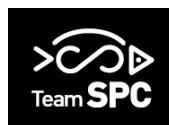


주간 초철살인

TRACK 1 - 9주차 (이과-)



Orbi Class

미친한 수학자

암기와 논리의 차이

논리도 결국 기억에 의존합니다.

하지만 그 기억들이 서로 연결성을 가지고 있다면 이것을 우리는 논리라고 합니다.

그래서 중간에 기억이 소실되더라도 추론을 통해서 기억을 되살릴 수 있습니다.

수학은 이러한 논리가 극대화 된 과목입니다.

아무리 어려워 보이는 문제라고 할지라도 분석하고 또 분석하면

결국 그 뿌리는 가장 기본적인 내용에 있음을 알게 됩니다.

교과서는 그러한 논리의 출발점을 알려줍니다.

그리고 우리는 그것을 개념이라고 합니다.

모든 기출문제는 반드시 교과서 개념을 통해서 풀립니다.

사고력은 근력과 같아서 꾸준한 훈련이 필요합니다.

목표에 따라서 훈련량과 방식도 달라야 합니다.

주간 춘철살인은 2개의 TRACK으로 진행됩니다.

<TRACK 1>를 통해 전 범위 핵심 내용을 확인할 수 있도록 구성하였습니다.

<TRACK 2>는 초고난도 사고력 문제로 <TRACK 1>과 병행하여야 의미가 있습니다.

<TRACK 2>는 9월 이후에 진행합니다.

- TRACK 1 : 1등급을 위한 지속적 훈련
- TRACK 2 : 100점을 위한 고강도 훈련 (강의)



TWO TRACK

TRACK 1	TRACK 2
1등급을 위한 지속적 훈련 주당 총 4회분 (전범위 복습) - 월, 수, 금, 일 각 1회차씩만 풀 것. (회당 시간은 40분)	100점을 위한 고강도 훈련 주당 총 10문항 - 하루에 1~2문제 정도를 깊이 고민할 것. (제한시간 없음.) - 다음날 한 번 더 고민한 후 수업에 들어올 것.

범위와 순서는 조금씩 달라질 수 있습니다.

주간 추천살인 9주차 - 1회 : 미적분 1

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n(2^{n+1}+1)}{4^{n+1}+2^n+1}$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ 2

⑤ 4

2. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{5n}{n+1}\right)$ 이 수렴할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n+3}{a_n-1}$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

3. $\int_0^a (4x-3)dx = 5$ 를 만족시키는 양수 a 의 값은?

① $\frac{3}{2}$

② 2

③ $\frac{5}{2}$

④ 3

⑤ $\frac{7}{2}$

4. 함수 $f(x) = x^3 - 2x + 5$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4} \int_2^x f(t) dt$ 의 값은?

① 2

② $\frac{9}{4}$

③ $\frac{5}{2}$

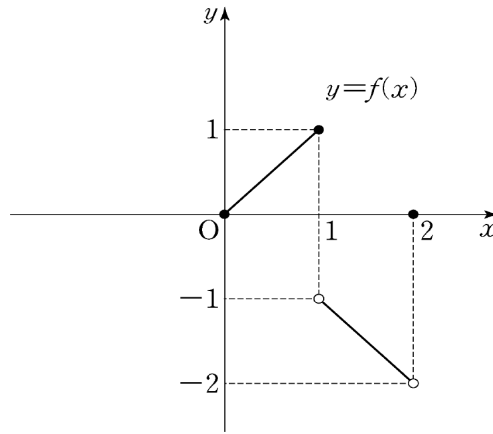
④ $\frac{11}{4}$

⑤ 3

5. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < 1) \\ x^4 + 6 & (x \geq 1) \end{cases}$ 이라 하자.

함수 $g(x)$ 가 $x = 1$ 에서 미분가능할 때, $g(-2)$ 의 값을 구하시오.

6. 정의역이 $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$ 인 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 구간 $[0, 2]$ 에서 그림과 같고, 정의역에 속하는 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 이다. $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$ 의 값은?



- ① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

7. 함수 $f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-x)^k}{k}$ 에 대하여 $f'(1)=0$ 을 만족시키는 100 이하의 자연수 n 의 개수를 구하시오.

8. 수열의 극한에 대하여 항상 옳은 것을 <보기>에서 모두 고르면?

< 보기 >

㉠. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$ (일정) 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$ 이다.

㉡. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \beta$ (일정) 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ 이다.

㉢. 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n < c_n < b_n$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ 이다.

① ㉠

② ㉢

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

9. 두 함수 $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 12, g(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + a$ 에 대하여 방정식 $f(x) = g(x)$ 가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 모든 정수 a 의 개수는?

① 25

② 27

③ 29

④ 31

⑤ 33

10. 함수 $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ 에 대하여 $\int_{-3}^1 f(x)dx - \int_3^1 f(x)dx$ 의 값은?

① 39

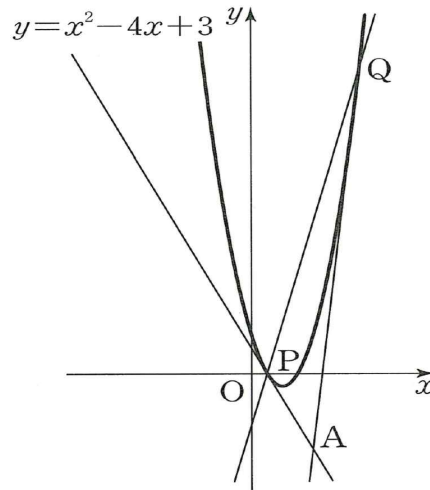
② 42

③ 45

④ 48

⑤ 51

11. 그림과 같이 점 $A(4, -6)$ 에서 곡선 $y = x^2 - 4x + 3$ 에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라 하자. 직선 PQ와 곡선 $y = x^2 - 4x + 3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는?



① 30

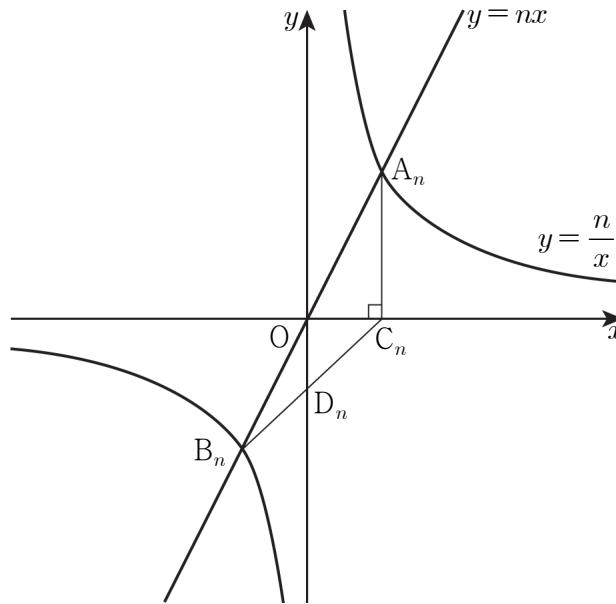
② 32

③ 34

④ 36

⑤ 38

12. 그림과 같이 자연수 n 에 대하여 $y = nx$, $y = \frac{n}{x}$ 의 그래프의 두 교점을 각각 A_n , B_n , 점 A_n 에서 x 축에 내린 수선의 발을 C_n , 선분 B_nC_n 과 y 축과의 교점을 D_n 이라 하자. 사다리꼴 $OD_nC_nA_n$ 의 넓이를 S_n , 삼각형 OB_nD_n 의 넓이를 T_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n + n}{S_n + n + 1}$ 의 값은?



- ① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{3}{7}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

주간 추천살인 9주차 - 3회 미적분 1 : 문항출처

- 1번. (고2) 2007. 9 가형. 3번. 2점
- 2번. 2015. 3. A형. 8번. 3점
- 3번. 2015. 수능특강. 미적분과 통계기본. 부정적분과 정적분
- 4번. 2015. 수능특강. 미적분과 통계기본. 부정적분과 정적분
- 5번. 2016. 수능특강. 미적분1. 미분계수와 도함수
- 6번. 2013. 9. A형. 15번. 4점
- 7번. 2016. 수능특강. 미적분1. 미분계수와 도함수
- 8번. (고2) 2006. 11 가형. 11번. 3점
- 9번. 2015. 수능특강. 미적분과 통계기본. 도함수의 활용(2)
- 10번. 2016. EBS Final 모의고사. 나형. 2회
- 11번. 2016. EBS Final 모의고사. 나형. 2회
- 12번. (고2) 2007. 11 가형. 14번. 4점

주간 초월살인 9주차 - 1회 미적분 1: 정답 및 해설

1) 정답 ②

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n(2^{n+1}+1)}{4^{n+1}+2^n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+1}+2^n}{2^{2n+2}+2^n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2^{2n}+2^n}{4 \cdot 2^{2n}+2^n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{2^n}}{4+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{2n}}} = \frac{1}{2}$$

2) 정답 ⑤

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{5n}{n+1}\right)$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{5n}{n+1}\right) = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n+1} = 5$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n+3}{a_n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - \frac{5n}{n+1} + \frac{5n}{n+1} + 3}{a_n - \frac{5n}{n+1} + \frac{5n}{n+1} - 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{5n}{n+1}\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} 3}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{5n}{n+1}\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} 1} = \frac{0+5+3}{0+5-1} = 2$$

3) 정답 ③

$$\int_0^a (4x-3)dx = \left[2x^2-3x\right]_0^a = (2a^2-3a)-0=5$$

$$2a^2-3a-5=0 \quad (2a-5)(a+1)=0 \therefore a=\frac{5}{2} \quad (\because a>0)$$

4) 정답 ②

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2-4} \int_2^x f(t)dt = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+2)(x-2)} \int_2^x f(t)dt = \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{1}{x+2} \times \frac{1}{x-2} \int_2^x f(t)dt \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_2^x f(t)dt = \frac{1}{4} f(2) = \frac{1}{4} (8-4+5) = \frac{9}{4}$$

5) 정답 4

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1 이므로 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b 는 상수)로 놓을 수 있다.

(i) 함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다. 즉, $\lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = g(1)$ 에서

$$f(1)=1+a+b=7, \quad b=-a+6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) 미분계수 $g'(1)$ 이 존재하므로 $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)-7}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x^2+ax-a+6)-7}{x-1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} (x+a+1) = 2+a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x^4+6)-7}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^4-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} (x+1)(x^2+1) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} \text{에서} \quad 2+a=4, \quad a=2$$

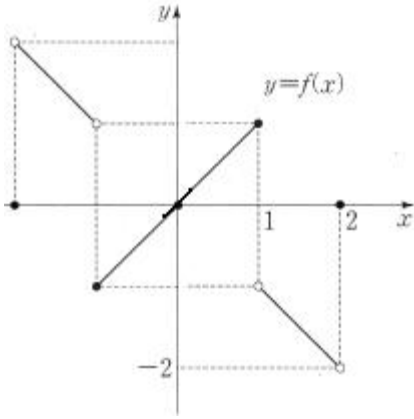
$a=2$ 를 ①에 대입하면 $b=4$

[강남 Orbi] 주간 추천상인

따라서 함수 $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 4 & (x < 1) \\ x^4 + 6 & (x \geq 1) \end{cases}$ 이므로 $g(-2) = 4 - 4 + 4 = 4$

6) 정답 ①

문제의 주어진 그래프와 $f(-x) = -f(x)$ 은 기함수라는 의미이며 원점에 대하여 대칭인 모양의 그래프이므로 아래와 같다.



$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = -2, -1 + (-2) = -3 \therefore -3$$

7) 정답 50

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-x)^k}{k} = -x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 + \dots + \frac{(-1)^n}{n}x^n$$

$$f'(x) = -1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + \dots + (-1)^n x^{n-1}$$

$$\text{따라서 } f'(1) = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n \text{ 이므로 } f'(1) = \begin{cases} -1 & (n \text{ 이 홀수}) \\ 0 & (n \text{ 는 짝수}) \end{cases}$$

$f'(1) = 0$ 이려면 n 은 짝수이어야 하므로 구하는 100 이하의 자연수 n 의 개수는 50 이다.

8) 정답 ③

$$\neg. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha (\text{일정}) \text{ 이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0 \quad (\text{참})$$

$$\neg. \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n - (a_n - b_n)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \beta \quad (\text{참})$$

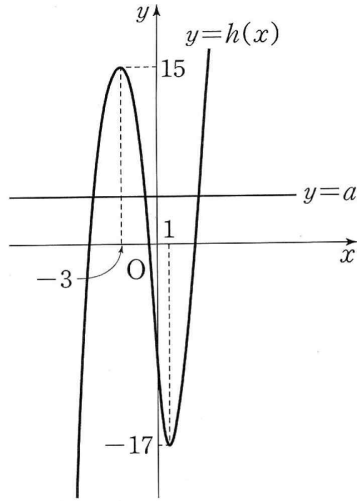
$$\neg. \text{ 반례) } a_n = n - \frac{1}{n}, b_n = n + \frac{1}{n}, c_n = n \text{ 이면, } \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0 \text{ 이지만 } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty \quad (\text{거짓})$$

9) 정답 ④

$$f(x) = g(x) \text{ 에서 } 2x^3 + x^2 - 4x - 12 = x^3 - 2x^2 + 5x + a \therefore x^3 + 3x^2 - 9x - 12 = a$$

방정식 $x^3 + 3x^2 - 9x - 12 = a$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 12$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점의 개수와 같다. $h(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 12$ 로 놓으면 $h'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$ 이므로 $h'(x) = 0$ 에서 $x = -3$ 또는 $x = 1$ 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	1	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↗	15	↘	-17	↗



함수 $y = h(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로 함수 $y = h(x)$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 서로 다른 세 점에서 만나려면 $-17 < a < 15$ 이어야 한다. 따라서 정수 a 는 $-16, -15, \dots, 14$ 의 31 개다.

