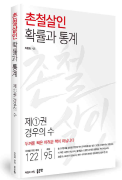
주간

촌철살인

TRACK 1 – 9주차 (문과)



Team SPC

BLACK BAG

Orbi by move
Orbi 인강, 강남점

Orbi Class

미친한 수학자

암기와 논리의 차이

논리도 결국 기억에 의존합니다.

하지만 **그 기억들이 서로 연결성을 가지고 있다면 이것을 우리는 논리**라고 합니다.

그래서 중간에 기억이 소실되더라도 **추론을 통해서 기억을 되살릴 수 있습니다.**

수학은 이러한 논리가 극대화 된 과목입니다.

아무리 어려워 보이는 문제라고 할지라도 분석하고 또 분석하면

결국 그 뿌리는 가장 기본적인 내용에 있음을 알게 됩니다.

교과서는 그러한 논리의 출발점을 알려줍니다.

그리고 우리는 그것을 개념이라고 합니다.

모든 기출문제는 반드시 교과서 개념을 통해서 풀립니다.

사고력은 근력과 같아서 꾸준한 훈련이 필요합니다.

목표에 따라서 훈련량과 방식도 달라야 합니다.

주간 촌철살인은 2개의 TRACK으로 진행됩니다.

〈TRACK 1〉를 통해 전 범위 핵심 내용을 확인할 수 있도록 구성하였습니다.

〈TRACK 2〉는 초고난도 사고력 문제로 〈TRACK 1〉과 병행하여야 의미가 있습니다.

〈TRACK 2〉는 9월 이후에 진행합니다.

- TRACK 1 : 1등급을 위한 지속적 훈련
- TRACK 2 : 100점을 위한 고강도 훈련 (강의)

TWO TRACK

TRACK 1	TRACK 2
1등급을 위한 지속적 훈련 주당 총 4회분 (전범위 복습) - 월, 수, 금, 일 각 1회차씩만 풀 것. (회당 시간은 40분)	100점을 위한 고강도 훈련 주당 총 10문항 - 하루에 1~2문제 정도를 깊이 고민할 것. (제한시간 없음.) - 다음날 한 번 더 고민한 후 수업에 들어올 것.

범위와 순서는 조금씩 달라질 수 있습니다.

주간 촌철살인 9주차 - 1회 : 수학 1

1. 모든 실수 x에 대하여 $(x+1)^4 = x^4 + ax^3 + bx^2 + 4x + 1$이 성립할 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오.

2. 두 다항식 $P(x) = 3x^3 + x + 11$, $Q(x) = x^2 - x + 1$에 대하여 다항식 $P(x) + 4x$를 다항식 $Q(x)$로 나눈 나머지가 $5x + a$ 일 때, 상수 a의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

3. 부등식 $|x-a| < 3$의 해가 $4 < x < 10$일 때, 상수 a의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

4. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2+4x-21 \le 0 \\ x^2-5kx-6k^2>0 \end{cases}$ 의 해가 존재하도록 하는 양의 정수 k의 개수는?

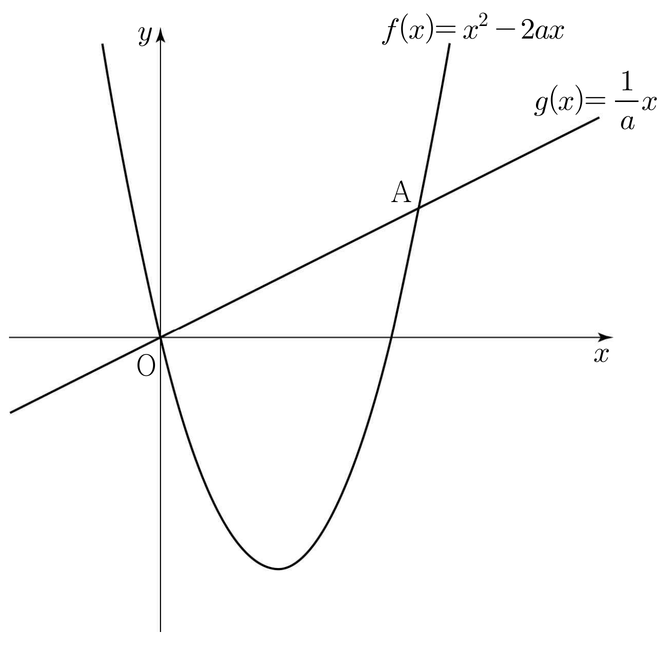
① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

5. 사차방정식 $x^4-6x^3+15x^2-22x+12=0$ 의 모든 실근의 합을 구하시오.

6. 등식 $(a+2)x^2+(2-x)a^2+(2-x)b=0$ 이 x에 대한 항등식일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$ 의 값은?

① -6　② -4　③ -2　④ 0　⑤ 2

7. 그림과 같이 양수 a에 대하여 이차함수 $f(x)=x^2-2ax$의 그래프와 직선 $g(x)=\dfrac{1}{a}x$가 두 점 O, A에서 만난다. (단, O는 원점이다.) $a=2$일 때, 직선 l은 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에 접하고 직선 $y=g(x)$와 수직이다. 직선 l의 y절편은?

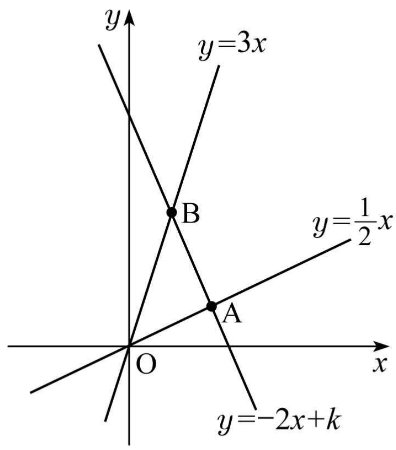


① -2　② $-\dfrac{5}{3}$　③ $-\dfrac{4}{3}$　④ -1　⑤ $-\dfrac{2}{3}$

8. 직선 $x-2y=9$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭 이동한 도형이 원 $(x-3)^2+(y+5)^2=k$에 접할 때, 실수 k의 값은?

① 80 ② 83 ③ 85 ④ 88 ⑤ 90

9. 그림과 같이 두 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 $y=3x$가 직선 $y=-2x+k$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 원점 O와 두 점 A, B를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 무게중심의 좌표가 $\left(2,\ \frac{8}{3}\right)$일 때, 상수 k의 값은?



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

10. 두 이차식 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 합이 $2x^2+8x-10$ 이고, 곱이 $x^4+8x^3+5x^2-50x$ 이다. $f(1)=6$ 일 때, $g(3)$ 의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

11. $0 \le x \le 3$ 에서 정의된 이차함수 $f(x)=x^2-4x+a$ 의 최댓값이 12 일 때, $f(x)$ 의 최솟값은? (단, a는 상수이다.)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

12. x에 대한 삼차방정식 $ax^3+2bx^2+4bx+8a=0$이 서로 다른 세 정수를 근으로 갖는다. 두 정수 a, b가 $|a| \leq 50$, $|b| \leq 50$일 때, 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오.

