^2 + 2x - 4$ ④ $x^2 - x + 6$ ⑤ $x^2 - x + 4$

2. $ab = 2$, $a^2 + b^2 = 28$ 일 때, $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 의 값을 구하시오.

3. $x^3 - ax + 6 = (x-1)(x+b)(x+c)$ 가 x 에 관한 항등식일 때, 상수 a , b , c 에 대하여 $a+b+c$ 의 값은?

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

4. 다항식 $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 3$ 을 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 23, $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는 -13 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

5. 이차방정식 $x^2 - x - 3 = 0$ 의 서로 다른 두 실근이 x 에 대한 사차방정식 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 의 두 중근일 때, 네 상수 a, b, c, d 의 합 $a+b+c+d$ 의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

6. 이차함수 $y = ax^2 + 4x + b$ 의 그래프가 점 $(1, -1)$ 을 지나고 x 축에 접할 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 17

② 18

③ 19

④ 20

⑤ 21

7. $-2 \leq x \leq 2$ 에서 정의된 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x + a$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 21일 때, 상수 a 의 값은?

① 6

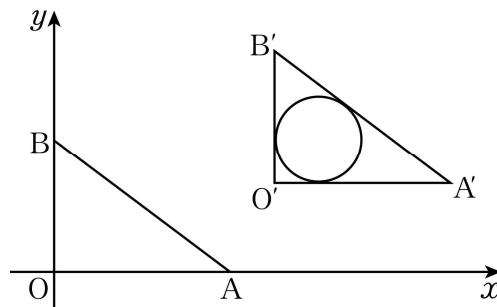
② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

8. 그림과 같이 좌표평면에서 세 점 $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(0, 3)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB 를 평행이동한 도형을 삼각형 $O'A'B'$ 이라 하자. 점 A' 의 좌표가 $(9, 2)$ 일 때, 삼각형 $O'A'B'$ 에 내접하는 원의 방정식은 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 이다. $a + b + c$ 의 값을 구하시오. (단, a , b , c 는 상수이다.)



9. 좌표평면에서 점 $A(1, 3)$ 을 x 축, y 축에 대하여 대칭이동한 점을 각각 B , C 라 하고, 점 $D(a, b)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 E 라 하자. 세 점 B , C , E 가 한 직선 위에 있을 때, 직선 AD 의 기울기는?(단, $a \neq \pm 1$)

① -2

② -1

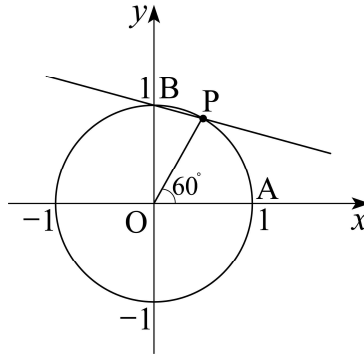
③ 1

④ 2

⑤ 3

10. 좌표평면에서 x , y 에 대한 연립부등식 $\begin{cases} xy \geq 0 \\ |x| + 2|y| \leq k \end{cases}$ 가 나타내는 영역의 넓이가 60이 되도록 상수 k 의 값을 정할 때, k^2 의 값을 구하시오.

11. 좌표평면 위에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 이 x 축, y 축의 양의 부분과 만나는 점을 각각 A, B 라 하자. 그림과 같이 제 1 사분면에서 $\angle AOP = 60^\circ$ 인 점 P 를 원 위에 잡으면 직선 BP 의 기울기는 $a + b\sqrt{3}$ 이다. 이때 $20(a^2 + b^2)$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 유리수이다.)



12. 이차함수 $f(x) = x^2 + ax + b$ 가 $f(1) = f(-7)$ 을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b 는 상수이다.)

[보 기]

- ㄱ. 이차함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(3)$ 이다.
 ㄴ. $b \geq 9$ 이면 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이다.
 ㄷ. $-\frac{7}{2} \leq x \leq -\frac{3}{2}$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 차는 $\frac{1}{4}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

주간 추천살인 12주차 - 1회 수학 1 : 문항출처

- 1번. (고1) 2014. 6. 2번. 2점
- 2번. (고2) 2012. 3. 22번. 3점
- 3번. (고1) 2007. 6. 4번. 2점
- 4번. 2014. 올림포스. 수1. 나머지 정리
- 5번. 2014. 올림포스. 수1. 여러 가지 방정식
- 6번. 2014. 올림포스 평가문제집. 수1. 이차방정식과 이차함수
- 7번. (고2) 2014. 3 B형. 5번. 3점
- 8번. (고2) 2016. 3. 나형. 28번. 4점
- 9번. (고1) 2008. 11. 9번. 3점
- 10번. (고2) 2010. 3. 26번. 3점
- 11번. (고2) 2008. 3. 27번. 4점
- 12번. 2014. 올림포스 평가문제집. 수1. 이차방정식과 이차함수

주간 추천살인 12주차 - 1회 수학 1 : 정답과 해설

1) 정답 ⑤

$$3A - B = 3(x^2 + 1) - (2x^2 + x - 1) = 3x^2 + 3 - 2x^2 - x + 1 = x^2 - x + 4$$

2) 정답 14

$$(\text{준식}) = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{28}{2} = 14$$

3) 정답 ①

$$x^3 - ax + 6 = (x-1)(x+b)(x+c) \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면 } a=7 \therefore x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3)$$

$$\text{따라서 } b = -2, c = 3 \text{ 또는 } b = 3, c = -2 \therefore a + b + c = 8$$

4) 정답 6

나머지정리에 의하여

$$f(2) = 16 + 4a + 2b + 3 = 23, 2a + b = 2 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f(-1) = -2 + a - b + 3 = -13, a - b = -14 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠, ㉡ \text{을 연립하여 풀면 } a = -4, b = 10 \text{ 따라서 } a + b = (-4) + 10 = 6$$

5) 정답 ③

이차방정식 $x^2 - x - 3 = 0$ 의 두 근은 $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ 이고, 이차방정식 $x^2 - x - 3 = 0$ 의 서로 다른 두 실근이 사차방정식

$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 의 두 중근이므로

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = \left\{ \left(x - \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right) \left(x - \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \right) \right\}^2 = (x^2 - x - 3)^2 = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x + 9$$

$$\text{따라서 } a = -2, b = -5, c = 6, d = 9 \text{이므로 } a + b + c + d = -2 + (-5) + 6 + 9 = 8$$

6) 정답 ①

이차함수 $y = ax^2 + 4x + b$ 의 그래프가 점 $(1, -1)$ 을 지나므로

$$-1 = a + 4 + b \text{ 즉, } a + b = -5 \quad \dots\dots ㉠$$

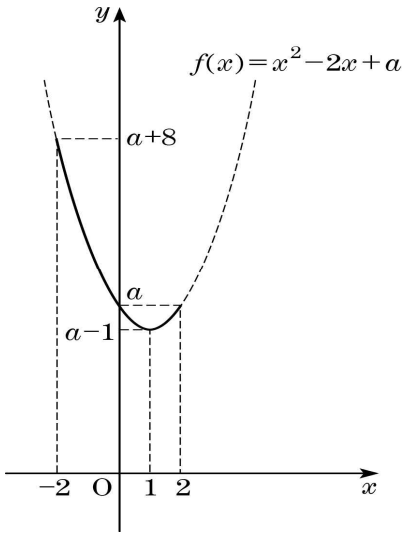
또 이차함수의 그래프가 x 축과 접하므로 이차방정식 $ax^2 + 4x + b = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 2^2 - ab = 0 \quad ab = 4 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠, ㉡ \text{에서 } a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (-5)^2 - 2 \times 4 = 17$$

7) 정답 ②

$$f(x) = x^2 - 2x + a = (x-1)^2 + a - 1 \quad (-2 \leq x \leq 2)$$

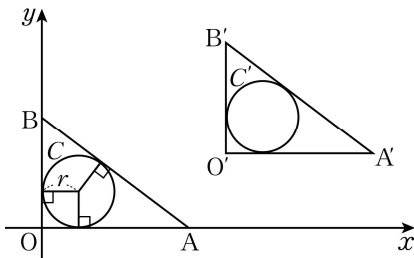


위의 그래프에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(1) = a - 1$ 이고, 최댓값은 $f(-2) = a + 8$ 최댓값과 최솟값의 합이 21이므로 $(a + 8) + (a - 1) = 21 \therefore a = 7$

8) 정답 26

두 삼각형 OAB , $O'A'B'$ 에 내접하는 원을 각각 C , C' 이라 하자.

