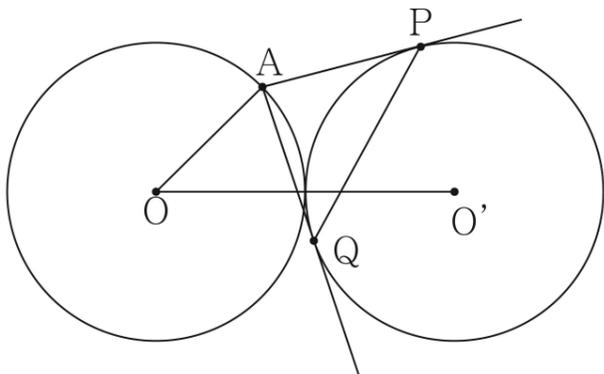


고지우의 **난문현답**

제 17 일

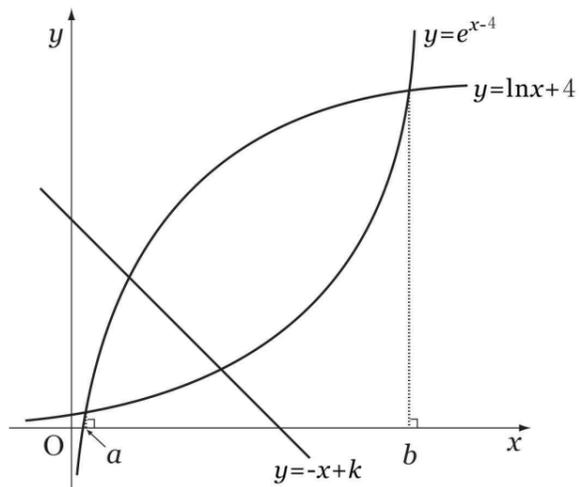
1. 2014년 6월 평가원
2. 2009년 7월 교육청
3. 2007년 9월 평가원
4. 2016년 3월 교육청
5. 2016년 수능
6. 2008년 10월 교육청
7. 2015년 9월 평가원
8. 2008년 수능
9. 2010년 9월 평가원
10. 2009년 사관학교

1. 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 1인 두 원 O, O' 이 외접하고 있다. 원 O 위의 점 A 에서 원 O' 에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q 라 하자. $\angle AOO' = \theta$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\overline{PQ}}{\theta}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)



- ① 2 ② $\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{2}$
- ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

2. 그림과 같이 함수 $y = \ln x + 4$, $y = e^{x-4}$ 의 그래프의 두 교점의 x 좌표를 각각 a, b 라 하자. 일차함수 $y = -x + k$ 의 그래프가 $a \leq x \leq b$ 에서 두 함수의 그래프와 만나는 두 점 사이의 거리가 최대가 될 때, 상수 k 의 값은?



- ① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$
- ④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

3. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$ 가
 $f(-1)=-1, f(0)=1, f(1)=0$
 을 만족시킬 때, [보기]에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

- ㄱ. $f(a)=\frac{1}{2}$ 인 실수 a 가 구간 $(-1,1)$ 에 두 개 이상 존재한다.
- ㄴ. $f'(b)=-1$ 인 실수 b 가 구간 $(-1,1)$ 에 적어도 한 개 존재한다.
- ㄷ. $f''(c)=0$ 인 실수 c 가 구간 $(-1,1)$ 에 적어도 한 개 존재한다.

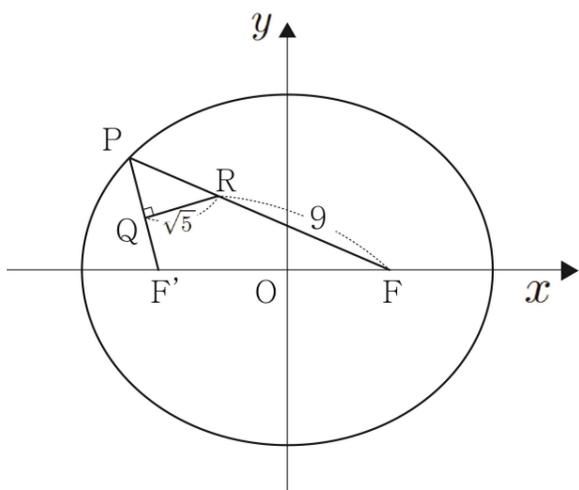
- ① ㄱ
- ② ㄱ, ㄴ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 함수 $f(x)=x^2e^{ax}$ ($a < 0$)에 대하여 부등식 $f(x) \geq t$ ($t > 0$)을 만족시키는 x 의 최댓값을 $g(t)$ 라 정의하자. 함수 $g(t)$ 가 $t = \frac{16}{e^2}$ 에서 불연속일 때, $100a^2$ 의 값을 구하시오.

(단, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$)

5. 그림과 같이 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ 이 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이 있다. 타원 위에 있고 제 2사분면에 있는 점 P에 대하여 선분 PF' 의 중점을 Q, 선분 PF 를 1:3으로 내분하는 점을 R이라 하자.