주간 촌철살인 9주차 – 1회 수학 Ⅰ : 문항출처

1번. (고1) 2011. 6. 22번. 3점
2번. (고1) 2014. 9. 14번. 3점
3번. (고1). 2015. 11. 5번. 3점
4번. (고1). 2014. 9. 16번. 4점
5번. (고1) 2014. 11. 23번. 3점
6번. (고1) 2014. 11. 7번. 3점
7번. (고1). 2015. 11. 13번. 3점
8번. (고1) 2014. 9. 13번. 3점
9번. (고2) 2010. 3. 8번. 3점
10번. (고1) 2010. 9. 12번. 4점
11번. (고2). 2016. 3. 가형. 7번. 3점
12번. (고2). 2016. 3. 가형. 30번. 4점

주간 촌철살인 9주차 – 1회 수학 1 : 정답과 해설

1) 정답 10

$(x+1)^2=x^2+2x+1$ 이므로 $(x+1)^4=\{(x+1)^2\}^2$

$=(x^2+2x+1)^2=(x^2)^2+(2x)^2+1^2+2(x^2 \square 2x+2x \square 1+1 \square x^2)$

$=x^4+4x^2+1+4x^3+4x+2x^2=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$ ⋯ ㉠

㉠과 $x^4+ax^3+bx^2+4x+1$ 의 계수를 비교하면 $a=4$, $b=6$ 이다. 따라서 $a+b=10$

2) 정답 ④

$P(x)+4x=3x^3+5x+11$ 을 $Q(x)=x^2-x+1$ 로 나누면 몫이 $3x+3$ 이고 나머지는 $5x+8$ 따라서 $a=8$

3) 정답 ②

$|x-a|<3$에서 $-3<x-a<3$ $a-3<x<a+3$ 이 부등식의 해가 $4<x<10$이므로 $a=7$

4) 정답 ③

$x^2+4x-21 \le 0$ $(x+7)(x-3) \le 0$ $-7 \le x \le 3$ …… ㉠

$x^2-5kx-6k^2>0$ $(x-6k)(x+k)>0$ $k>0$이므로 $x<-k$ 또는 $x>6k$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 해가 존재하기 위한 k값의 범위는 $0<k<7$ 이다. 따라서 양의 정수 k의 개수는 6

5) 정답 4

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccccc}
1 & 1 & -6 & 15 & -22 & 12 \\
 & & 1 & -5 & 10 & -12 \\
\hline
3 & 1 & -5 & 10 & -12 & \boxed{0} \\
 & & 3 & -6 & 12 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 4 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\therefore (x-1)(x-3)(x^2-2x+4)=0$ $x^2-2x+4=0$ 은 서로 다른 두 허근을 갖는다. 따라서 모든 실근의 합은 $1+3=4$

6) 정답 ①

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면 $(a+2)x^2-(a^2+b)x+2a^2+2b=0$

x에 대한 항등식이므로 $a+2=0$, $a^2+b=0$ $\therefore a=-2$, $b=-4$ 따라서 $a+b=-6$

7) 정답 ④

$a=2$일 때, $g(x)=\frac{1}{2}x$, $f(x)=x^2-4x$ 직선 l의 방정식을 $y=mx+k$라 하자.

$\frac{1}{2}\times m=-1$ $m=-2$ $\therefore$ $y=-2x+k$

직선 l이 이차함수 $f(x)=x^2-4x$의 그래프와 접하기 위해서는 방정식 $x^2-4x=-2x+k$가 중근을
가져야 하므로 $x^2-2x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-2)^2-4\times1\times(-k)=4+4k=0$따라서 직선 l의 y절편 $k=-1$

8) 정답 ①

직선 $x-2y=9$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 $y-2x=9$가 원 $(x-3)^2+(y+5)^2=k$에 접하므로

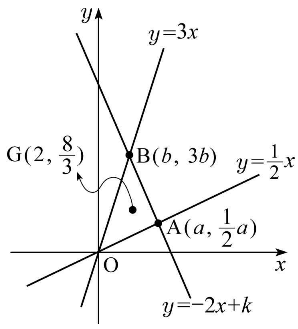
$\dfrac{|-2\times3+(-5)-9|}{\sqrt{(-2)^2+1^2}}=\sqrt{k}$ 따라서 $k=80$

9) 정답 ⑤

$\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{2}a\right)$, $\mathrm{B}(b,\ 3b)$라 놓으면 삼각형 OAB의 무게중심 G의 좌표가 $\mathrm{G}\left(2,\ \dfrac{8}{3}\right)$에서 $\dfrac{a+b}{3}=2$,

$\dfrac{\frac{1}{2}a+3b}{3}=\dfrac{8}{3}$ 두 식을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=2$ $\therefore \mathrm{A}(4,\ 2),\ \mathrm{B}(2,\ 6)$

점 A 는 직선 $y=-2x+k$ 위의 점이므로 $k=10$



10) 정답 ⑤

두 다항식의 최대공약수를 G라 하면 서로소인 두 다항식 a,b가 존재하여 $f(x)=aG,\ g(x)=bG$이다.

$(a+b)G=(2x-2)(x+5)$ $abG^2=x(x-2)(x+5)^2$이고 $f(1)=6$이므로 $f(x)=x(x+5),\ g(x)=(x-2)(x+5)$

$\therefore g(3)=8$

11) 정답 ④

$f(x)=(x^2-4x+4)-4+a=(x-2)^2-4+a$이므로 $0\le x\le 3$일 때, 꼭짓점의 x좌표는 주어진 x의 값의 범위에 속한다.

이때, $x=0$일 때 $f(0)=a$, $x=2$일 때 $f(2)=-4+a$, $x=3$일 때 $f(3)=-3+a$이므로 주어진 이차함수 $f(x)$는

$x=0$에서 최댓값 $f(0)=a$를 갖고, $x=2$에서 최솟값 $f(2)=-4+a$를 갖는다.

$a=12$이므로 $f(2)=-4+12=8$ 따라서 구하는 최솟값은 8이다.