원 C 의 반지름의 길이를 r 라 하면 원 C 는 x 축, y 축에 모두 접하고 제1사분면에 중심이 있으므로 중심의 좌표는 (r, r) 이다.



또한 두 점 $A(4, 0)$, $B(0, 3)$ 에 대하여 직선 AB 의 방정식은 $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

즉 $3x + 4y - 12 = 0$ 이고 원 C 가 직선 AB 에 접하므로 원의 중심 (r, r) 와 직선 AB 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 r 와 같으므로 $\frac{|3r + 4r - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = r \quad |7r - 12| = 5r \quad 7r - 12 = 5r \text{ 또는 } 7r - 12 = -5r \quad r = 6, r = 1$

$0 < r < 3$ 이므로 $r = 1$ 따라서 원 C 의 방정식은 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

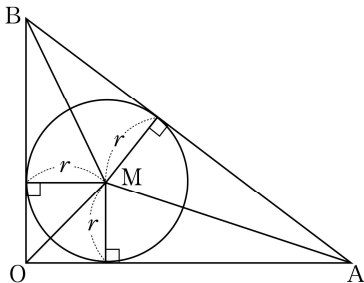
점 $A(4, 0)$ 을 x 축의 방향으로 5만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 점 $A'(9, 2)$ 가 되므로 이 평행이동에 의하여 원

C 가 평행이동한 원 C' 의 방정식은 $(x - 5 - 1)^2 + (y - 2 - 1)^2 = 1 \quad (x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 1$

$x^2 + y^2 - 12x - 6y + 44 = 0 \quad a = -12, b = -6, c = 44$ 이므로 $a + b + c = 26$

[참고]

내접원 C 의 반지름의 길이 r 를 다음과 같은 방법으로도 구할 수 있다.



원의 중심을 M 이라 하면, 점 M 에서 세 변 OA , OB , AB 에 내린 수선의 길이는 원의 반지름의 길이 r 와 같으므로 $\triangle OAB = \triangle MOA + \triangle MAB + \triangle MBO$ 이므로

[강남 Orbi] 주간 추천살인

$$\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times r + \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times r + \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times r$$

$$6 = \frac{1}{2} r (4 + 5 + 3) \quad 6r = 6 \quad r = 1$$

9) 정답 ⑤

점 A(1, 3)을 x 축, y 축에 대칭이동한 점은 각각 B(1, -3), C(-1, 3)이다. 점 D(a, b)를 x 축에 대칭이동한 점은 E(a, -b)이다. 세 점 B, C, E가 한 직선 위에 있으므로 $\overline{BC}$ 의 기울기와 $\overline{CE}$ 의 기울기는 같다.

$$\overline{BC} \text{의 기울기는 } \frac{3 - (-3)}{-1 - 1} = -3 \quad \overline{CE} \text{의 기울기는 } \frac{-b - 3}{a - (-1)} = \frac{-b - 3}{a + 1} \quad \frac{-b - 3}{a + 1} = -3 \quad \text{따라서 } b = 3a$$

$$\overline{AD} \text{의 기울기는 } \frac{b - 3}{a - 1} = \frac{3a - 3}{a - 1} = 3 \text{이다.}$$

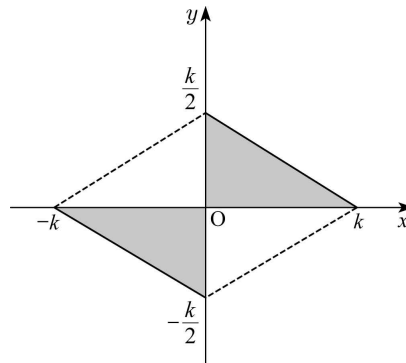
10) 정답 120

$xy \geq 0$ 이 나타내는 영역은 좌표평면에서 x 축, y 축 및 제1사분면과 제3사분면이다.

$$|x| + 2|y| \leq k \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y \leq k & (x \geq 0, y \geq 0) \\ x - 2y \leq k & (x \geq 0, y < 0) \\ -x - 2y \leq k & (x < 0, y < 0) \\ -x + 2y \leq k & (x < 0, y \geq 0) \end{cases} \text{이므로 영역은}$$

점 $(k, 0)$, $(0, \frac{k}{2})$, $(-k, 0)$, $(0, -\frac{k}{2})$ 를 꼭짓점으로 하는 마름모의 내부(경계포함)이다.

따라서 주어진 연립부등식이 나타내는 영역은 그림과 같다.

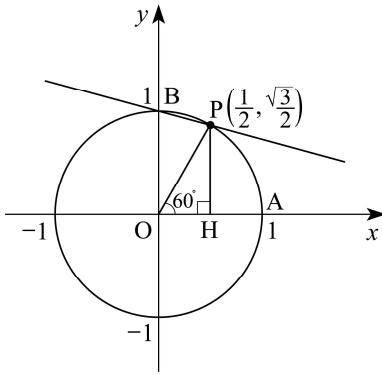


$$\text{연립부등식의 영역의 넓이가 } 60 \text{ 이므로 } 2 \times \frac{1}{2} \times k \times \frac{k}{2} = 60, \quad \frac{k^2}{2} = 60 \therefore k^2 = 120$$

11) 정답 100

점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라고 하자. $\angle POH = 60^\circ$ 이고 $\overline{OP} = 1$ 이므로 $\overline{OH} = \frac{1}{2}$, $\overline{PH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

$$\therefore P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



따라서 두 점 $B(0, 1)$, $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 을 지나는 직선 BP의 기울기 m 은 $m = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{\frac{1}{2} - 0} = -2 + \sqrt{3}$

$$a = -2, b = 1 \text{ 이므로 } 20(a^2 + b^2) = 20(4 + 1) = 100$$

12) 정답 ②

이차함수 $f(x) = x^2 + ax + b$ 에서

$$\neg. f(1) = f(-7) \text{ 이므로 } 1 + a + b = 49 - 7a + b \quad 8a = 48 \quad a = 6 \text{ 즉, } f(x) = x^2 + 6x + b = (x + 3)^2 + b - 9$$

따라서 이차함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(-3)$ 이다.

ㄴ. 이차함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(-3) = b - 9$ 이므로 $b \geq 9$ 이면 모든 실수 x 에 대하여

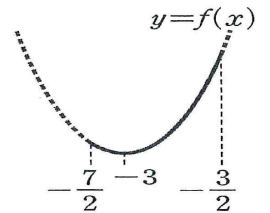
$$f(x) \geq f(-3) \geq 0 \text{ 이다.}$$

ㄷ. $-\frac{7}{2} \leq x \leq -\frac{3}{2}$ 에서 이차함수 $f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x = -\frac{3}{2}$ 일 때,

$$\text{최댓값은 } f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2} + 3\right)^2 + b - 9 = b - \frac{27}{4}$$

$$f(x) \text{의 최솟값은 } f(-3) = b - 9 \text{ 이므로 최댓값과 최솟값의 차는 } \left(b - \frac{27}{4}\right) - (b - 9) = \frac{9}{4}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ 이다.