10) 정답 ②

$$\begin{aligned} \int_{-3}^1 f(x)dx - \int_3^1 f(x)dx &= \int_{-3}^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx = \int_{-3}^3 f(x)dx = \int_{-3}^3 (4x^3 + 2x^2 - 3x + 1)dx \\ &= \int_{-3}^3 (2x^2 + 1)dx = 2 \int_0^3 (2x^2 + 1)dx = 2 \left[\frac{2}{3}x^3 + x \right]_0^3 = 2(18 + 3) = 42 \end{aligned}$$

11) 정답 ④

접점을 $T(t, t^2 - 4t + 3)$ 이라 하면 $y' = 2x - 4$ 이므로 점 T 에서의 접선의 방정식은 $y - (t^2 - 4t + 3) = (2t - 4)(x - t)$
 접선이 점 $A(4, -6)$ 을 지나므로 $-6 - (t^2 - 4t + 3) = (2t - 4)(4 - t)$ 이 식을 정리하면 $t^2 - 8t + 7 = 0$
 $(t - 1)(t - 7) = 0$ $t = 1$ 또는 $t = 7$

$P(1, 0)$, $Q(7, 24)$ 이므로 직선 PQ 의 방정식은 $y - 0 = \frac{24 - 0}{7 - 1}(x - 1)$, $y = 4x - 4$ 따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_1^7 \{(4x - 4) - (x^2 - 4x + 3)\}dx = \int_1^7 (-x^2 + 8x - 7)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 7x \right]_1^7 = 36$$

12) 정답 ④

$nx = \frac{n}{x}$ 에서 $x = \pm 1$ 이므로 두 그래프의 교점 $A_n(1, n)$, $B_n(-1, -n)$ 이고 $C_n(1, 0)$ 이다.

직선 B_nC_n 의 방정식은 $y = \frac{n}{2}(x - 1)$ 이므로 $D_n\left(0, -\frac{n}{2}\right)$ 이다. 따라서 $S_n = \frac{1}{2} \square \square \left(\frac{n}{2} + n\right) = \frac{3}{4}n$

$$T_n = \frac{1}{2} \square \square \frac{n}{2} = \frac{n}{4} \therefore (\text{준식}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{4} + n}{\frac{3}{4}n + n + 1} = \frac{5}{7}$$

[강남 Orbi] 주간 초월살인

주간 초월살인 9주차 - 2회 : 미적분 2

1. 함수 $f(x) = 4 \sin 7x$ 에 대하여 $f'(2\pi)$ 의 값을 구하시오.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{\sin 3x}$ 의 값은?

① 1

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{5}{3}$

④ 2

⑤ $\frac{7}{3}$

3. 함수 $f(x) = \ln x - x$ 에 대하여 $f'\left(\frac{1}{10}\right)$ 의 값을 구하시오.

4. 두 함수 $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$ 에 대하여 $f'(0)$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ 2

⑤ 4

5. $\int_1^e \ln x dx$ 의 값은?

① $\frac{1}{e}$

② 1

③ 2

④ e

⑤ 3

6. 정의역이 $\{x | -1 \leq x \leq 3\}$ 인 두 지수함수 $f(x) = 4^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최댓값을 M , $g(x)$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, Mm 의 값은?

① 8

② 6

③ 4

④ 2

⑤ 1

7. 로그부등식 $\log_2 x \leq \log_4 (12x + 28)$ 을 만족시키는 자연수 x 의 개수를 구하시오.

8. 곡선 $y = \ln(x+1)$ 과 y 축 및 두 직선 $y=1$, $y=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는?

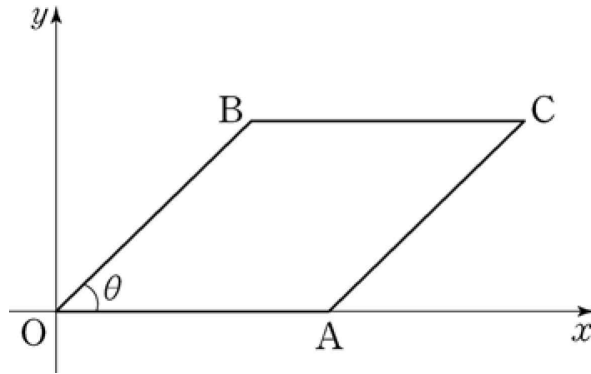
- ① $e^2 - e - 1$ ② $e^2 - e$ ③ $e^2 - e + 1$ ④ $e^2 + e - 1$ ⑤ $e^2 + e$

9. 연속함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시킨다.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(2 + \frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} = 3$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(-3 + \frac{2k}{n}\right) \frac{1}{n} = -5$ 일 때, $\int_1^{\sqrt{2}} x f(x^2) dx$ 의 값은?

- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

10. 좌표평면에서 점 A의 좌표는 $(1, 0)$ 이고, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 인 θ 에 대하여 점 B의 좌표는 $(\cos \theta, \sin \theta)$ 이다. 사각형 OACB가 평행사변형이 되도록 하는 제1사분면 위의 점 C에 대하여 사각형 OACB의 넓이를 $f(\theta)$, 선분 OC의 길이의 제곱을 $g(\theta)$ 라 하자. $f(\theta) + g(\theta)$ 의 최댓값은? (단, O는 원점이다.)



- ① $2 + \sqrt{5}$ ② $2 + \sqrt{6}$ ③ $2 + \sqrt{7}$ ④ $2 + 2\sqrt{2}$ ⑤ 5

11. 양의 실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = f(x) \ln x^4$ 이라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(e, -e)$ 에서의 접선과 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(e, -4e)$ 에서의 접선이 서로 수직일 때, $100f'(e)$ 의 값을 구하시오.

12. 정의역이 $\left\{x \mid 0 < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ 인 함수 $f(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right) dt$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \ln \frac{p}{\pi}$ 이다.
상수 p 의 값을 구하시오.

주간 추천살인 9주차 — 2회 미적분 2 : 문항출처

- 1번. 2015. 11. B형. 23번. 3점
- 2번. 2015. 11. B형. 2번. 2점
- 3번. 2014. 10. B형. 22번. 3점
- 4번. 2016. EBS FINAL. 가형. 1회
- 5번. 2016. EBS FINAL. 가형. 2회
- 6번. 2006. 11. 나형. 4번. 3점
- 7번. 2009. 11. 나형. 20번. 3점
- 8번. 2016. 수능특강. 미적분2. 정적분의 활용
- 9번. 2016. EBS FINAL. 가형. 2회
- 10번. 2015. 11. B형, 15번, 4점
- 11번. 2014. 6. B형. 26번. 4점
- 12번. 2016. EBS FINAL. 가형. 2회

주간 총체살인 9주차 - 2회 미적분 2 : 정답 및 해설

1) 정답 28

$$f(x) = 4\sin 7x \text{ 이므로 } f'(x) = 28\cos 7x \text{ 따라서 } f'(2\pi) = 28\cos(14\pi) = 28$$