12) 정답 46

$ax^3+2bx^2+4bx+8a=a(x^3+8)+2bx(x+2)=a(x+2)(x^2-2x+4)+2bx(x+2)$

$=(x+2)\{ax^2-2(a-b)x+4a\}=0$이므로 이차방정식 $ax^2-2(a-b)x+4a=0$ $(a\neq0)$은 -2가 아니고 정수인 서로 다른 두 근을 가져야 한다. 이때, 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 $\dfrac{4a}{a}=4$이므로 가능한 서로 다른 두 근은 $x=1,\ x=4$ 또는 $x=-1,\ x=-4$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $\dfrac{2(a-b)}{a}=5$ 또는 $\dfrac{2(a-b)}{a}=-5$이어야 하므로 $b=-\dfrac{3}{2}a$ 또는 $b=\dfrac{7}{2}a$ $(a\neq0)$

(ⅰ) $b=-\dfrac{3}{2}a$일 때 $a=32$이면 $b=-\dfrac{3}{2}\times32=-48$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(2,\ -3)$, $(4,\ -6)$, $\cdots$, $(32,\ -48)$, $(-2,\ 3)$, $(-4,\ 6)$, $\cdots$, $(-32,\ 48)$의 32개이다.

(ⅱ) $b=\dfrac{7}{2}a$일 때 $a=14$이면 $b=\dfrac{7}{2}\times14=49$이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(2,\ 7)$, $(4,\ 14)$, $\cdots$, $(14,\ 49)$, $(-2,\ -7)$, $(-4,\ -14)$, $\cdots$, $(-14,\ -49)$의 14개이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 조건을 만족하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $32+14=46$이다.

주간 촌철살인 9주차 - 2회 : 수학 2

1. 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3+a_4=36$일 때, a_6의 값은?

① 48　② 64　③ 96　④ 108　⑤ 128

2. 부등식 $\sqrt{32}\times\sqrt[4]{64}<n<4^{-1}\times8^{\frac{7}{3}}$을 만족시키는 자연수 n의 개수는?

① 13　② 14　③ 15　④ 16　⑤ 17

3. 0이 아닌 세 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=0$이고 $3^a=x$, $3^b=y$, $3^c=z$이다. 이 때, $\log_x yz+\log_y zx+\log_z xy$의 값은?

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

4. 명제 '모든 실수 x에 대하여 $x^2+k>5$이다.' 가 거짓이 되도록 하는 자연수 k의 개수는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

5. 전체집합 $U=\{x|x$는 10 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$, $A\cap B^C=\{2,\ 4,\ 6\}$일 때, 집합 B의 모든 원소의 합을 구하시오.

6. 전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 10 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 $A=\{x\,|\,x$는 6의 약수$\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $5\not\subset A\cap B$

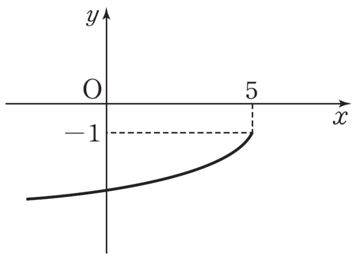
ㄴ. $n(B-A)=2$

ㄷ. U의 부분집합 중 집합 $A\cup B$와 서로소인 집합의 개수는 16이다.

① ㄱ　　② ㄷ　　③ ㄱ, ㄴ　　④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7. 두 함수 $f(x)=x^2+3$, $g(x)=\sqrt{x-1}$ 에 대하여 $(g \circ f)(\sqrt{7})$ 의 값을 구하시오.

8. 무리함수 $y=-\sqrt{-x-2a+b}-a+b$의 그래프가 그림과 같고, 정의역이 $\{x \mid x \leq 5\}$이고 치역이 $\{y \mid y \leq -1\}$일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?



① -15 ② -14 ③ -13 ④ -12 ⑤ -11

9. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = \dfrac{{a_n}^2+1}{2a_n}$을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n이 $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ …… (⋆) 임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때,

$a_1 = \dfrac{{a_1}^2+1}{2a_1}$에서 $a_1 > 0$이므로 (좌변)$= a_1 = 1$,

(우변)$=1-0=1$이다.

따라서 $n=1$일 때 (⋆)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때 (⋆)이 성립한다고 가정하면 $a_m = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}$이므로

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + a_{m+1} = \sum_{k=1}^{m} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right) + a_{m+1}$$

$= \boxed{\text{(가)}} + a_{m+1}$이다. 이때 $\dfrac{{a_{m+1}}^2+1}{2a_{m+1}} = \boxed{\text{(가)}} + a_{m+1}$

즉, ${a_{m+1}}^2 + \boxed{\text{(나)}} \times a_{m+1} - 1 = 0$이고, $a_{m+1} > 0$이므로

$a_{m+1} = \sqrt{m+1} - \sqrt{m}$이다.

따라서 $n=m+1$일 때도 (⋆)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $f(49)+g(16)$의 값은?

① 11　② 13　③ 15　④ 17　⑤ 19

10. 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{n} ka_k = \frac{n^2(n+1)}{2}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$을 만족시킬 때, a_{15}의 값을 구하시오.

11. x에 대한 이차방정식 $nx^2-(2n^2-n)x-5=0$의 두 근의 합을 a_n(n은 자연수)라 하자. $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은?

① 88 ② 91 ③ 94 ④ 97 ⑤ 100

12. 이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 근을 $\log a$, $\log b$라 할 때, $\log_a b+\log_b a$의 값은?

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

13. 첫째항이 6이고 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 이차방정식 $x^2-(a_n+a_{n+2})x-a_{n+1}=0$의 서로 다른 두 실근을 α_n , β_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10}(\alpha_n+1)(\beta_n+1)=180$일 때, a_{11}의 값을 구하시오.

주간 촌철살인 9주차 – 2회 수학 2 : 문항출처

1번. 2013. 3. A형. 4번. 3점
2번. 2016. 수능특강. 수2. 지수
3번. 2005. 4. 나형. 16번. 3점
4번. 2016. 수능특강. 수2. 명제
5번. 2016. 수능특강. 수2. 집합
6번. (고2) 2016. 3. 가형. 11번. 3점
7번. (고2) 2015. 6. 가형. 22번. 3점
8번. 2016. 수능특강. 수2. 유리함수 무리함수
9번. (고2) 2016. 3. 가형. 19번. 4점
10번. (고2) 2015. 6. 가형. 25번. 3점
11번. 2016. 3. 나형. 10번. 3점
12번. 2012. 10. 나형(81%). 9번. 3점
13번. (고2) 2015. 11. 나형. 28번. 4점

주간 존청살인 9주차 – 2회 수학 2 : 정답 및 해설

1) 정답 ③

주어진 수열의 첫째항을 a라 하면

$a_3 = a \square 2^2 = 4a \quad a_4 = a \square 2^3 = 8a$

이므로 주어진 조건에서 $36 = a_3 + a_4 = 4a + 8a = 12a$

$\therefore\ a = 3 \qquad \therefore\ a_6 = 3 \times 2^5 = 96$

2) 정답 ③

$\sqrt{32} \times \sqrt[4]{64} = \sqrt{2^5} \times \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^5} \times \sqrt{2^3} = \sqrt{2^5 \times 2^3} = \sqrt[2]{2^8} = 2^4 = 16$

$4^{-1} \times 8^{\frac{7}{3}} = \left(2^2\right)^{-1} \times \left(2^2\right)^{\frac{7}{3}} = 2^{2 \times (-1)} \times 2^{3 \times \frac{7}{3}} = 2^{-2} \times 2^7 = 2^{-2+7} = 2^5 = 32$

이때 부등식 $\sqrt{32} \times \sqrt[4]{64} < n < 4^{-1} \times 8^{\frac{7}{3}}$에서 $16 < n < 32$

따라서 자연수 n은 17, 18, 19, $\cdots$, 31이고, 그 개수는 15이다.