주간 초철살인 12주차 - 2회 : 수학 2

1. $a = \log_2 10$, $b = 2\sqrt{2}$ 일 때, $a \log b$ 의 값은?

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

2. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A , B 가 다음 조건을 만족한다.

$$(가) A \cap B = \{1, 2\} \quad (나) A \cup B = U$$

이때, 두 집합 A , B 의 순서쌍 (A, B) 의 개수는?

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

3. 자연수 전체 집합의 두 부분집합 A , B 가 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{보다 작은 소수}\}$,

$B = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 양의 약수}\}$ 일 때, $n(A - B)$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

4. 실수 x 에 대하여 세 조건 p, q, r 가 다음과 같다. $p: 5 \leq x < 10$, $q: x > a$, $r: x \leq 3a+1$
두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $p \rightarrow r$ 가 모두 참이 되도록 하는 모든 정수 a 의 값의 합은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

5. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 3$ 이고 $a_{n+1} - a_n = 4n - 3$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하시오.

6. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4) = 1 : 2$ 가 성립할 때, $a_1 : a_4$ 는? (단, $a_1 \neq 0$ 이다.)

① 1:2

② 1:3

③ 2:3

④ 2:5

⑤ 3:5

7. 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 a_{10} = 9$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10 항까지의 곱은?

- ① 3^{10} ② 3^{11} ③ 3^{12} ④ 3^{13} ⑤ 3^{14}

8. 2이상의 자연수 n 에 대하여 부등식 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2$ 가 성립함이 알려져 있다. 다음은 이 사실을 이용하여 n 이 6이상의 자연수일 때, 부등식 $\left(\frac{n}{2}\right)^n > n!$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. (단, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$)

<증 명>

(i) $n=6$ 일 때, $3^6 = 729$, $6! = 720$ 이므로 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 6$)일 때 성립한다고 가정하면

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} = \frac{k+1}{2^{k+1}} \cdot \frac{(k+1)^k}{k^k} \cdot \boxed{}$$

$$= \frac{k+1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \cdot \boxed{(가)} > \frac{k+1}{2} \cdot \boxed{(나)} = \boxed{} \text{ 이므로 } n=k+1 \text{ 일 때도}$$

성립한다. (i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 6이상의 모든 자연수에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

- | | | |
|---|------------------------------|----------|
| | (가) | (나) |
| ① | k^k | $(k+1)!$ |
| ② | k^k | $2k!$ |
| ③ | k^k | $k!$ |
| ④ | $\left(\frac{k}{2}\right)^k$ | $(k+1)!$ |
| ⑤ | $\left(\frac{k}{2}\right)^k$ | $2k!$ |

9. 두 함수 $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{kx}$ 에 대하여 서로 다른 두 실수 a, b 는 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad g(b) = 4, \quad f(b) = g(a)$$

$$(나) \quad g(b) - g(a) = \sqrt{2} \{f(b) - f(a)\}$$

$f(a) \leq x \leq g(b)$ 에서 함수 $y = g(x)$ 의 최댓값 M 과 최솟값 m 의 곱 Mm 의 값은? (단, k 는 1보다 큰 상수이다.)

① $\sqrt{2}$

② $2\sqrt{2}$

③ $3\sqrt{2}$

④ $4\sqrt{2}$

⑤ $5\sqrt{2}$

10. 진동가속도레벨 $V(\text{dB})$ 는 공해진동에 사용되는 단위로 진동가속도 크기를 의미하며 편진폭

$A(\text{m})$, 진동수 $w(\text{Hz})$ 에 대하여 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다. $V = 20 \log \frac{Aw^2}{k}$ (단, k 는 양의 상수이다.) 편진폭이 A_1 , 진동수가 10π 일 때 진동가속도레벨이 83이고, 편진폭이 A_2 ,

진동수가 80π 일 때 진동가속도레벨이 91이다. $\frac{A_2}{A_1}$ 의 값은?

① $\frac{1}{32} \times 10^{\frac{1}{5}}$

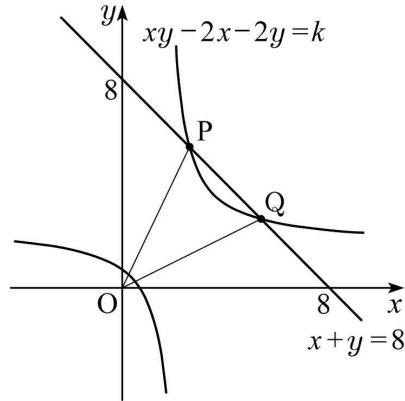
② $\frac{1}{32} \times 10^{\frac{2}{5}}$

③ $\frac{1}{64} \times 10^{\frac{1}{5}}$

④ $\frac{1}{64} \times 10^{\frac{2}{5}}$

⑤ $\frac{1}{64} \times 10^{\frac{3}{5}}$

11. 그림과 같이 도형 $xy - 2x - 2y = k$ 가 직선 $x + y = 8$ 과 만나는 두 점을 P, Q라 하자. 두 점 P, Q의 x 좌표의 곱이 14일 때 $\overline{OP} \times \overline{OQ}$ 의 값을 구하시오. (단, $k < 0$)



12. 자연수 A 에 대하여 $\log A$ 의 정수부분을 n , 소수부분을 α 라 할 때, $n \leq 2\alpha$ 가 성립하도록 하는 A 의 개수를 구하시오. (단, $3.1 < \sqrt{10} < 3.2$)

주간 추천살인 12주차 — 2회 수학 2 : 문항출처

- 1번. 2008. 11. 나형. 6번. 3점
- 2번. (고2) 2011. 3. 5번. 3점
- 3번. 2016. EBS FINAL. 나형. 7회
- 4번. 2016. EBS FINAL. 나형. 7회
- 5번. 2007. 6. 나형. 21번. 3점
- 6번. 2006. 3. 가,나형. 6번. 3점
- 7번. 2010. 10. 나형. 6번. 3점
- 8번. 2005. 7. 가,나형. 12번. 3점
- 9번. 2016. 수능특강. 수2. 유리함수 무리함수
- 10번. 2016. 4. 가형. 10번. 3점
- 11번. (고2) 2010. 3. 29번. 4점
- 12번. 2010. 11. 나형. 24번. 4점

주간 추천살인 12주차 - 2회 수학 2 : 정답 및 해설

1) 정답 ②

$$b^a = (2\sqrt{2})^{\log_2 10} = 10^{\log_2 2\sqrt{2}} = 10^{\frac{3}{2}} \therefore a \log b = \log b^a = \log 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

2) 정답 ④

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{1, 2\}$ 이므로

$n(A - B) = 0$ 일 때, 순서쌍 (A, B) 의 개수는 1

$n(A - B) = 1$ 일 때, 순서쌍 (A, B) 의 개수는 3

$n(A - B) = 2$ 일 때, 순서쌍 (A, B) 의 개수는 3

$n(A - B) = 3$ 일 때, 순서쌍 (A, B) 의 개수는 1 $\therefore$ 순서쌍 (A, B) 의 개수는 8

3) 정답 ③

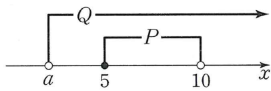
$A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 6\}$ 이므로 $A - B = \{5, 7\}$

따라서 집합 $A - B$ 의 원소의 개수는 2이므로 $n(A - B) = 2$

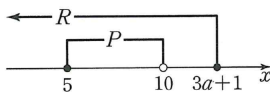
4) 정답 ②

세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하자.

(i) 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이므로 $P \subset Q$ 따라서 $a < 5$ 이어야 한다.



