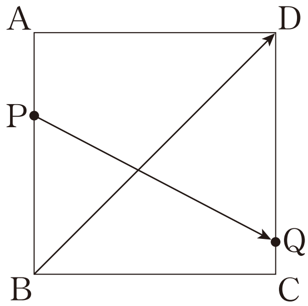
D ㅇ N ㅜ T ㅅ
웃솔루션

Quiz

한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD의 둘레 위를 움직이는 두 점 P, Q가 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{PQ} = 2$를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{PQ}|^2$의 최댓값과 최솟값의 합은?



① $\frac{21}{4}$　② $\frac{11}{2}$　③ $\frac{23}{4}$　④ 6　⑤ $\frac{25}{4}$

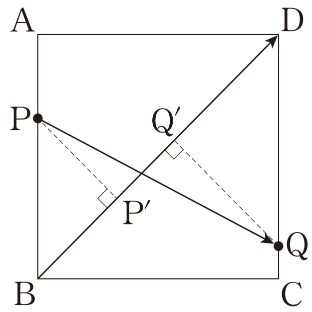
Open Solution

- 내적의 기하학적인 의미를 파악해야 합니다.
- 크기가 정해지지 않은 선분의 길이를 내적을 이용하여 길이를 구할 수 있습니다.

$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{PQ} = 2$이므로 점 P에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 P′, 점 Q에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 Q′이라 하면 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{P'Q'} = 2$이다.

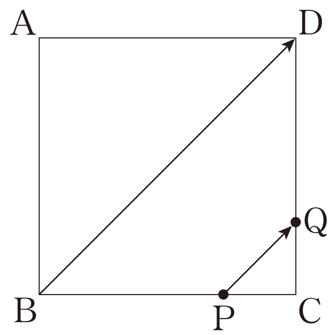
두 벡터 $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{P'Q'}$는 서로 평행하고 $|\overrightarrow{BD}| = 2\sqrt{2}$이므로 $|\overrightarrow{P'Q'}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

즉, 두 점 P′, Q′는 $|\overrightarrow{P'Q'}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$를 항상 만족시킨다.



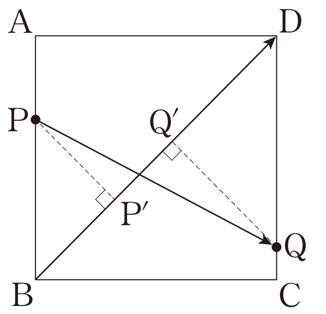
이때, $|\overrightarrow{PQ}|^2$가 최소가 되려면 점 P, Q의 위치가 다음과 같다.

(두 점 P′, Q′이 $|\overrightarrow{P'Q'}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$를 만족시키면서 $|\overrightarrow{PQ}|$의 값이 최소가 되도록 하는 두 점 P, Q의 위치이다. 두 벡터 $\overrightarrow{BD}$와 $\overrightarrow{PQ}$가 평행한 경우이며 $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$이다.)

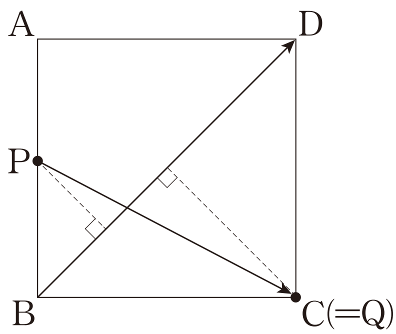


$|\overrightarrow{PQ}|^2$가 최대가 되려면 점 P, Q의 위치가 다음과 같다.

(두 점 P′, Q′이 $|\overrightarrow{P'Q'}|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$를 만족시키면서 $|\overrightarrow{PQ}|$의 값이 최대가 되도록 하는 두 점 P, Q의 위치이다.)



두 점 P와 Q의 위치가 위와 같이 서로 평행한 선분 위에 있는 경우이다. $|\overrightarrow{PQ}|$의 값을 구하기 위해서 조금 더 특수한 상황으로 두 점 P, Q의 위치를 설정하여 그림을 이끌어 내면



위 그림과 같다. 이때 $\overline{PB}=1$이므로 $|\overrightarrow{PQ}|$의 최댓값은 $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이다.

따라서 답은 $5+\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{2}$이다.

정답 ②