3) 정답 ①

$xyz = 3^{a+b+c} = 1$ 준 식$= \log_x \frac{1}{x} + \log_y \frac{1}{y} + \log_z \frac{1}{z} = -3$

4) 정답 ⑤

명제 ‘모든 실수 x에 대하여 $x^2 + k > 5$이다.’가 거짓이려면 조건 $x^2 + k > 5$의 진리집합이 실수 전체의 집합이 아니어야 하므로 어떤 실수 x에 대하여 $x^2 + k \le 5$, 즉 $x^2 \le 5 - k$이어야 한다.

그런데 모든 실수 x에 대하여 $x^2 \ge 0$이므로 $5 - k < 0$이면

$x^2 \le 5 - k < 0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다.

따라서 $5 - k \ge 0$

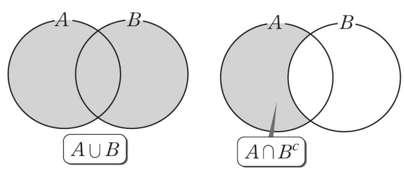
즉, $k \le 5$이어야 하므로 자연수 k의 개수는 5이다.

5) 정답 16

오른쪽 벤다이어그램에서 $(A \cup B) - (A \cap B^C) = B$ 이고

$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$, $A \cap B^C = \{2,\ 4,\ 6\}$이므로 $B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은 $1 + 3 + 5 + 7 = 16$



6) [정답] ⑤

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $B = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

ㄱ. $A \cap B = \{2,\ 3\}$이므로 $5 \notin A \cap B$ (참)

ㄴ. $B - A = \{5,\ 7\}$이므로 $n(B - A) = 2$ (참)

ㄷ. $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$ 전체집합 U의 부분집합 중에서 집합 $A \cup B$와 서로소인 집합은 집합 $(A \cup B)^C = \{4, 8, 9, 10\}$의 부분집합이므로 구하는 개수는 $2^4 = 16$이다. (참) 따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

7) 정답 3

$(g \circ f)(\sqrt{7})=g(7+3)=\sqrt{10-1}=3$

8) 정답 ③

정의역이 $\{x \mid x \leq 5\}$, 치역이 $\{y \mid y \leq -1\}$ 이므로 주어진 함수는 $y=-\sqrt{-x-2a+b}-a+b$ 에서 $-x-2a+b \geq 0$ 이고 $y+a-b \leq 0$ 그러므로 $x \leq -2a+b$ 이고 $y \leq -(a-b)$ $-2a+b=5$, $a-b=1$ 따라서 $a=-6$, $b=-7$ 이므로 $a+b=-6+(-7)=-13$

9) 정답 ③

(ⅰ) $n=1$일 때, $a_1=\dfrac{{a_1}^2+1}{2a_1}$에서

$\quad {a_1}^2=1$, $a_1>0$이므로 (좌변)$=a_1=1$,(우변)$=1-0=1$이다. 따라서 $n=1$ 일 때 (*)이 성립한다.

(ⅱ) $n=m$일 때 (*)이 성립한다고 가정하면 $a_m=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k=\sum_{k=1}^{m} a_k+a_{m+1}=\sum_{k=1}^{m}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})+a_{m+1}=(\sqrt{1}-\sqrt{0})+(\sqrt{2}-\sqrt{1})+$$
$$\cdots+(\sqrt{m}-\sqrt{m-1})+a_{m+1}$$

$=\boxed{\sqrt{m}}+a_{m+1}$주어진 조건에서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} a_k=\frac{{a_{m+1}}^2+1}{2a_{m+1}}$이므로 $\dfrac{{a_{m+1}}^2+1}{2a_{m+1}}=\sqrt{m}+a_{m+1}$

즉, ${a_{m+1}}^2+\boxed{2\sqrt{m}}\times a_{m+1}-1=0$ $a_{m+1}=-\sqrt{m}\pm\sqrt{m+1}$이고, $a_{m+1}>0$이므로 $a_{m+1}=\sqrt{m+1}-\sqrt{m}$이다.

따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다. (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ 이다. $f(m)=\sqrt{m}$, $g(m)=2\sqrt{m}$ 이므로 $f(49)+g(16)=7+8=15$

10) 정답 22

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k=S_n$ 이라 하면, $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n \geq 2)$이므로

$na_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ka_k-\sum_{k=1}^{n-1} ka_k=\frac{n^2(n+1)}{2}-\frac{n(n-1)^2}{2}=\frac{n(3n-1)}{2}$ $(n \geq 2)$이다.

$a_n=\dfrac{3n-1}{2}(n \geq 2)$ 그런데 $a_1=\displaystyle\sum_{k=1}^{1} ka_k=\frac{1^2(1+1)}{2}=1$이다.

따라서 $a_n=\dfrac{3n-1}{2}$ $(n \geq 1)$이다. $\quad \therefore a_{15}=22$

11) 정답 ⑤

이차방정식의 두 근의 합 a_n은 근과 계수의 관계에 의해 $a_n=\dfrac{2n^2-n}{n}=2n-1$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k=\sum_{k=1}^{10}(2k-1)=\sum_{k=1}^{10}2k-\sum_{k=1}^{10}1=2\sum_{k=1}^{10}k-10=2\times\frac{10\times 11}{2}-10=100$$

12)답. ④

$$\log_a b+\log_b a=\frac{\log b}{\log a}+\frac{\log a}{\log b}=\frac{(\log a+\log b)^2-2\log a\cdot\log b}{\log a\cdot\log b}=\frac{16-2\times 2}{2}=6$$

13) 정답 26

주어진 이차방정식의 서로 다른 두 실근을 α_n , β_n이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}$, $\alpha_n\beta_n=-a_{n+1}$

$$\sum_{n=1}^{10}(\alpha_n+1)(\beta_n+1)=\sum_{n=1}^{10}(\alpha_n\beta_n+\alpha_n+\beta_n+1)=\sum_{n=1}^{10}(-a_{n+1}+2a_{n+1}+1)$$

$$=\sum_{n=1}^{10}(a_{n+1}+1)=180 \quad \therefore \ a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{11}+10=180 \ \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 a_1을 더하면

$$a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{11}+10=a_1+180,\ \frac{11\times(a_1+a_{11})}{2}=\frac{11\times(6+a_{11})}{2}=6+170$$

$\therefore \ a_{11}=26$

주간 촌철살인 9주차 - 3회 : 미적분 1

1. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^{n}(2^{n+1}+1)}{4^{n+1}+2^{n}+1}$의 값은?