(ii) 명제 $p \rightarrow r$ 가 참이므로 $P \subset R$ 따라서 $3a + 1 \geq 10$ 이어야 하므로 $3a \geq 9$, $a \geq 3$



(i), (ii)에서 $3 \leq a < 5$

따라서 이 범위에 속하는 정수 a 는 3, 4이므로 구하는 모든 정수 a 의 값의 합은 $3 + 4 = 7$

5) 정답 156.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 4n - 3 \text{에서 수열 } \{a_n\} \text{의 계차수열은 } \{4n - 3\} \text{이므로} \quad a_{10} = a_1 + \sum_{k=1}^9 (4k - 3) \\ &= 3 + 4 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} - 3 \cdot 9 = 156 \end{aligned}$$

6) 답. ②

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4) = (a_1 + a_1 + d) : (a_1 + 2d + a_1 + 3d) = 1 : 2$ 에서

$$2a_1 + 5d = 4a_1 + 2d \quad \therefore 2a_1 = 3d \quad \therefore a_1 : a_4 = a_1 : (a_1 + 3d) = a_1 : 3a_1 = 1 : 3$$

7) 답. ①

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_1 a_{10} = a^2 r^9 = 9$ 에서

[강남 Orbi] 주간 추천사신

$$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{10} = a^{10} \times r^{45} = (a^2 r^9)^5 = 9^5 = 3^{10}$$

8) 정답 ⑤

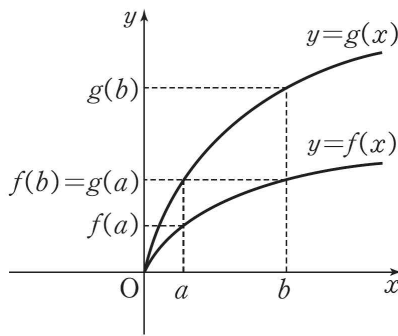
$n = k$ ($k \geq 6$)일 때 성립한다고 가정하면

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} = \frac{k+1}{2^{k+1}} \frac{(k+1)^k}{k^k} = \frac{k+1}{2} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \left(\frac{k}{2}\right)^k$$

$$\text{그런데 } \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k > 2 \text{ 이고 } \left(\frac{k}{2}\right)^k > k! \text{ 이므로 } \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} > \frac{k+1}{2} \cdot 2k! = (k+1)!$$

9) 정답 ④

$k > 1$ 이고 조건 (가)에서 두 곡선 $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{kx}$ 의 그래프는 그림과 같다.



조건 (가)에서 $g(b) = 4$ 이므로 $\sqrt{kb} = 4$ ㉠

조건 (나)에서 $g(b) - g(a) = \sqrt{2} \{f(b) - f(a)\}$ 이므로 $\sqrt{k}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) = \sqrt{2}(\sqrt{b} - \sqrt{a})\sqrt{k} = \sqrt{2}$ 에서 $k = 2$

따라서 $g(x) = \sqrt{2x}$ ㉠에서 $\sqrt{2b} = 4$ 이므로 $b = 8$ 그러므로 $f(b) = f(8) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ 또한, 조건 (가)에서

$g(a) = f(b) = 2\sqrt{2}$ 이므로 $\sqrt{2a} = 2\sqrt{2}$ 에서 $a = 4$ 따라서 $f(a) = 2$, $g(b) = 4$ 이므로 $2 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $y = g(x)$ 는 $x = 2$ 일 때, 최솟값 $m = g(2) = 2x = 4$ 일 때, 최댓값 $M = g(4) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ 따라서 $Mm = 2\sqrt{2} \times 2 = 4\sqrt{2}$

10) 정답 ④

편진폭이 A_1 , 진동수가 10π 일 때 진동가속도레벨이 83 이므로 $83 = 20 \log \frac{A_1(10\pi)^2}{k}$ ㉠

편진폭이 A_2 , 진동수가 80π 일 때 진동가속도레벨이 91 이므로 $91 = 20 \log \frac{A_2(80\pi)^2}{k}$ ㉡

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{에서 } 8 = 20 \left\{ \log \frac{A_2(80\pi)^2}{k} - \log \frac{A_1(10\pi)^2}{k} \right\} \frac{2}{5} = \log \frac{A_2(80\pi)^2}{A_1(10\pi)^2} = \log \frac{64A_2}{A_1}$$

$$\text{따라서 } \frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{64} \times 10^{\frac{2}{5}}$$

11) 정답 36

도형 $xy - 2x - 2y = k$ 와 직선 $x + y = 8$ 의 교점 P, Q 의 x좌표를 각각 α, β 라 하자.

$y = 8 - x$ 를 대입하여 정리하면 $x^2 - 8x + (k + 16) = 0$ ㉠

이 방정식의 두 근이 α, β 이므로 $\alpha\beta = k + 16 = 14 \therefore k = -2$

$k = -2$ 를 ㉠에 대입하여 풀면 $x = 4 \pm \sqrt{2} \therefore P(4 - \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2}), Q(4 + \sqrt{2}, 4 - \sqrt{2})$

$$\therefore \overline{OP} \times \overline{OQ} = \overline{OP}^2 = (4 - \sqrt{2})^2 + (4 + \sqrt{2})^2 = 36$$

[강남 Orbi] 주간 추천사신

[다른풀이]

도형 $xy - 2x - 2y = k$ 와 직선 $x + y = 8$ 의 교점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β 라 하자.

$$y = 8 - x \text{ 를 대입하여 정리하면 } x^2 - 8x + (k + 16) = 0 \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

이 방정식의 두 근이 α, β 이므로 $\alpha + \beta = 8, \alpha\beta = k + 16$

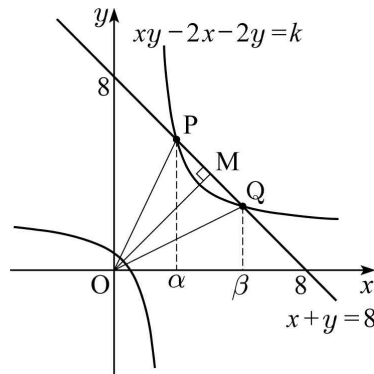
여기서 P, Q의 x좌표의 곱이 14 이므로 $k = -2$

그런데 도형 $xy - 2x - 2y = -2$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 선분 PQ의 중점을 M이라 하면 삼각형 OPQ는 이

등변삼각형이다. $\therefore \overline{OP} \times \overline{OQ} = \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2 + \left(\frac{1}{2} \overline{PQ}\right)^2$

$$\text{이때 } \overline{OM}^2 = 4^2 + 4^2 = 32,$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{2(\alpha - \beta)^2} = \sqrt{2\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}} = 4 \quad \therefore \overline{OP} \times \overline{OQ} = 32 + 4 = 36$$



12) 정답 77

$\log A = n + \alpha$ (n 은 0 이상의 정수, $0 \leq \alpha < 1$)라 하면 $n \leq 2\alpha < 2$ 가 성립하여야 한다.

(i) $n = 0$ 일 때, $0 \leq \alpha < 1$ 이므로 $0 \leq \log A < 1, 1 \leq A < 10$

따라서 자연수 A 는 1, 2, 3, ..., 9의 9개이다.

(ii) $n = 1$ 일 때, $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ 이므로 $\frac{3}{2} \leq \log A < 2, 10^{\frac{3}{2}} \leq A < 100$

그런데 $31 < 10^{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{10} < 32$ 이므로 $31. \times \times \leq A < 100$ 따라서 자연수 A 는 32, 33, 34, ..., 99의 68개이다.

(i), (ii)에서 구하는 자연수 A 의 개수는 $9 + 68 = 77$ (개)

[강남 Orbi] 주간 추천살인

주간 추천살인 12주차 - 3회 : 미적분 1

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{2x}}{4 - x^2}$ 의 값은?

① $\frac{1}{8}$

② $\frac{1}{4}$

③ $\frac{1}{2}$

④ 1

⑤ 2

2. 함수 $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^3 + bx - 1}{(x-1)^2} & (x \neq 1) \\ c & (x = 1) \end{cases}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b+c$ 의 값은?