2) 정답 ③

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{\sin 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+5x)}{5x} \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{5}{3} \right\} = \frac{5}{3} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{5x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 3x} \\ &= \frac{5}{3} \times 1 \times 1 = \frac{5}{3}\end{aligned}$$

3) 정답 9

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 \text{ 이므로 } f'\left(\frac{1}{10}\right) = 10 - 1 = 9 \text{ 이다.}$$

4) 정답 ③

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1} \text{ 에서 } f'(x) = \frac{\cos x \times (x^2 + 1) - \sin x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} \text{ 이므로 } f'(0) = \frac{\cos 0 \times 1 - \sin 0 \times 0}{1^2} = 1$$

5) 정답 ②

$$f(x) = \ln x, \quad g'(x) = 1 \text{ 로 놓으면 } f'(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = x \text{ 이므로}$$

$$\int_1^e \ln x \, dx = \left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{x} \times x \right) dx = \left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e dx = \left[x \ln x \right]_1^e - \left[x \right]_1^e = e - (e - 1) = 1$$

6) 정답 ①

$$f(x) \text{ 는 } x=3 \text{ 일 때 최대값 } M=4^3=64 \text{ 를 갖고, } g(x) \text{ 는 } x=3 \text{ 일 때 최소값 } m=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8} \text{ 을 갖는다.}$$

$$\therefore Mm = 8$$

7) 정답 14

로그의 진수의 조건에서 $x > 0$, $12x + 28 > 0$ 이므로 $x > 0 \dots\dots ㉠$

$$\text{주어진 로그부등식은 } \log_2 x \leq \frac{\log_2(12x+28)}{\log_2 4}$$

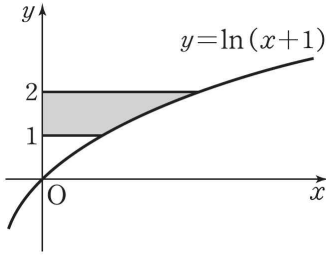
$$\log_2 x^2 \leq \log_2(12x+28) \text{ 이다. 따라서 } x^2 \leq 12x+28, \quad x^2 - 12x - 28 \leq 0$$

$$(x-14)(x+2) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq x \leq 14 \dots\dots ㉡ \quad ㉠, ㉡ \text{ 에서 } 0 < x \leq 14$$

따라서 주어진 로그부등식을 만족하는 자연수 x 의 개수는 14(개)이다.

8) 정답 ①

$$y = \ln(x+1) \text{ 에서 } x+1 = e^y, \quad \text{즉 } x = e^y - 1$$



따라서 위의 그림에서 곡선 $y = \ln(x+1)$ 과 y 축 및 두 직선 $y = 1$, $y = 2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_1^2 |e^y - 1| dy = \int_1^2 (e^y - 1) dy = \left[e^y - y \right]_1^2 = (e^2 - 2) - (e - 1) = e^2 - e - 1$$

9) 정답 ⑤

연속함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키므로 임의의 양의 실수 a 에 대하여 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ 이 성립한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(2 + \frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} = \int_2^3 f(x) dx = 3,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(-3 + \frac{2k}{n}\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(-3 + \frac{2k}{n}\right) \frac{2}{n} = \frac{1}{2} \times \int_{-3}^{-1} f(x) dx = -5$$

$$\text{에서 } \int_{-3}^{-1} f(x) dx = -10$$

$$\int_{-3}^3 f(x) dx = \int_{-3}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx \text{에서 } \int_{-3}^3 f(x) dx = 0, \int_{-1}^1 f(x) dx = 0 \text{이므로}$$

$$0 = -10 + 0 + \int_1^2 f(x) dx + 3 \text{ 즉, } \int_1^2 f(x) dx = 7 \text{ 한편, } \int_1^{\sqrt{2}} x f(x^2) dx \text{에서 } x^2 = t \text{로 놓으면 } x = 1 \text{일 때}$$

$$t = 1, x = \sqrt{2} \text{일 때 } t = 2 \text{이고 } 2x = \frac{dt}{dx} \text{ 따라서 } \int_1^{\sqrt{2}} x f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \times 7 = \frac{7}{2}$$

10) 정답 ①

$$\text{사각형 } OABC \text{가 평행사변형이므로 } f(\theta) = 2 \times \triangle OAB = 2 \times \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} \times \sin \theta$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \times \sin \theta = \sin \theta$$

또, 평행사변형 $OABC$ 의 대각선의 중점은 일치하므로 C 의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$\left(\frac{\cos \theta + 1}{2}, \frac{\sin \theta}{2} \right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) \quad \therefore a = \cos \theta + 1, b = \sin \theta \quad \therefore C(\cos \theta + 1, \sin \theta)$$

$$\text{그러므로 } g(\theta) = \overline{OC}^2 = (\cos \theta + 1)^2 + \sin^2 \theta = 2 + 2\cos \theta$$

$$\text{그러므로 } f(\theta) + g(\theta) = \sin \theta + (2 + 2\cos \theta) = 2\cos \theta + \sin \theta + 2 = \sqrt{5} \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \cos \theta + \frac{\sqrt{5}}{5} \sin \theta \right) + 2$$

$$= \sqrt{5} \sin(\theta + \alpha) + 2 \left(\text{단, } \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$$

따라서 $f(\theta) + g(\theta)$ 의 최댓값은 $\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$ 즉, $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ 일 때, $\sqrt{5} + 2$ 을 갖는다.

[강남 Orbi] 주간 총정리

11) 정답 50

점 $(e, -e)$ 는 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(e)=-e$

$y=f(x)$ 위의 점 $(e, -e)$ 에서의 접선의 기울기를 $f'(e)=a$ 라 하자. $y=g(x)$ 를 미분하면

$g'(x)=f'(x) \cdot \ln x^4 + f(x) \cdot \frac{4}{x}$ 이고 $y=g(x)$ 위의 점 $(e, -4e)$ 에서의 접선의 기울기

$$g'(e)=f'(e) \cdot \ln e^4 + f(e) \cdot \frac{4}{e}=4a-4$$

$x=e$ 에서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 접선이 수직이므로 $f'(e) \times g'(e)=-1 \Leftrightarrow a(4a-4)=-1 \Leftrightarrow 4a^2-4a+1=0$

$$\Leftrightarrow (2a-1)^2=0 \therefore a=\frac{1}{2} \therefore 100f'(e)=100a=50$$

12) 정답 4

$$\int \frac{1}{\sin t} dt = \int \frac{\sin t}{\sin^2 t} dt = \int \frac{\sin t}{1-\cos^2 t} dt \quad \cos t = k \quad (0 < k < 1) \text{로 놓으면 } -\sin t \frac{dt}{dk} = 1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin t} dt &= -\int \frac{1}{1-k^2} dk = -\int \frac{1}{(1+k)(1-k)} dk = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+k} + \frac{1}{1-k} \right) dk \\ &= -\frac{1}{2} \{ \ln(1+k) - \ln(1-k) \} + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) = \frac{1}{2} \{ \ln(1-k) - \ln(1+k) \} + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1-k}{1+k} + C = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos t}{1+\cos t} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int_x^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) dt = \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos t}{1+\cos t} - \ln t \right]_x^{\frac{\pi}{2}} = -\ln \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \ln x \\ &= -\ln \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x} - \ln x^2 \right) = -\ln \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos x}{x^2(1+\cos x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{한편, } \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{(1+\cos x)} \\ &= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{이므로} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \left\{ -\ln \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos x}{x^2(1+\cos x)} \right\} = -\ln \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{4} = -\left(\ln \frac{\pi}{2} + \ln \frac{1}{2} \right) = -\ln \frac{\pi}{4} = \ln \frac{4}{\pi}$$

따라서 구하는 상수 p 의 값은 4이다.