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

2. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\dfrac{5n}{n+1}\right)$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n+3}{a_n-1}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

3. $\int_{0}^{a}(4x-3)\,dx=5$를 만족시키는 양수 a의 값은?

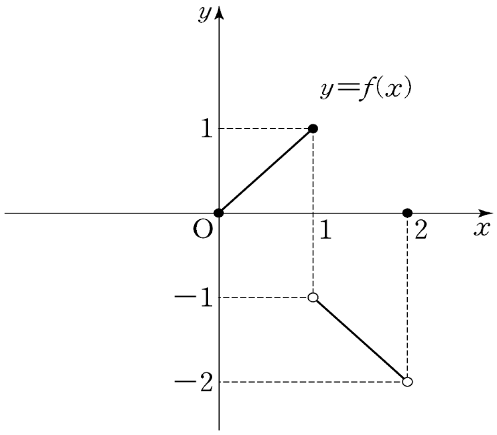
① $\dfrac{3}{2}$ ② 2 ③ $\dfrac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\dfrac{7}{2}$

4. 함수 $f(x)=x^3-2x+5$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x f(t)dt$의 값은?

① 2　② $\frac{9}{4}$　③ $\frac{5}{2}$　④ $\frac{11}{4}$　⑤ 3

5. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ x^4+6 & (x \geq 1) \end{cases}$이라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능할 때, $g(-2)$의 값을 구하시오.

6. 정의역이 $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$ 인 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 구간 $[0,\ 2]$ 에서 그림과 같고, 정의역에 속하는 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 이다. $\lim\limits_{x \to -1+} f(x)+\lim\limits_{x \to 2-} f(x)$ 의 값은?



① -3　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 3

7. 함수 $f(x)=\sum_{k=1}^{n} \frac{(-x)^k}{k}$ 에 대하여 $f'(1)=0$ 을 만족시키는 100 이하의 자연수 n 의 개수를 구하시오.

8. 수열의 극한에 대하여 항상 옳은 것을 <보기>에서 모두 고르면?

<보기>

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$(일정)이면 $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$이다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \beta$(일정)이면 $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$이다.

ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < c_n < b_n$이고 $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

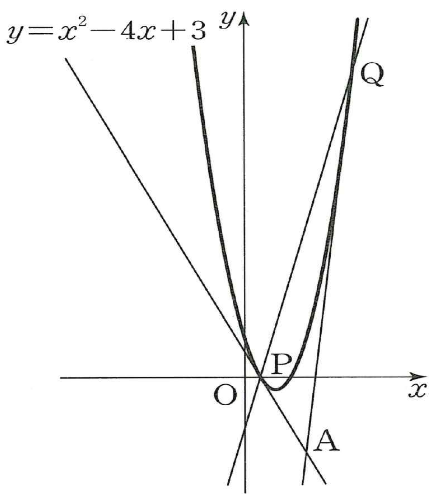
9. 두 함수 $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 12$, $g(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + a$에 대하여 방정식 $f(x) = g(x)$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 모든 정수 a의 개수는?

① 25 ② 27 ③ 29 ④ 31 ⑤ 33

10. 함수 $f(x)=4x^3+2x^2-3x+1$에 대하여 $\int_{-3}^{1} f(x)dx-\int_{3}^{1} f(x)dx$의 값은?

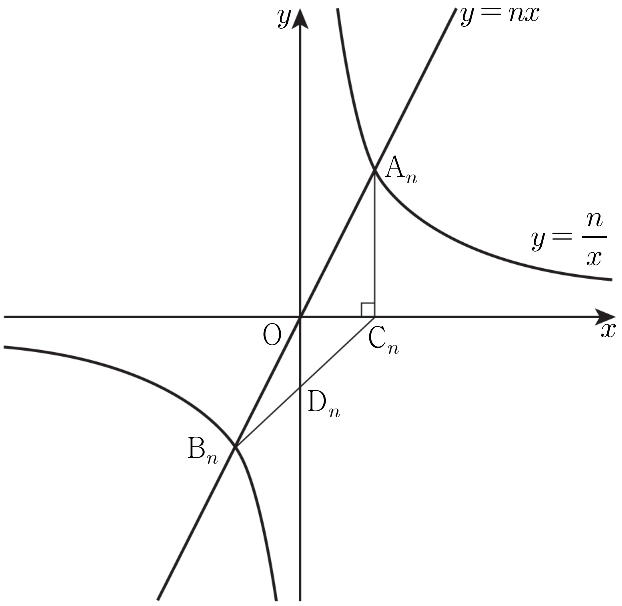
① 39 ② 42 ③ 45 ④ 48 ⑤ 51

11. 그림과 같이 점 A(4, -6)에서 곡선 $y=x^2-4x+3$에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라 하자. 직선 PQ와 곡선 $y=x^2-4x+3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는?



① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

12. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 $y=nx$, $y=\frac{n}{x}$의 그래프의 두 교점을 각각 A_n, B_n, 점 A_n에서 x축에 내린 수선의 발을 C_n, 선분 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$와 y축과의 교점을 D_n이라 하자. 사다리꼴 $\mathrm{OD}_n\mathrm{C}_n\mathrm{A}_n$의 넓이를 S_n, 삼각형 $\mathrm{OB}_n\mathrm{D}_n$의 넓이를 T_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n+n}{S_n+n+1}$의 값은?



① $\frac{2}{7}$　② $\frac{3}{7}$　③ $\frac{4}{7}$　④ $\frac{5}{7}$　⑤ $\frac{6}{7}$

주간 촌철살인 9주차 - 3회 미적분 1 : 문항출처

1번. (고2) 2007. 9 가형. 3번. 2점
2번. 2015. 3. A형. 8번. 3점
3번. 2015. 수능특강. 미적분과 통계기본. 부정적분과 정적분
4번. 2015. 수능특강. 미적분과 통계기본. 부정적분과 정적분
5번. 2016. 수능특강. 미적분1. 미분계수와 도함수
6번. 2013. 9. A형. 15번. 4점
7번. 2016. 수능특강. 미적분1. 미분계수와 도함수
8번. (고2) 2006. 11 가형. 11번. 3점
9번. 2015. 수능특강. 미적분과 통계기본. 도함수의 활용(2)
10번. 2016. EBS Final 모의고사. 나형. 2회
11번. 2016. EBS Final 모의고사. 나형. 2회
12번. (고2) 2007. 11 가형. 14번. 4점

주간 촌철살인 9주차 - 3회 미적분 1: 정답 및 해설

1) 정답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n(2^{n+1}+1)}{4^{n+1}+2^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}+2^n}{2^{2n+2}+2^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2^{2n}+2^n}{4\cdot 2^{2n}+2^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{2^n}}{4+\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{2^{2n}}}=\frac{1}{2}$$