(단, a, b, c 는 상수이다.)

① -1

② $-\frac{1}{2}$

③ 0

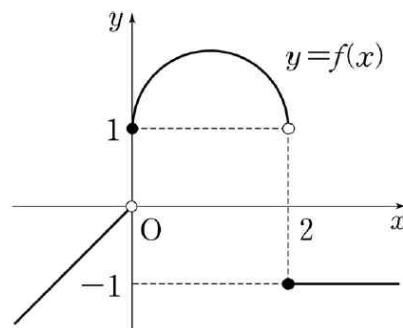
④ $\frac{1}{2}$

⑤ 1

3. $f(x) = x^2 + 4x + 1$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{3k}{n}\right)$ 의 값을 구하시오.

4. 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \sqrt{4n^2 + 1}}{n - 2}$ 을 구하시오

5. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다



보기에서 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?

< 보기 >

㉠. $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1$

㉡. $\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = -1$

㉢. 함수 $|f(x)|$ 는 $x = 2$ 에서 연속이다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

6. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 등식 $(x^2 - x + 1)f(x) = g(x)$ 를 만족시킨다.
 $g(1) = 2$, $g'(1) = 6$ 일 때, $f'(1)$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

7. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t 에서의 위치가 각각 $x_1(t) = 3t^2 - 2t$,
 $x_2(t) = t^3 - 4t^2 + 4t$ 일 때, 두 점 P, Q가 원점을 동시에 출발한 후 두 번째로 만나는 순간, 점
P의 속도를 v , 점 Q의 가속도를 a 라 하자. $v + a$ 의 값은?

① 56

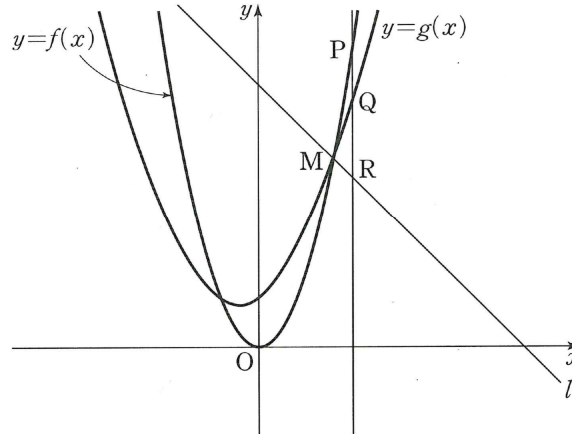
② 58

③ 60

④ 62

⑤ 64

8. 그림과 같이 두 함수 $f(x)=2x^2$, $g(x)=x^2+x+2$ 의 그래프가 제 1사분면에서 만나는 점을 M, 점 M을 지나고 기울기가 -1 인 직선을 l 이라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(t, f(t))$ 를 지나고 x 축과 수직인 직선이 곡선 $y=g(x)$ 와 만나는 점을 Q, 직선 l 과 만나는 점을 R라 할 때, 두 삼각형 PMQ, QMR의 넓이를 각각 $S(t)$, $T(t)$ 라 하자. $10 \times \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{T(t)}{S(t)}$ 의 값을 구하시오. (단, $t > 2$)



9. 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

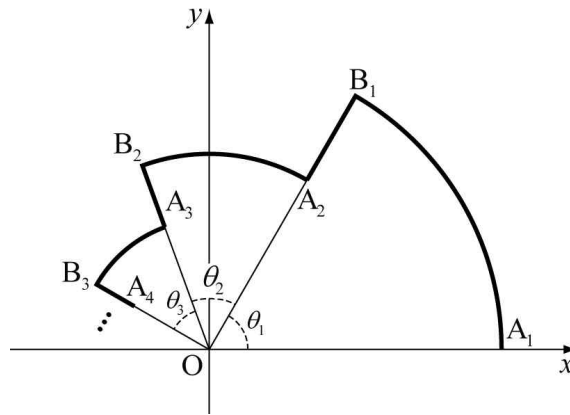
(가) $f(x)=2x$ ($0 \leq x \leq 1$)

(나) 모든 실수 x 에 대하여

$$f(1-x)=f(1+x), f(x)+f(-x)=0 \text{ 이다.}$$

$\int_{-9}^7 \{f(x)+2\}dx$ 의 값을 구하시오.

10. 그림과 같이 원점 O 와 점 $A_1(1, 0)$ 을 이은 선분 OA_1 을 반지름으로 하고 중심각의 크기가 $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 OA_1B_1 을 그린다. 선분 OB_1 을 2:1 로 내분하는 점을 A_2 라 하고, 선분 OA_2 를 반지름으로 하고 중심각의 크기가 $\theta_2 = \frac{5}{6}\theta_1$ 인 부채꼴 OA_2B_2 를 그린다. 선분 OB_2 를 2:1 로 내분하는 점을 A_3 이라 하고, 선분 OA_3 을 반지름으로 하고 중심각의 크기가 $\theta_3 = \frac{5}{6}\theta_2$ 인 부채꼴 OA_3B_3 을 그린다. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 부채꼴 OA_nB_n 의 호 A_nB_n 의 길이를 l_n , 선분 $A_{n+1}B_n$ 의 길이를 k_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} (l_n + k_n) = a\pi + b$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 유리수)



① $\frac{3}{4}$

② $\frac{5}{4}$

③ $\frac{7}{4}$

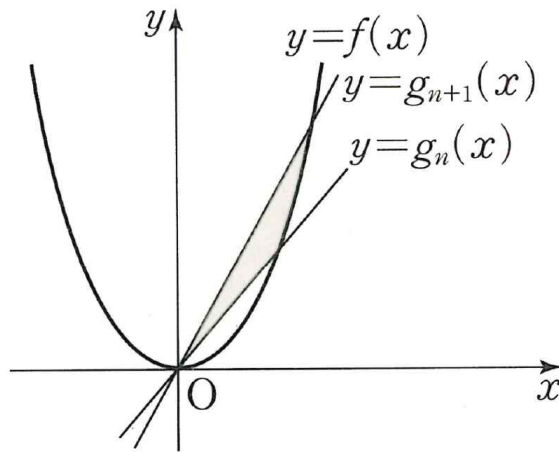
④ $\frac{9}{4}$

⑤ $\frac{11}{4}$

11. 자연수 n 에 대하여 함수 $f(x)=x^2$ 의 그래프와 함수 $g_n(x)=nx$ 의 그래프가 그림과 같을 때,
두 직선 $y=g_n(x)$ 와 $y=g_{n+1}(x)$ 와 곡선 $y=f(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n 이라 할 때, 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n - \frac{1}{6}}$$

의 값은?



- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

12. 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>.

ㄱ. 두 수열 $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$ 이 모두 수렴하면 수열 $\{b_n\}$ 은 수렴한다.

ㄴ. 두 수열 $\left\{\frac{a_n}{n+1}\right\}$, $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$ 이 모두 수렴하면 수열 $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$ 은 수렴한다. (단, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \neq 0$ 이다.)

ㄷ. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n a_n$ 이 수렴하면 수열 $\{a_n\}$ 은 수렴한다.