주간 추천살인 9주차 - 3회 : 기하와 벡터

1. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이 점 $(5, 3)$ 을 지나고 두 점근선의 방정식이 $y = x$, $y = -x$ 이다. 이 쌍곡선의 주축의 길이를 구하시오. (단, a , b 는 상수이다.)

2. 두 벡터 $\vec{a} = (-1, 2)$, $\vec{b} = (3, 1)$ 에 대하여 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 의 값은?

- ① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{11}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

3. 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$, $|2\vec{a} + \vec{b}| = 4$ 를 만족시킬 때, 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 이루는 각을 θ 라 하자. $\cos\theta$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{3}{16}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{3}{8}$

4. 좌표공간에서 직선 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z-2$ 가 평면 $z=4$ 와 만나는 점의 좌표를 (a, b, c) 라 할 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 11

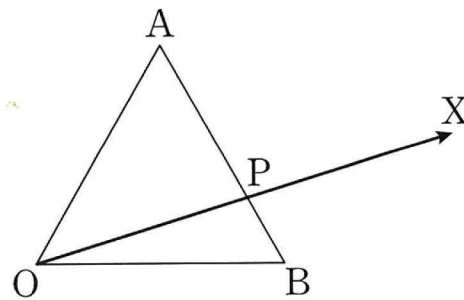
② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

5. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 AOB의 변 AB위를 점 P가 움직일 때, 점 X는 $\overrightarrow{OX} = 2\overrightarrow{OP}$ 를 만족시킨다. 벡터 $\overrightarrow{OX}$ 의 종점 X가 나타내는 도형의 길이를 구하시오.



6. 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD에서 두 점 P, Q가 $\overrightarrow{3AP} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{3CQ} = \vec{0}$ 를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{DQ}|$ 의 값은?

① 0

② 1

③ $\sqrt{2}$

④ $\sqrt{3}$

⑤ 2

7. 좌표공간에 구 $(x-1)^2 + (y-7)^2 + (z-2)^2 = 9$ 와 구 밖의 한 점 $A(1, 3, 5)$ 가 있다. 점 A에서 이 구에 그은 접선들의 접점으로 이루어진 도형을 포함하는 평면과 xy 평면이 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos\theta$ 의 값은?

① $\frac{3}{10}$

② $\frac{2}{5}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{3}{5}$

⑤ $\frac{7}{10}$

8. 매개변수 t 로 나타내어진 곡선 $x = \frac{t-2}{t+1}$, $y = \frac{t^2+1}{t+1}$ 위의 점 $(-2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는?

① $-\frac{3}{2}$

② -1

③ $-\frac{2}{3}$

④ $-\frac{1}{2}$

⑤ $-\frac{1}{3}$

9. 타원 $2x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $y = 3x$ 가 만나는 점에서의 타원 $2x^2 + y^2 = 1$ 의 접선의 기울기는?

① $-\frac{5}{3}$

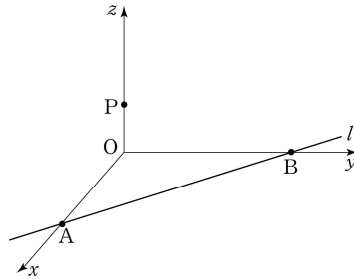
② $-\frac{4}{3}$

③ -1

④ $-\frac{2}{3}$

⑤ $-\frac{1}{3}$

10. 좌표공간에서 두 점 $A(1, 0, 0), B(0, \sqrt{3}, 0)$ 을 지나는 직선 l 이 있다. 점 $P\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ 로부터 직선 l 에 이르는 거리는?

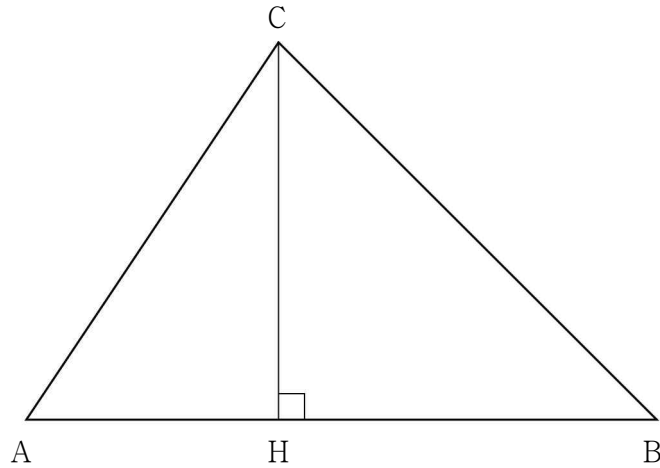


- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

11. 좌표공간에서 세 점 $A(4, 0, 0), B(0, 6, 0), C(0, 0, 6)$ 에 대하여 선분 AB 의 중점을 D , 선분 BC 를 2 : 1로 내분하는 점을 E 라고 하자. 점 P 가 선분 DE 위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$ 와 $\overrightarrow{AP}$ 의 내적 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP}$ 의 최솟값은? (단, O 는 원점이다.)

- ① -2 ② $\frac{12}{7}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{32}{7}$ ⑤ $\frac{14}{3}$

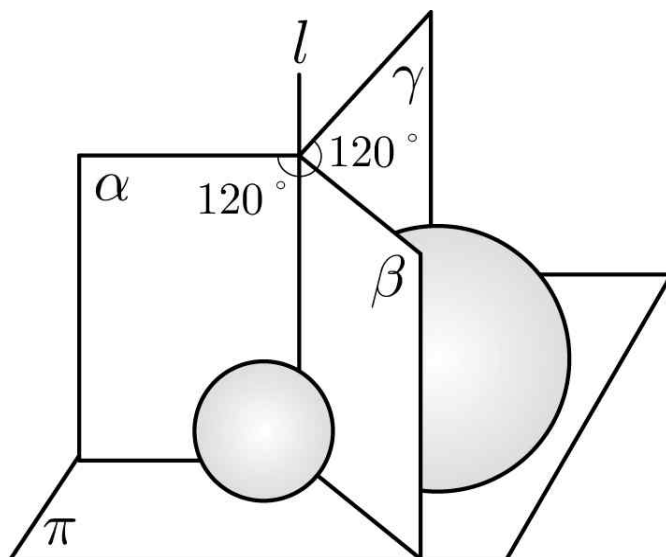
12. 그림과 같이 삼각형 ABC 에 대하여 꼭짓점 C 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.
삼각형 ABC 가 다음 조건을 만족시킬 때, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CH}$ 의 값은?