2) 정답 ⑤

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)=0$ $\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}=5$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3}{a_n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-\dfrac{5n}{n+1}+\dfrac{5n}{n+1}+3}{a_n-\dfrac{5n}{n+1}+\dfrac{5n}{n+1}-1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-\dfrac{5n}{n+1}\right)+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n}{n+1}+\lim\limits_{n\to\infty}3}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-\dfrac{5n}{n+1}\right)+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n}{n+1}-\lim\limits_{n\to\infty}1}=\frac{0+5+3}{0+5-1}=2$$

3) 정답 ③

$$\int_0^a(4x-3)dx=\Big[2x^2-3x\Big]_0^a=(2a^2-3a)-0=5$$

$$2a^2-3a-5=0\ \ (2a-5)(a+1)=0\ \therefore\ a=\frac{5}{2}\ \ (\because\ a>0)$$

4) 정답 ②

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x f(t)dt=\lim_{x\to2}\frac{1}{(x+2)(x-2)}\int_2^x f(t)dt=\lim_{x\to2}\left\{\frac{1}{x+2}\times\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt\right\}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}\times\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt=\frac{1}{4}f(2)=\frac{1}{4}(8-4+5)=\frac{9}{4}$$

5) 정답 4

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

(ⅰ) 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다. 즉, $\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1+}g(x)=g(1)$에서

$f(1)=1+a+b=7,\ b=-a+6$ ⋯⋯ ㉠

(ⅱ) 미분계수 $g'(1)$이 존재하므로 $\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-7}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(x^2+ax-a+6)-7}{x-1}$

$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}(x+a+1)=2+a$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x^4+6)-7}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x^4-1}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}(x+1)(x^2+1)=4$$

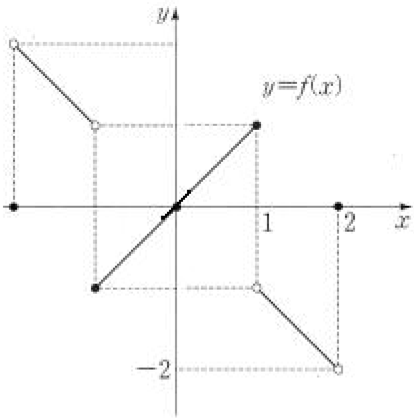
$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$ 에서 $2+a=4,\ a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=4$

따라서 함수 $g(x)=\begin{cases} x^2+2x+4 & (x<1) \\ x^4+6 & (x \geq 1) \end{cases}$ 이므로 $g(-2)=4-4+4=4$

6) 정답 ①

문제의 주어진 그래프와 $f(-x)=-f(x)$은 기함수라는 의미이며 원점에 대하여 대칭인 모양의 그래프이므로 아래와 같다.



$\lim_{x\to -1+} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 2-} f(x) = -2$, $-1+(-2) = -3$ $\therefore -3$

7) 정답 50

$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-x)^k}{k}=-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5+\cdots+\frac{(-1)^n}{n}x^n$

$f'(x)=-1+x-x^2+x^3-x^4+\cdots+(-1)^n x^{n-1}$

따라서 $f'(1)=-1+1-1+1-1+\cdots+(-1)^n$ 이므로 $f'(1)=\begin{cases} -1 & (n\text{이 홀수}) \\ 0 & (n\text{는 짝수}) \end{cases}$

$f'(1)=0$ 이려면 n은 짝수이어야 하므로 구하는 100 이하의 자연수 n의 개수는 50이다.

8) 정답 ③

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$(일정)이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$ (참)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n=\beta$ (참)

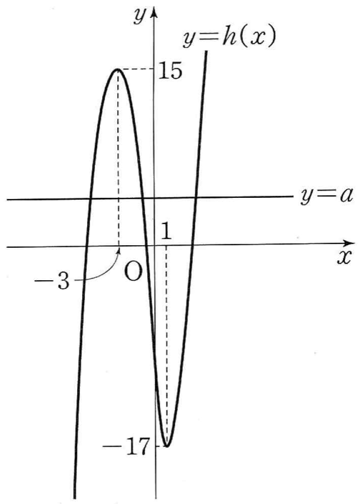
ㄷ. 반례) $a_n=n-\frac{1}{n}$, $b_n=n+\frac{1}{n}$, $c_n=n$이면, $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$이지만 $\lim_{n\to\infty} c_n=\infty$ (거짓)

9) 정답 ④

$f(x)=g(x)$에서 $2x^3+x^2-4x-12=x^3-2x^2+5x+a$ $\therefore$ $x^3+3x^2-9x-12=a$

방정식 $x^3+3x^2-9x-12=a$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=x^3+3x^2-9x-12$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 개수와 같다. $h(x)=x^3+3x^2-9x-12$로 놓으면 $h'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$이므로 $h'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$ 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	15	↘	-17	↗



함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 $-17<a<15$이어야 한다. 따라서 정수 a는 -16, -15, $\cdots$, 14의 31개다.

10) 정답 ②

$$\int_{-3}^{1} f(x)dx - \int_{3}^{1} f(x)dx = \int_{-3}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx = \int_{-3}^{3} f(x)dx = \int_{-3}^{3} (4x^3+2x^2-3x+1)dx$$

$$= \int_{-3}^{3} (2x^2+1)dx = 2\int_{0}^{3} (2x^2+1)dx = 2\left[\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^3 = 2(18+3) = 42$$

11) 정답 ④

접점을 $\mathrm{T}(t, t^2-4t+3)$이라 하면 $y'=2x-4$이므로 점 T에서의 접선의 방정식은 $y-(t^2-4t+3)=(2t-4)(x-t)$

접선이 점 $\mathrm{A}(4, -6)$을 지나므로 $-6-(t^2-4t+3)=(2t-4)(4-t)$ 이 식을 정리하면 $t^2-8t+7=0$

$(t-1)(t-7)=0$ $t=1$ 또는 $t=7$

$\mathrm{P}(1,0)$, $\mathrm{Q}(7,24)$이므로 직선 PQ의 방정식은 $y-0=\frac{24-0}{7-1}(x-1)$, $y=4x-4$ 따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{1}^{7}\{(4x-4)-(x^2-4x+3)\}dx = \int_{1}^{7}(-x^2+8x-7)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+4x^2-7x\right]_1^7 = 36$$

12) 정답 ④

$nx=\frac{n}{x}$에서 $x=\pm1$이므로 두 그래프의 교점 $\mathrm{A}_n(1,\ n)$, $\mathrm{B}_n(-1,\ -n)$이고 $\mathrm{C}_n(1,\ 0)$이다.