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

주간 추천사인 12주차 - 3회 미적분 1 : 문항출처

- 1번. 2016. EBS FINAL. 나형. 7회
- 2번. 2014. EBS올림포스 평가문제집. 미적분1. 함수의 연속
- 3번. 2015. 수능특강. 미적분과 통계기본. 부정적분과 정적분
- 4번. (고2) 2010. 9 가형. 23번. 3점
- 5번. 2013. 6 A형. 11번. 3점
- 6번. 2016. 수능특강. 미적분1. 미분계수와 도함수
- 7번. 2015. 수능특강. 미적분과 통계기본. 도함수의 활용(2)
- 8번. 2016. EBS FINAL. 나형. 7회
- 9번. 2016. EBS Final 모의고사. 나형. 4회
- 10번. (고2) 2011. 9 가형. 21번. 4점
- 11번. 2016. EBS FINAL. 나형. 7회
- 12번. (고2) 2009. 9 가형. 20번. 4점

주간 초월살인 12주차 - 3회 미적분 1: 정답 및 해설

1) 정답 ①

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{2x}}{4 - x^2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 - \sqrt{2x})(2 + \sqrt{2x})}{(4 - x^2)(2 + \sqrt{2x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - 2x}{(2 - x)(2 + x)(2 + \sqrt{2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(2 - x)}{(2 - x)(2 + x)(2 + \sqrt{2x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(2 + x)(2 + \sqrt{2x})} = \frac{2}{4 \times 4} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

2) 정답 ②

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x = 1$ 에서도 연속이다. 따라서

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1), \quad \text{즉} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^3 + bx - 1}{(x - 1)^2} = c$$

$x \rightarrow 1$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (ax^3 + bx - 1) = a + b - 1 = 0 \text{이므로 } b = -(a - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^3 - (a - 1)x - 1}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(ax^2 + ax + 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + ax + 1}{x - 1} = c$$

$x \rightarrow 1$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (ax^2 + ax + 1) = 2a + 1 = 0 \text{이므로}$$

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{3}{2} \quad c = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(-x - 2)}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x - 2}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } a + b + c = \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

3) 정답 18

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{3k}{n}\right) &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{3k}{n}\right) \frac{3}{n} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{4 - 1}{n}k\right) \frac{4 - 1}{n} \\ &= \frac{1}{3} \int_1^4 f(x) dx = \frac{1}{3} \int_1^4 (x^2 + 4x + 1) dx = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + x \right]_1^4 \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{64}{3} + 32 + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + 2 + 1\right) \right\} = \frac{54}{3} = 18\end{aligned}$$

4) 정답 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \sqrt{4n^2 + 1}}{n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} + \sqrt{4 + \frac{1}{n^2}}}{1 - \frac{2}{n}} = 2$$

5) 정답 ③

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1$ 이므로 ㄱ은 참.

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = 1$ 이므로 ㄴ은 거짓.

[강남 Orbi] 주간 추천사인

ㄷ. $\square f(2)\square = \square - 1\square = 1$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \square f(x)\square = \square 1\square = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \square f(x)\square = \square - 1\square = 1$$

이므로 $\square f(x)\square$ 는 $x=0$ 에서 연속이다. 따라서 ㄷ은 참. 그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

6) 정답 ③

$$(x^2 - x + 1)f(x) = g(x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $f(1)=g(1)=2$

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 미분가능하므로 ①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$(2x-1)f(x) + (x^2 - x + 1)f'(x) = g'(x) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

②의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $f(1)+f'(1)=g'(1)=6$ 따라서 $f'(1)=6-f(1)=6-2=4$

7) 정답 ④

$$x_1(t) = x_2(t) \text{에서 } 3t^2 - 2t = t^3 - 4t^2 + 4t$$

$$t^3 - 7t^2 + 6t = 0, \quad t(t-1)(t-6) = 0 \quad \therefore t=0 \text{ 또는 } t=1 \text{ 또는 } t=6$$

따라서 두 점 P, Q가 원점을 동시에 출발한 후 두 번째로 만나는 순간은 $t=6$ 일 때이다.

$$x_1(t) = 3t^2 - 2t \text{이므로 시각 } t \text{에서의 점 P의 속도를 } v_1(t) \text{라 하면 } v_1(t) = 6t - 2$$

따라서 $t=6$ 일 때의 점 P의 속도는 $v = 6 \times 6 - 2 = 34$

$$x_2(t) = t^3 - 4t^2 + 4t \text{이므로 시각 } t \text{에서의 점 Q의 속도와}$$

$$\text{가속도를 } v_2(t), a_2(t) \text{라 하면 } v_2(t) = 3t^2 - 8t + 4, a_2(t) = 6t - 8 \text{이므로 } t=6 \text{일 때의}$$

$$\text{점 Q의 가속도는 } a = 6 \times 6 - 8 = 28 \quad \therefore v + a = 34 + 28 = 62$$

8) 정답 20

두 함수 $f(x) = 2x^2$, $g(x) = x^2 + x + 2$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표는 $2x^2 = x^2 + x + 2$ 에서

$$x^2 - x - 2 = 0, \quad (x+1)(x-2) = 0 \quad x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

점 M은 제 1사분면에 있는 점이므로 $x=2$ 이고 $M(2, 8)$ 이다.

그러므로 점 $M(2, 8)$ 을 지나고 기울기가 -1 인 직선 l 의 방정식은

$$y - 8 = -(x - 2) \text{ 즉, } y = -x + 10 \text{ 점 P의 좌표를 } (t, 2t^2) \text{ } (t > 2) \text{이라 하면}$$

점 Q의 좌표는 $(t, t^2 + t + 2)$, 점 R의 좌표는 $(t, -t + 10)$ 이므로

$$\overline{PQ} = 2t^2 - (t^2 + t + 2) = t^2 - t - 2$$

$$\overline{QR} = t^2 + t + 2 - (-t + 10) = t^2 + 2t - 8$$

점 M에서 선분 PR에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\lim_{t \rightarrow 2+} \frac{T(t)}{S(t)} = \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{\frac{1}{2} \times \overline{MH} \times \overline{QR}}{\frac{1}{2} \times \overline{MH} \times \overline{PQ}} = \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{\overline{QR}}{\overline{PQ}} = \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{t^2 + 2t - 8}{t^2 - t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{(t+4)(t-2)}{(t+1)(t-2)} = \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{t+4}{t+1} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\text{따라서 } 10 \times \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{T(t)}{S(t)} = 10 \times 2 = 20$$

9) 정답 32

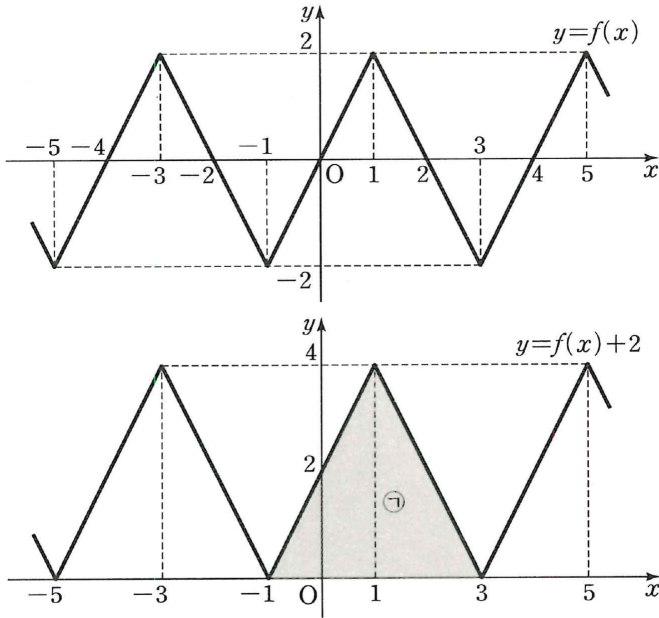
조건 (나)에서 모든 실수 x 에 대하여 $f(1-x) = f(1+x)$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이다.