- (가) 점 H 가 선분 AB 를 2 : 3 으로 내분한다.
(나) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 40$
(다) 삼각형 ABC 의 넓이는 30 이다.

- ① 36 ② 37 ③ 38 ④ 39 ⑤ 40

13. 평면 π 에 수직인 직선 l 을 경계로 하는 세 반평면 α, β, γ 가 있다. α, β 가 이루는 각의 크기와 β, γ 가 이루는 각의 크기는 모두 120° 이다. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 구가 π, α, β 에 동시에 접하고, 반지름의 길이가 2인 구가 π, β, γ 에 동시에 접한다.



두 구의 중심 사이의 거리를 d 라 할 때, $3d^2$ 의 값을 구하시오. (단, 두 구는 평면 π 의 같은 쪽에 있다.)

주간 추천살인 9주차 - 3회 기하와 벡터 : 문항출처

- 1번. 2016. 4. 가형. 24번. 3점
- 2번. 2016. 7. 가형. 3번. 2점
- 3번. 2016. 7. 가형. 9번. 3점
- 4번. 2010. 9. 가형. 2번. 2점
- 5번. 2015. 수능특강. 기하와 벡터. 벡터의 뜻과 연산
- 6번. 2015. 수능특강. 기하와 벡터. 벡터의 뜻과 연산
- 7번. 2008. 10. 가형. 6번. 3점
- 8번. 2016. 수능특강. 기하와 벡터. 평면곡선의 접선
- 9번. 2016. 수능특강. 기하와 벡터. 평면곡선의 접선
- 10번. 2005. 9. 가형. 8번. 3점
- 11번. 2006. 10. 가형. 16번. 4점
- 12번. 2016. 7. 가형. 19번. 4점
- 13번. 2009. 10. 가형. 24번. 4점

주간 추천살인 9주차 - 3회 기하와 벡터 : 정답 및 해설

1) 정답 8

두 점근선의 방정식이 $y = x$, $y = -x$ 이므로 $\frac{b}{a} = \pm 1 \therefore b^2 = a^2 \dots\dots \textcircled{㉠}$

점 $(5, 3)$ 을 지나므로 $\frac{25}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1 \dots\dots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 에서 $a^2 = 16$ 따라서 주축의 길이는 $2|a| = 8$

2) 정답 ④

$\vec{a} + \vec{b} = (2, 3)$ 이므로 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

3) 정답 ③

$$\begin{aligned} |2\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 4|\vec{a}|^2 + 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta + |\vec{b}|^2 = 13 + 12\cos\theta = 16 \text{ 따라서 } \cos\theta = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

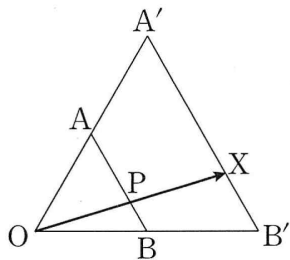
4) 정답 ④

점 (a, b, c) 는 직선 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z-2$ 위의 점이므로 $\frac{a-1}{2} = \frac{b+1}{3} = c-2 \dots \textcircled{㉠}$

점 (a, b, c) 는 평면 $z=4$ 위의 점이므로 $c=4$ $\textcircled{㉠}$ 에서 $\frac{a-1}{2} = \frac{b+1}{3} = 2$

$\therefore a=4+1=5, b=6-1=5 \therefore a+b+c=5+5+4=14$

5) 정답 12



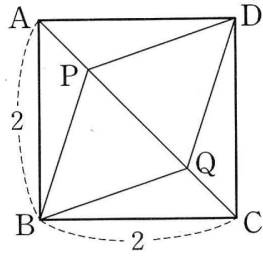
$\vec{OX} = 2\vec{OP}$ 에서 벡터 $\vec{OX}$ 는 $\vec{OP}$ 와 방향이 같고 크기는 $2|\vec{OP}|$ 인 벡터이다.

즉, 점 X는 선분 OP를 2 : 1로 외분하는 점이다.

따라서 삼각형 AOB와 삼각형 A'OB'이 닮음비가 1 : 2인 닮음이 되도록 그림과 같이 두 점 A', B'을 정하면 벡터 $\vec{OX}$ 의 종점 X는 선분 A'B'위를 움직이는 점이다. 즉, 점 P가 선분 AB위를 움직일 때 점 X가 나타내는 도형은 선분 A'B'이다.

$\therefore \overline{A'B'} = 2\overline{AB} = 2 \times 6 = 12$

6) 정답 ①



$$3\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{0} \text{에서 } \overrightarrow{CP} = -3\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PA}$$

$$\text{즉, 점 P는 선분 AC를 1 : 3으로 내분하는 점이다. } \overrightarrow{AQ} + 3\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{0} \text{에서 } \overrightarrow{AQ} = -3\overrightarrow{CQ} = 3\overrightarrow{QC}$$

즉 점 Q는 선분 AC를 3 : 1으로 내분하는 점이다. 이 때 삼각형 APB, 삼각형 APD, 삼각형 CQB, 삼각형 CQD는 서로 합동이므로 $\overline{BP} = \overline{BQ} = \overline{DP} = \overline{DQ}$ 이고, 사각형 BQDP는 마름모이다.

$$\text{따라서 사각형 BQDP는 평행사변형이고 } \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{QD} = -\overrightarrow{DQ} \text{ 즉, } \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{0} \therefore |\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{DQ}| = 0$$

7) 정답 ④

점점으로 이루어진 도형을 포함하는 평면의 법선벡터는 $(1, 3, 5) - (1, 7, 2) = (0, -4, 3)$ 이고, xy 평면의 법선벡터는

$$(0, 0, 1) \text{이므로 } \cos\theta = \frac{|(0, -4, 3) \cdot (0, 0, 1)|}{|(0, -4, 3)| \times |(0, 0, 1)|} = \frac{3}{5}$$

8) 정답 ⑤

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(t+1) - (t-2)}{(t+1)^2} = \frac{3}{(t+1)^2} \text{ 이고, } \frac{dy}{dt} = \frac{2t(t+1) - (t^2+1)}{(t+1)^2} = \frac{t^2+2t-1}{(t+1)^2} \text{ 이므로 } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{3}(t^2+2t-1)$$

$$\text{이때 } \frac{t-2}{t+1} = -2, \frac{t^2+1}{t+1} = 1 \text{ 을 모두 만족시키는 } t \text{ 의 값은 } 0 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 점 } (-2, 1) \text{에서의 접선의 기울기는 } t=0 \text{ 일 때의 } \frac{dy}{dx} \text{ 의 값인 } -\frac{1}{3} \text{ 이다.}$$

9) 정답 ④

$$2x^2 + y^2 = 1 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면 } 4x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y} \text{ (단, } y \neq 0)$$

$$\text{따라서 타원 } 2x^2 + y^2 = 1 \text{과 직선 } y = 3x \text{의 교점의 좌표를 } (a, 3a) \text{라고 하면 } a \neq 0 \text{이므로 교점에서의 타원의 접선의 기울기는}$$

$$-\frac{2a}{3a} = -\frac{2}{3}$$

10) 정답 ①

$$\text{두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은 } l : \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{\sqrt{3}}, z=0$$

따라서, 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 Q라고 하면 $Q(-t+1, \sqrt{3}t, 0)$ (t는 실수) 이 때, 직선 l의 방향벡터를 $\vec{d}$ 라고 하면 $\vec{d} = (-1, \sqrt{3}, 0)$ $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{d}$ 이므로 $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{d} = 0$ 이다.