직선 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 방정식은 $y=\frac{n}{2}(x-1)$이므로 $\mathrm{D}_n\left(0,\ -\frac{n}{2}\right)$이다. 따라서 $S_n=\frac{1}{2}\ \square 1 \square \left(\frac{n}{2}+n\right)=\frac{3}{4}n$

$T_n=\frac{1}{2}\ \square 1 \square \frac{n}{2}=\frac{n}{4}$ $\therefore$ (준식)$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{4}+n}{\frac{3}{4}n+n+1}=\frac{5}{7}$

주간 촌철살인 9주차 - 4회 : 확률과 통계

1. ${}_4\mathrm{C}_2 \times 3!$ 의 값은?

① 12 ② 24 ③ 36 ④ 48 ⑤ 60

2. $\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하여라.

3. 확률변수 X의 확률분포 표는 다음과 같다.

X	1	2	3	4	계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$2a$	$3a$	$4a$	1

확률변수 $4X+7$의 평균 $E(4X+7)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

4. 남학생 12명과 여학생 2명이 일렬로 설 때, 여학생끼리는 이웃하지 않고 남학생끼리는 서로 이웃한 학생 수가 항상 짝수가 되도록 줄을 서는 경우의 수는 $N \times 12!$이다. 자연수 N의 값은?

① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

5. 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$을 따른다. $P(X=2)=10P(X=1)$이 성립할 때, n의 값을 구하시오.

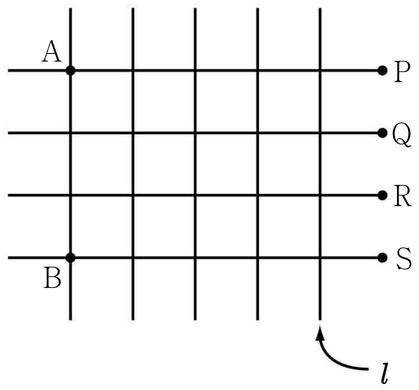
6. 공사건이 아닌 두 사건 A, B가 서로 독립이고 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{3}$일 때, $\mathrm{P}(A^C)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.)

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

7. $P(9,\ 4)$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

8. 그림과 같이 가로 방향 도로와 세로 방향 도로가 각각 서로 평행한 도로망이 있다. 도로망 위의 A, B지점에 숙소가 있고, P, Q, R, S지점에 관광지가 있다. 부모님을 모시고 효도관광을 온 어느 가족이 A지점에 있는 숙소를 출발하여 P, Q, R, S지점에 있는 관광지 중 두 곳을 관광한 후 B지점에 있는 숙소로 가기로 하였을 때, 이 가족이 도로망을 따라 이동할 수 있는 최단 경로의 수를 구하시오. (단, P, Q, R, S지점에서 직선도로 l까지의 거리는 모두 같다.)



9. 집합 $A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$를 공집합이 아닌 두 개 이상의 부분집합으로 분할할 때, 부분집합의 원소의 개수가 모두 다른 경우의 수는?

① 79 ② 81 ③ 83 ④ 85 ⑤ 87

10. 어느 회사에서 생산하는 화장품 A의 용량은 평균이 100mL, 표준편차가 3mL인 정규분포를 따르고, 화장품 B의 용량은 평균이 120mL, 표준편차가 4mL인 정규분포를 따른다. 이 회사에서 생산하는 화장품 A와 화장품 B의 용량이 평균과 각각 6mL 이상의 차이가 날 때, 불량품으로 판정한다. 이 회사에서 생산한 화장품 A 한 개와 화장품 B 한 개를 임의로 선택할 때, 이들이 불량품으로 판정될 확률을 각각 p_1, p_2라 하자. p_2-p_1의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0880 ② 0.0919 ③ 0.1838 ④ 0.2417 ⑤ 0.2718

11. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수를 구하시오.

> (가) $a+b+c+d+e=10$
> (나) 세 수 a, 3, b는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

12. 좌표평면 위의 점 P가 다음 규칙에 따라 이동한다.

> (가) 원점에서 출발한다.
> (나) 동전을 1개 던져서 앞면이 나오면 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한다.
> (다) 동전을 1개 던져서 뒷면이 나오면 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한다.

1개의 동전을 6번 던져서 점 P가 $(a,\ b)$로 이동하였다. $a+b$가 3의 배수가 될 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

13. 다음과 같이 정의된 확률변수 X, Y, Z 의 분산의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은? (단, $V(X)$는 확률변수 X 의 분산이다.)

X: 연속하는 100 개의 자연수에서 임의로 뽑은 두 수의 차
Y: 연속하는 100 개의 홀수에서 임의로 뽑은 두 수의 차
Z: 연속하는 100 개의 짝수에서 임의로 뽑은 두 수의 차

① $\mathrm{V}(X) < \mathrm{V}(Y) < \mathrm{V}(Z)$ ② $\mathrm{V}(X) = \mathrm{V}(Y) = \mathrm{V}(Z)$ ③ $\mathrm{V}(X) > \mathrm{V}(Y) = \mathrm{V}(Z)$

④ $\mathrm{V}(X) = \mathrm{V}(Y) < \mathrm{V}(Z)$ ⑤ $\mathrm{V}(X) < \mathrm{V}(Y) = \mathrm{V}(Z)$

주간 촌철살인 9주차 – 4회 확률과 통계 : 문항출처

1번. (고2) 2010. 3. 1번. 2점
2번. 2013. 사관학교. 문과. 25번. 3점
3번. 2012. 10. 가형. 24번. 3점
4번. (고2) 2012. 3. 14번. 3점
5번. 2007. 10. 나형. 18번. 3점
6번. 2015. 10. A형. 6번. 3점
7번. 2016. EBS Final 나형. 1회
8번. (고2) 2009. 11 가형. 30번. 4점
9번. 2016. 수능특강. 확률과 통계. 이항정리와 분할
10번. 2016. EBS Final 나형. 1회
11번. 2016. EBS Final 나형. 1회
12번. 2015. 10. A형. 28번. 4점
13번. 2004. 9. 가나형(공통문항). 11번. 3점

주간 촌철살인 9주차 - 4회 확률과 통계: 정답 및 해설

1) 정답 ③

$_{4}\mathrm{C}_{2}\times 3! = \dfrac{_{4}\mathrm{P}_{2}}{2!}\times 3! = 6\times 6 = 36$

2) 정답 160

$\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^6$ 의 전개식의 일반항 $_{6}\mathrm{C}_{r}(x^2)^r\left(\dfrac{2}{x}\right)^{6-r} = {_{6}\mathrm{C}_{r}}\cdot 2^{6-r}x^{3r-6}$ 에서 x^3 항은 $3r-6=3$ $\therefore\ r=3$ 따라서 x^3 의 계수는 $_{6}\mathrm{C}_{3}\cdot 2^{6-3}=160$ 이다.