또한, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) + f(-x) = 0$,

즉 $f(-x) = -f(x)$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

[강남 Orbis] 주간 추천사인

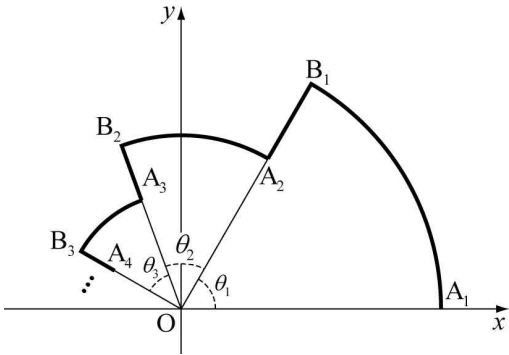
이때 $f(x) = 2x$ ($0 \leq x \leq 1$) 이므로 함수 $y = f(x)$ 와 함수 $y = f(x) + 2$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 색칠된 ㉠과 같은 모양의 삼각형이 $-9 \leq x \leq 7$ 에서 4개 존재하므로

$$\int_{-9}^7 \{f(x) + 2\} dx = 4 \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 4 \right) = 32$$

10) 정답 ③



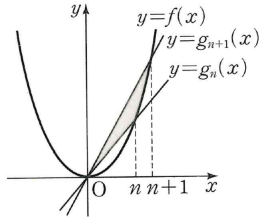
$$\text{수열 } \{l_n\} \text{ 은 } l_1 = \frac{\pi}{3}, \text{ 공비가 } \frac{5}{9} \text{ 인 등비수열이므로 } \sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{\frac{\pi}{3}}{1 - \frac{5}{9}} = \frac{3}{4}\pi$$

$$\text{수열 } \{k_n\} \text{ 은 } k_1 = \frac{1}{3}, \text{ 공비가 } \frac{2}{3} \text{ 인 등비수열이므로 } \sum_{n=1}^{\infty} k_n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (l_n + k_n) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n + \sum_{n=1}^{\infty} k_n = \frac{3}{4}\pi + 1 \quad a = \frac{3}{4}, \quad b = 1 \text{ 이므로 } a + b = \frac{7}{4} \text{ 이다.}$$

11) 정답 ③

두 직선 $y = g_n(x)$ 와 $y = g_{n+1}(x)$ 와 곡선 $y = f(x)$ 가 만나는 점 중 원점이 아닌 점의 x 좌표는 각각 $n, n+1$ 이므로



$$S_n = \int_0^{n+1} \{(n+1)x - x^2\} dx - \int_0^n \{nx - x^2\} dx = \left[\frac{n+1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{n+1} - \left[\frac{n}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^n$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)^3 - \frac{1}{6}n^3 = \frac{1}{6}(3n^2 + 3n + 1) \quad \text{따라서 } S_n - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}n(n+1) \text{ 이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n - \frac{1}{6}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 2$$

12) 정답 ①

ㄱ. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \beta$ 라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n + b_n) - (a_n - b_n)\} = \frac{\alpha - \beta}{2}$ (참)

ㄴ. (반례) $a_n = 1$, $b_n = n$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n}$ 이 모두 존재하지만 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty$ 이다. (거짓)

ㄷ. (반례) $a_n = (-1)^n$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n a_n$ 은 수렴하지만 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 은 존재하지 않는다. (거짓)

주간 초청살인 12주차 - 4회 : 확률과 통계

1. 확률변수 X 가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{7}\right)$ 을 따르고, X 의 평균이 3일 때, n 의 값을 구하십시오.

2. A, B를 포함한 5명을 일렬로 세울 때, A는 맨 앞에서부터 두 번째 이내에 서고 A와 B는 서로 이웃하게 서는 경우의 수는?

① 12

② 14

③ 16

④ 18

⑤ 20

3. 확률변수 x 의 확률분포표가 아래와 같을 때, 확률변수 $2X+5$ 의 평균을 구하십시오.

X	0	1	2	3	계
$P(X)$	$\frac{7}{30}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{7}{30}$	1

4. 두 사건 A, B 가 서로 배반사건이고 $P(A \cup B) = 0.85$, $P(A) = 0.24$ 일 때, $P(B)$ 의 값은 α 이다. 100α 의 값을 구하시오.

5. 100원짜리 동전 8개를 같은 종류의 저금통 3개에 넣으려고 한다. 빈 저금통이 없도록 넣는 경우의 수는?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

6. 어느 회사에서 생산된 야구공의 무게는 평균이 144.9g, 표준편차가 6g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산된 야구공 중 임의로 선택한 야구공 9개 무게의 표본평균 이 141.7g 이상 148.9g 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.6	0.4452
1.7	0.4554
1.8	0.4641
1.9	0.4713
2.0	0.4772

- ① 0.9165 ② 0.9224 ③ 0.9267
④ 0.9282 ⑤ 0.9413

7. 두 사건 A, B 가 서로 독립이고 $P(A^C) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ 일 때, $P(B)$ 의 값은? (단, A^C 은 사건 A 의 여사건이다.)

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

8. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 A 에서 B 로의 함수 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는?

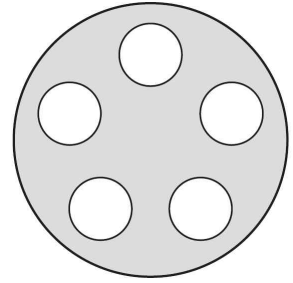
(가) 집합 A 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2 < 3$ 이면 $f(x_1) \geq f(x_2)$ 이고, $3 < x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.
 (나) $f(3) = 3$

- ① 294 ② 301 ③ 308 ④ 315 ⑤ 322

9. 상자 A에는 딸기맛 사탕이 2개, 포도맛 사탕이 4개 있고, 상자 B에는 딸기맛 사탕이 3개, 포도맛 사탕이 3개 있다. 두 상자 A, B에서 각각 임의로 1개씩 사탕을 동시에 꺼내어 같은 맛 사탕이면 먹고, 다른 맛 사탕이면 꺼낸 상자에 다시 넣는 시행을 연속하여 두 번 할 때, 첫 번째 시행과 두 번째 시행에서 뽑은 사탕을 모두 먹을 확률은? (단, 모든 사탕의 크기와 모양은 같다.)

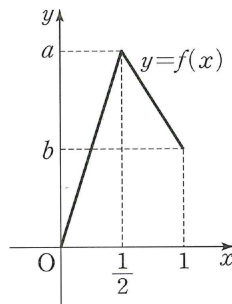
- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{16}{75}$ ③ $\frac{17}{75}$ ④ $\frac{6}{25}$ ⑤ $\frac{19}{75}$

10. 서로 다른 접시 5개와 같은 종류의 박하맛 사탕 3개, 같은 종류의 딸기맛 사탕 2개가 있다. 각 접시에 사탕을 한 개씩 담아 그림과 같은 원형의 식탁의 5곳에 배치하는 경우의 수는? (단, 회전시켜 일치하는 경우는 같은 것으로 본다.)



- ① 210 ② 220 ③ 230 ④ 240 ⑤ 250

11. 연속확률변수 X 가 갖는 값의 범위가 $0 \leq X \leq 1$ 이고 X 의 확률밀도함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq 1\right) = \frac{9}{10}$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 양수이다.)

- ① $\frac{8}{5}$ ② $\frac{9}{5}$ ③ 2 ④ $\frac{11}{5}$ ⑤ $\frac{12}{5}$

12. 어느 공장에서 생산하는 제품의 무게는 모평균이 m , 모 표준편차가 $\frac{1}{2}$ 인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 제품 중에서 25개를 임의추출하여 신뢰도 95%로 추정한 모평균 m 에 대한 신뢰구간이 $[a, b]$ 일 때, $P(|Z| \leq c) = 0.95$ 를 만족시키는 c 를 a, b 로 나타낸 것은? (단, 확률변수 Z 는 표준정규분포를 따른다.)