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{d} = \left(-t+1, \sqrt{3}t, -\frac{1}{2}\right) \cdot (-1, \sqrt{3}, 0) = 0 \quad t-1+3t=0 \quad \therefore t = \frac{1}{4}$$

$$\therefore Q\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right) \therefore \overline{PQ} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{4}} = 1$$

주간 추천살인 9주차 - 4회 : 확률과 통계

1. ${}_4C_2 \times 3!$ 의 값은?

① 12

② 24

③ 36

④ 48

⑤ 60

2. $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^6$ 의 전개식에서 x^3 의 계수를 구하여라.

3. 확률변수 X 의 확률분포 표는 다음과 같다.

X	1	2	3	4	계
$P(X=x)$	a	$2a$	$3a$	$4a$	1

확률변수 $4X+7$ 의 평균 $E(4X+7)$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.)

4. 남학생 12명과 여학생 2명이 일렬로 설 때, 여학생끼리는 이웃하지 않고 남학생끼리는 서로 이웃한 학생 수가 항상 짝수가 되도록 줄을 서는 경우의 수는 $N \times 12!$ 이다. 자연수 N 의 값은?

① 36

② 38

③ 40

④ 42

⑤ 44

5. 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다. $P(X=2)=10P(X=1)$ 이 성립할 때, n 의 값을 구하시오.

6. 공사건이 아닌 두 사건 A, B 가 서로 독립이고 $P(A|B)=\frac{1}{3}$ 일 때, $P(A^C)$ 의 값은?
(단, A^C 은 A 의 여사건이다.)

① $\frac{2}{3}$

② $\frac{7}{12}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{5}{12}$

⑤ $\frac{1}{3}$

7. $P(9, 4)$ 의 값은?

① 4

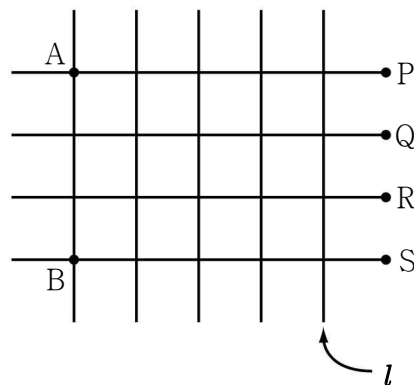
② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

8. 그림과 같이 가로 방향 도로와 세로 방향 도로가 각각 서로 평행한 도로망이 있다. 도로망 위의 A, B지점에 숙소가 있고, P, Q, R, S지점에 관광지가 있다. 부모님을 모시고 효도관광을 온 어느 가족이 A지점에 있는 숙소를 출발하여 P, Q, R, S지점에 있는 관광지 중 두 곳을 관광한 후 B지점에 있는 숙소로 가기로 하였을 때, 이 가족이 도로망을 따라 이동할 수 있는 최단 경로의 수를 구하시오. (단, P, Q, R, S지점에서 직선도로 l 까지의 거리는 모두 같다.)



9. 집합 $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ 를 공집합이 아닌 두 개 이상의 부분집합으로 분할할 때, 부분집합의 원소의 개수가 모두 다른 경우의 수는?

- ① 79 ② 81 ③ 83 ④ 85 ⑤ 87

10. 어느 회사에서 생산하는 화장품 A의 용량은 평균이 100mL, 표준편차가 3mL인 정규분포를 따르고, 화장품 B의 용량은 평균이 120mL, 표준편차가 4mL인 정규분포를 따른다. 이 회사에서 생산하는 화장품 A와 화장품 B의 용량이 평균과 각각 6mL 이상의 차이가 날 때, 불량품으로 판정한다. 이 회사에서 생산한 화장품 A 한 개와 화장품 B 한 개를 임의로 선택할 때, 이들이 불량품으로 판정될 확률을 각각 p_1 , p_2 라 하자. $p_2 - p_1$ 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

- ① 0.0880 ② 0.0919 ③ 0.1838 ④ 0.2417 ⑤ 0.2718

11. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수를 구하시오.

(가) $a+b+c+d+e=10$

(나) 세 수 $a, 3, b$ 는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

12. 좌표평면 위의 점 P 가 다음 규칙에 따라 이동한다.

(가) 원점에서 출발한다.

(나) 동전을 1개 던져서 앞면이 나오면 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한다.

(다) 동전을 1개 던져서 뒷면이 나오면 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한다.

1개의 동전을 6번 던져서 점 P 가 (a, b) 로 이동하였다. $a+b$ 가 3의 배수가 될 확률이 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)

13. 다음과 같이 정의된 확률변수 X, Y, Z 의 분산의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?
(단, $V(X)$ 는 확률변수 X 의 분산이다.)

X : 연속하는 100 개의 자연수에서 임의로 뽑은 두 수의 차
 Y : 연속하는 100 개의 홀수에서 임의로 뽑은 두 수의 차
 Z : 연속하는 100 개의 짝수에서 임의로 뽑은 두 수의 차

- ① $V(X) < V(Y) < V(Z)$ ② $V(X) = V(Y) = V(Z)$ ③ $V(X) > V(Y) = V(Z)$
④ $V(X) = V(Y) < V(Z)$ ⑤ $V(X) < V(Y) = V(Z)$

주간 추천살인 9주차 — 4회 확률과 통계 : 문항출처

- 1번. (고2) 2010. 3. 1번. 2점
- 2번. 2013. 사관학교. 문과. 25번. 3점
- 3번. 2012. 10. 가형. 24번. 3점
- 4번. (고2) 2012. 3. 14번. 3점
- 5번. 2007. 10. 나형. 18번. 3점
- 6번. 2015. 10. A형. 6번. 3점
- 7번. 2016. EBS Final 나형. 1회
- 8번. (고2) 2009. 11 가형. 30번. 4점
- 9번. 2016. 수능특강. 확률과 통계. 이항정리와 분할
- 10번. 2016. EBS Final 나형. 1회
- 11번. 2016. EBS Final 나형. 1회
- 12번. 2015. 10. A형. 28번. 4점
- 13번. 2004. 9. 가나형(공통문항). 11번. 3점

주간 추천살인 9주차 - 4회 확률과 통계: 정답 및 해설

1) 정답 ③

$${}_4C_2 \times 3! = \frac{{}_4P_2}{2!} \times 3! = 6 \times 6 = 36$$

2) 정답 160

$$\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^6 \text{의 전개식의 일반항 } {}_6C_r (x^2)^r \left(\frac{2}{x}\right)^{6-r} = {}_6C_r \cdot 2^{6-r} x^{3r-6} \text{에서 } x^3 \text{ 항은 } 3r-6=3 \quad \therefore r=3$$

따라서 x^3 의 계수는 ${}_6C_3 \cdot 2^{6-3} = 160$ 이다.