3) 정답 19

$a+2a+3a+4a=1$에서 $a=\dfrac{1}{10}$ $\mathrm{P}(X=x)=\dfrac{1}{10}x$, $\mathrm{E}(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{4}k\cdot\dfrac{k}{10}=\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{4\cdot 5\cdot 9}{6}=3$

$\therefore\ \mathrm{E}(4X+7)=4\mathrm{E}(X)+7=12+7=19$

4) 정답 ④

∧◯◯∧◯◯∧◯◯∧◯◯∧◯◯∧◯◯∧

우선 남학생 12 명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $12!$ 이다. 여기서 남학생 2 명씩 묶어서 그 사이에 여학생 2 명을 세우는 경우의 수는 $_{7}P_{2}=7\times 6=42$ 이므로 경우의 수는 $42\times 12!$ 이 되어 $N=42$ 이다.

5) 정답 21

$_{n}\mathrm{C}_{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}=10\,{_{n}\mathrm{C}_{1}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}$, $\dfrac{n(n-1)}{2}=10n$ 이므로 $n=21$

6) 정답 ①

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $\dfrac{1}{3}=\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$에서 $\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{2}{3}$

7) 정답 ③

$P(9,\ 4)$는 자연수 9를 4개의 자연수의 합으로 분할하는 경우의 수이다.

자연수 9를 4개의 자연수의 합으로 분할하면

$9=6+1+1+1\ =5+2+1+1\ =4+3+1+1\ =4+2+2+1\ =3+3+2+1\ =3+2+2+2$

따라서 $P(9,\ 4)=6$

8) 정답 66

(ⅰ) $\mathrm{A}\to\mathrm{P}\to\mathrm{Q}\to\mathrm{B}$ 경로의 경우: $1\times 1\times\dfrac{6!}{4!2!}=15$

(ⅱ) $\mathrm{A}\to\mathrm{P}\to\mathrm{R}\to\mathrm{B}$ 경로의 경우: $1\times 1\times\dfrac{5!}{4!}=5$

(ⅲ) $\mathrm{A}\to\mathrm{P}\to\mathrm{S}\to\mathrm{B}$ 경로의 경우: $1\times 1\times 1=1$

(ⅳ) $\mathrm{A}\to\mathrm{Q}\to\mathrm{R}\to\mathrm{B}$ 경로의 경우: $\dfrac{5!}{4!}\times 1\times\dfrac{5!}{4!}=25$

(ⅴ) A→Q→S→B 경로의 경우: $\frac{5!}{4!}\times 1\times 1=5$

(ⅵ) A→R→S→B 경로의 경우: $\frac{6!}{4!2!}\times 1\times 1=15$ 따라서 총 66가지이다.

9) 정답 ②

집합 A 의 원소의 개수가 6이므로 집합 A 를 공집합이 아닌 두 개 이상의 부분집합으로 분할할 때, 원소의 개수가 모두 다른 경우는 다음과 같이 3가지이다.

(ⅰ) 두 부분집합의 원소의 개수가 $(5,\ 1)$인 경우 ${}_6C_5\times {}_1C_1={}_6C_1\times {}_1C_1=6$

(ⅱ) 두 부분집합의 원소의 개수가 $(4,\ 2)$인 경우 ${}_6C_4\times {}_2C_2={}_6C_2\times {}_2C_2=15$

(ⅲ) 세 부분집합의 원소의 개수가 $(3,\ 2,\ 1)$인 경우 ${}_6C_3\times {}_3C_2\times {}_1C_1={}_6C_3\times {}_3C_1\times {}_1C_1=60$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해 $6+15+60=81$

10) 정답 ①

화장품 A의 용량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 3^2)$을 따르고 $Z=\frac{X-100}{3}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$p_1=\mathrm{P}(|X-100|\geq 6)=\mathrm{P}(X\leq 94)+\mathrm{P}(X\geq 106)=\mathrm{P}\left(Z\leq \frac{94-100}{3}\right)+\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{106-100}{3}\right)$$

$$=\mathrm{P}(Z\leq -2)+\mathrm{P}(Z\geq 2)=2\mathrm{P}(Z\geq 2)=2\{0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2\}=2(0.5-0.4772)=0.0456$$

화장품 B의 용량을 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 4^{2)}$을 따르므로

$$p_2=\mathrm{P}(|Y-120|\geq 6)=\mathrm{P}(Y\leq 114)+\mathrm{P}(Y\geq 126)=\mathrm{P}\left(Z\leq \frac{114-120}{4}\right)+\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{126-120}{4}\right)$$

$$=\mathrm{P}(Z\leq -1.5)+\mathrm{P}(Z\geq 1.5)=2\mathrm{P}(Z\geq 1.5)=2\{0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)\}=2(0.5-0.4332)=0.1336$$

따라서 $p_2-p_1=0.1336-0.0456=0.0880$

11) 정답 105

조건 (나)에서 세수 $a,\ 3,\ b$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $a+b=6$ ……㉠

조건 (가)에서 $a+b+c+d+e=10$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $6+c+d+e=10$ $c+d+e=4$

(i) $a+b=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b$의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 ${}_2H_6={}_{2+6-1}C_6={}_7C_6={}_7C_1=7$

(ii) $c+d+e=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $c,\ d,\ e$의 모든 순서쌍 $(c,\ d,\ e)$의 개수는

$${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times 5}{2\times 1}=15$$

(i),(ii)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는 $7\times 15=105$

12) 정답 43

$a=6$이고 $0\leq b\leq 6$이므로 $a+b$가 3의 배수가 되는 경우는 $b=0,\ 3,\ 6$

$${}_6C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{64}+\frac{20}{64}+\frac{1}{64}=\frac{11}{32}\quad \therefore p+q=43$$

13) 정답 ⑤

(ⅰ) 연속하는 100개의 자연수를 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{100}$으로 놓으면 $1\leq |a_i-a_j|\leq 99$ $(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ 100,\ i\neq j)$

따라서, 확률변수 X가 취할 수 있는 값은 1, 2, 3, ⋯, 99이다.

(ⅱ) 연속하는 100개의 홀수를 b_1, b_2, ⋯, b_{100}으로 놓으면 $2 \leqq |b_k - b_l| \leqq 198$ (k, $l = 1$, 2, ⋯, 100, $k \neq l$)

따라서, 확률변수 Y가 취할 수 있는 값은 2, 4, 6, ⋯, 198이다.

(ⅲ) 연속하는 100개의 짝수를 c_1, c_2, ⋯, c_{100}으로 놓으면 $2 \leqq |c_m - c_n| \leqq 198$ (m, $n = 1$, 2, ⋯, 100, $m \neq n$)

따라서, 확률변수 Z가 취할 수 있는 값은 2, 4, 6, ⋯, 198이다.

따라서, $Y = Z = 2X$이므로 V(Y)=V(Z)=4V(X)   ∴ V(X)<V(Y)=V(Z)

주간

촌철살인