- ① $3(b-a)$ ② $\frac{7}{2}(b-a)$ ③ $4(b-a)$ ④ $\frac{9}{2}(b-a)$ ⑤ $5(b-a)$

주간 추천살인 12주차 — 4회 확률과 통계 : 문항출처

- 1번. 2013. 10. B형. 23번. 3점
- 2번. 2016. 수능특강. 확률과 통계. 순열
- 3번. 2005. 4. 가형. 18번. 3점
- 4번. 2016. 4. 가형. 23번. 3점
- 5번. 2016. 수능특강. 확률과 통계. 이항정리와 분할
- 6번. 2015. 10. A형. 11번. 3점
- 7번. 2016. EBS Final 나형. 1회
- 8번. 2016. EBS FINAL. 나형. 7회
- 9번. 2016. EBS FINAL. 나형. 7회
- 10번. 2016. 수능특강. 확률과 통계. 순열
- 11번. 2016. EBS FINAL. 나형. 7회
- 12번. 2012. 9. 나형. 20번. 4점

주간 추천살인 12주차 - 4회 확률과 통계 : 정답 및 해설

1) 정답 21

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{7}\right)$ 을 따르므로 $E(X) = \frac{n}{7} = 3 \therefore n = 21$

2) 정답 ④

A의 위치에 따라 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

A	B			
---	---	--	--	--

(i) A가 첫 번째에 서는 경우

B는 두 번째에 서야 하므로 나머지 3명을 오른쪽 그림의 칸에 일렬로 나열하면 된다.

그러므로 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 순열의 수이므로

$${}_3P_3 = 3! = 6$$

B	A			
	A	B		

(ii) A가 두 번째에 서는 경우

B는 첫 번째 또는 세 번째에 서야 하고, 이 각각에 대하여 나머지 3명을 오른쪽 그림의 칸에 일렬로 나열하면 된다.

그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해 $2 \times {}_3P_3 = 2 \times 3! = 12$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해 $6 + 12 = 18$

3) 정답 8

$$E(X) = 1 \times \frac{4}{15} + 2 \times \frac{4}{15} + 3 \times \frac{7}{30} = \frac{45}{30} = \frac{3}{2} \text{ 이므로 } E(2X+5) = 2E(X) + 5 = 8$$

4) 정답 61

두 사건 A, B 가 서로 배반사건이므로 $P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0.61$ 따라서 $\alpha = 0.61$ 이고 $100\alpha = 61$

5) 정답 ③

구하는 경우의 수는 자연수 8을 세 개의 자연수로 분할하는 경우의 수 $P(8, 3)$ 과 같다.

$$8 = 6 + 1 + 1 = 5 + 2 + 1 = 4 + 3 + 1 = 4 + 2 + 2 = 3 + 3 + 2 \text{ 이므로 } P(8, 3) = 5$$

6) 정답 ②

임의로 추출된 야구공 9개 무게의 평균을 $\bar{X}$ 라 하면, $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(144.9, 2^2)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} & P(141.7 \leq \bar{X} \leq 148.9) \\ &= P\left(\frac{141.7 - 144.9}{2} \leq Z \leq \frac{148.9 - 144.9}{2}\right) = P(-1.6 \leq Z \leq 2) = P(0 \leq Z \leq 1.6) + P(0 \leq Z \leq 2) = 0.9224 \end{aligned}$$

7) 정답 ②

$$P(A^c) = \frac{1}{4} \text{ 에서}$$

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로 $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ 에서

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times P(B) = \frac{1}{3} \text{ 따라서 } P(B) = \frac{4}{9}$$

8) 정답 ④

조건 (가), (나)에 의하여 함수 f 는 $f(1) \geq f(2)$, $f(3) = 3$, $f(4) < f(5)$

를 만족시켜야 한다. 따라서 집합 $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 1부터 6까지의 6개의 수 중에서 중복을 허락하여 2개를 뽑아 큰 수부터 차례대로 $f(1), f(2)$ 에 대응시키고, 3은 $f(3)$ 에 대응시키고, 1부터 6까지의 6개의 수 중에서 서로 다른 2개를 뽑아 작은 수부터 차례대로 $f(4), f(5)$ 에 대응시키면 된다.

$$\text{따라서 구하는 함수 } f \text{의 개수는 } {}_6H_2 \times 1 \times {}_6C_2 = {}_7C_2 \times 1 \times {}_6C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} \times 1 \times \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 315$$

9) 정답 ⑤

첫 번째 시행과 두 번째 시행에서 뽑은 사탕을 모두 먹을 확률은 첫 번째 시행과 두 번째 시행에서 모두 같은 맛 사탕을 뽑을 확률과 같다.

첫 번째 시행에서 같은 맛 사탕을 뽑을 확률

$$(i) \text{ 상자 A에서 딸기맛 사탕, 상자 B에서 딸기맛 사탕을 뽑을 확률은 } \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

$$(ii) \text{ 상자 A에서 포도맛 사탕, 상자 B에서 포도맛 사탕을 뽑을 확률은 } \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{6}$$

두 번째 시행에서도 같은 맛 사탕을 뽑을 확률

(i)인 경우가 일어나고 두 번째 시행에서 상자 A에서 딸기맛 사탕, 상자 B에서 딸기맛 사탕을 뽑을 확률은

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{150}$$

(i)인 경우가 일어나고 두 번째 시행에서 상자 A에서 포도맛 사탕, 상자 B에서 포도맛 사탕을 뽑을 확률은

$$\frac{1}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{150}$$

(ii)인 경우가 일어나고 두 번째 시행에서 상자 A에서 딸기맛 사탕, 상자 B에서 딸기맛 사탕을 뽑을 확률은

$$\frac{2}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{150}$$

(ii)인 경우가 일어나고 두 번째 시행에서 상자 A에서 포도맛 사탕, 상자 B에서 포도맛 사탕을 뽑을 확률은

$$\frac{2}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{150}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{2}{150} + \frac{12}{150} + \frac{12}{150} + \frac{12}{150} = \frac{38}{150} = \frac{19}{75}$$

10) 정답 ④

접시를 원형으로 배열하는 경우의 수는 $(5-1)! = 4! = 24$

이 각각에 대하여 박하맛 사탕 3개, 딸기맛 사탕 2개를 배열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{3!2!} = 10$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해 $24 \times 10 = 240$

11) 정답 ⑤

$f(x)$ 가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times a + \frac{1}{2} \times (a+b) \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b = 1 \quad 2a + b = 4 \dots\dots ㉠$$

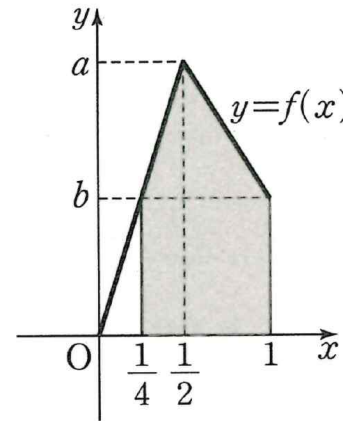
확률 $P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq 1\right)$ 은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq 1\right) = 1 - P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{4}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{a}{2} = 1 - \frac{a}{16} = \frac{9}{10}$$

$$\frac{a}{16} = \frac{1}{10}, \quad a = \frac{8}{5}$$

$$a = \frac{8}{5} \text{을 } ㉠ \text{에 대입하면 } 2 \times \frac{8}{5} + b = 4, b = \frac{4}{5} \text{ 따라서 } a+b = \frac{8}{5} + \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$$



12) 정답 ⑤

정규분포 $N\left(m, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$ 을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기 25인 표본의 표본평균을 $\bar{X}$ 라 할 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도

95%의 신뢰구간은 $P(|Z| \leq c) = 0.95$ 에서

$$\left[\bar{X} - c \times \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{25}}, \bar{X} + c \times \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{25}} \right] \left[\bar{X} - \frac{c}{10}, \bar{X} + \frac{c}{10} \right] \text{에서 } a = \bar{X} - \frac{c}{10}, b = \bar{X} + \frac{c}{10} \quad \therefore c = 5(b-a)$$

주간
초청살인