3) 정답 19

$$a+2a+3a+4a=1 \text{에서 } a=\frac{1}{10} \quad P(X=x)=\frac{1}{10}x, \quad E(X)=\sum_{k=1}^4 k \cdot \frac{k}{10} = \frac{1}{10} \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6} = 3$$

$$\therefore E(4X+7) = 4E(X) + 7 = 12 + 7 = 19$$

4) 정답 ④



우선 남학생 12명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $12!$ 이다. 여기서 남학생 2명씩 묶어서 그 사이에 여학생 2명을 세우는 경우의 수는 ${}_7P_2 = 7 \times 6 = 42$ 이므로 경우의 수는 $42 \times 12!$ 이 되어 $N = 42$ 이다.

5) 정답 21

$${}_nC_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 10 {}_nC_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{10}, \quad \frac{n(n-1)}{2} = 10n \text{이므로 } n=21$$

6) 정답 ①

$$\text{두 사건 } A, B \text{가 서로 독립이므로 } \frac{1}{3} = P(A|B) = P(A) \text{에서 } P(A^C) = \frac{2}{3}$$

7) 정답 ③

$P(9, 4)$ 는 자연수 9를 4개의 자연수의 합으로 분할하는 경우의 수이다.

자연수 9를 4개의 자연수의 합으로 분할하면

$$9 = 6 + 1 + 1 + 1 = 5 + 2 + 1 + 1 = 4 + 3 + 1 + 1 = 4 + 2 + 2 + 1 = 3 + 3 + 2 + 1 = 3 + 2 + 2 + 2$$

따라서 $P(9, 4) = 6$

8) 정답 66

$$(i) A \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow B \text{ 경로의 경우: } 1 \times 1 \times \frac{6!}{4!2!} = 15$$

$$(ii) A \rightarrow P \rightarrow R \rightarrow B \text{ 경로의 경우: } 1 \times 1 \times \frac{5!}{4!} = 5$$

$$(iii) A \rightarrow P \rightarrow S \rightarrow B \text{ 경로의 경우: } 1 \times 1 \times 1 = 1$$

[강남 Orbi] 주간 추천상인

(iv) $A \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow B$ 경로의 경우: $\frac{5!}{4!} \times 1 \times \frac{5!}{4!} = 25$

(v) $A \rightarrow Q \rightarrow S \rightarrow B$ 경로의 경우: $\frac{5!}{4!} \times 1 \times 1 = 5$

(vi) $A \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow B$ 경로의 경우: $\frac{6!}{4!2!} \times 1 \times 1 = 15$ 따라서 총 66가지이다.

9) 정답 ②

집합 A 의 원소의 개수가 6이므로 집합 A 를 공집합이 아닌 두 개 이상의 부분집합으로 분할할 때, 원소의 개수가 모두 다른 경우는 다음과 같이 3가지이다.

(i) 두 부분집합의 원소의 개수가 (5, 1)인 경우 ${}_6C_5 \times {}_1C_1 = {}_6C_1 \times {}_1C_1 = 6$

(ii) 두 부분집합의 원소의 개수가 (4, 2)인 경우 ${}_6C_4 \times {}_2C_2 = {}_6C_2 \times {}_2C_2 = 15$

(iii) 세 부분집합의 원소의 개수가 (3, 2, 1)인 경우 ${}_6C_3 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 = {}_6C_3 \times {}_3C_1 \times {}_1C_1 = 60$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해 $6 + 15 + 60 = 81$

10) 정답 ①

화장품 A의 용량을 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(100, 3^2)$ 을 따르고 $Z = \frac{X-100}{3}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} p_1 &= P(|X-100| \geq 6) = P(X \leq 94) + P(X \geq 106) = P\left(Z \leq \frac{94-100}{3}\right) + P\left(Z \geq \frac{106-100}{3}\right) \\ &= P(Z \leq -2) + P(Z \geq 2) = 2P(Z \geq 2) = 2\{0.5 - P(0 \leq Z \leq 2)\} = 2(0.5 - 0.4772) = 0.0456 \end{aligned}$$

화장품 B의 용량을 확률변수 Y 라 하면 Y 는 정규분포 $N(120, 4^2)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} p_2 &= P(|Y-120| \geq 6) = P(Y \leq 114) + P(Y \geq 126) = P\left(Z \leq \frac{114-120}{4}\right) + P\left(Z \geq \frac{126-120}{4}\right) \\ &= P(Z \leq -1.5) + P(Z \geq 1.5) = 2P(Z \geq 1.5) = 2\{0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.5)\} = 2(0.5 - 0.4332) = 0.1336 \end{aligned}$$

따라서 $p_2 - p_1 = 0.1336 - 0.0456 = 0.0880$

11) 정답 105

조건 (나)에서 세수 $a, 3, b$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $a+b=6$ ㉠

조건 (가)에서 $a+b+c+d+e=10$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $6+c+d+e=10$ $c+d+e=4$

(i) $a+b=6$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는 ${}_2H_6 = {}_{2+6-1}C_6 = {}_7C_6 = {}_7C_1 = 7$

(ii) $c+d+e=4$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 c, d, e 의 모든 순서쌍 (c, d, e) 의 개수는

$${}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는 $7 \times 15 = 105$

12) 정답 43

$a=6$ 이고 $0 \leq b \leq 6$ 이므로 $a+b$ 가 3의 배수가 되는 경우는 $b=0, 3, 6$

$${}_6C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_6C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{64} + \frac{20}{64} + \frac{1}{64} = \frac{11}{32} \therefore p+q=43$$

[강남 Orbi] 주간 추천살인

13) 정답 ⑤

(i) 연속하는 100개의 자연수를 $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ 으로 놓으면 $1 \leq |a_i - a_j| \leq 99$ ($i, j = 1, 2, \dots, 100, i \neq j$)

따라서, 확률변수 X 가 취할 수 있는 값은 1, 2, 3, ..., 99이다.

(ii) 연속하는 100개의 홀수를 $b_1, b_2, \dots, b_{100}$ 으로 놓으면 $2 \leq |b_k - b_l| \leq 198$ ($k, l = 1, 2, \dots, 100, k \neq l$)

따라서, 확률변수 Y 가 취할 수 있는 값은 2, 4, 6, ..., 198이다.

(iii) 연속하는 100개의 짝수를 $c_1, c_2, \dots, c_{100}$ 으로 놓으면 $2 \leq |c_m - c_n| \leq 198$ ($m, n = 1, 2, \dots, 100, m \neq n$)

따라서, 확률변수 Z 가 취할 수 있는 값은 2, 4, 6, ..., 198이다.

따라서, $Y = Z = 2X$ 이므로 $V(Y) = V(Z) = 4V(X) \quad \therefore V(X) < V(Y) = V(Z)$

주간
초청살인