$\angle PQR = \frac{\pi}{2}$, $QR = \sqrt{5}$, $RF = 9$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.
(단, a, b, c 는 양수이다.)



6. 두 전진주 사이에 늘어져 있는 전진줄이나 현수교의 케이블 등에서 볼 수 있는 곡선은 '현수선'이라 불리며, $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 꼴의 곡선의 방정식으로 표현된다. $f(x)$ 에 대한 다음 [보기]의 설명 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

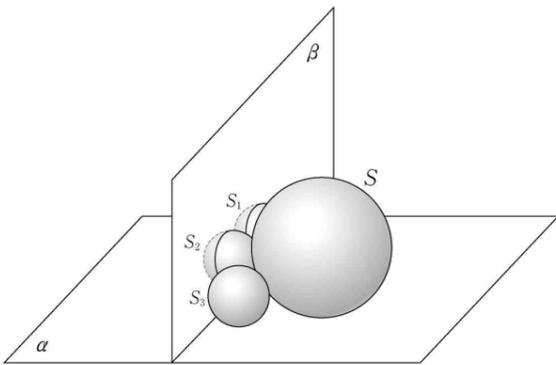
- ㄱ. $f(3) > f(2) + f'(2)$
- ㄴ. $x \geq 0$ 일 때, $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때,
 $g'\left(\frac{e^2 + e^{-2}}{2}\right) = \frac{e^2 - e^{-2}}{2}$ 이다.
- ㄷ. 점 $(0, 1)$ 에서 출발하여 곡선 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 의 제 1사분면 위를 매초 1의 속력으로 움직이는 점 P에 대하여 t 초 후의 점 P의 x 좌표는 $\ln(t + \sqrt{t^2 + 1})$ 이다.

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄷ
- ④ ㄱ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7. 그림과 같이 평면 α 위에 놓여 있는 서로 다른 네 구 S, S_1, S_2, S_3 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) S 의 반지름의 길이는 3이고, S_1, S_2, S_3 의 반지름의 길이는 1이다.
 (나) S_1, S_2, S_3 은 모두 S 에 접한다.
 (다) S_1 은 S_2 와 접하고, S_2 는 S_3 과 접한다.

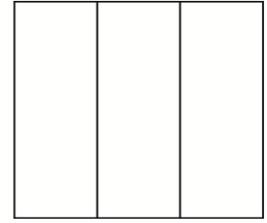
S_1, S_2, S_3 의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3 이라 하자.
 두 점 O_1, O_2 을 지나고 평면 α 에 수직인 평면을 β , 두 점 O_2, O_3 을 지나고 평면 α 에 수직인 평면이 S_3 과 만나서 생기는 단면을 D 라 하자. 단면 D 의 평면 β 위로의 정사영의 넓이를 $\frac{q}{p}\pi$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.
 (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



8. 다음과 같이 정사각형을 가로 방향으로 3등분하여 [도형 1]을 만들고, 세로 방향으로 3등분하여 [도형2]를 만든다.

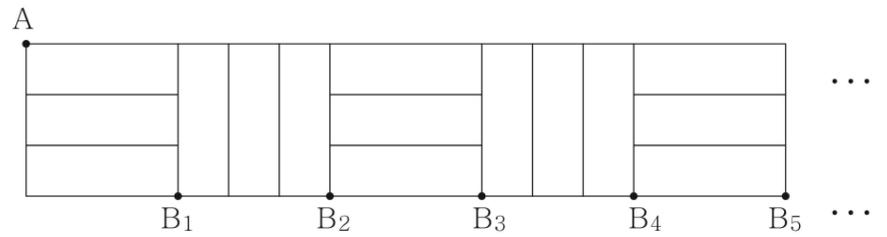


[도형1]



[도형2]

[도형1]과 [도형2]를 번갈아 가며 계속 붙여 아래와 같은 도형을 만든다. 그림과 같이 첫 번째 붙여진 [도형1]의 왼쪽 맨 위 꼭지점을 A 라 하고, [도형1]의 개수와 [도형2]의 개수를 합하여 n 개 붙여 만든 도형의 오른쪽 맨 아래 꼭지점을 B_n 이라 하자.



꼭지점 A 에서 꼭지점 B_n 까지 선을 따라 최단거리로 가는 경로의 수를 a_n 이라 할 때, $a_3 + a_7$ 의 값은?

- ① 26 ② 28 ③ 30
 ④ 32 ⑤ 34

9. 1부터 9까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수 $a, b, c(a < b < c)$ 가 다음 조건을 만족시킬 확률은?

- (가) $a+b+c$ 는 홀수이다.
 (나) $a \times b \times c$ 는 3의 배수이다.

- ① $\frac{5}{14}$ ② $\frac{8}{12}$ ③ $\frac{17}{42}$
 ④ $\frac{3}{7}$ ⑤ $\frac{19}{42}$

10. 주사위 한 개를 n 번 던지는 시행에서 나타나는 눈의 수들 중에서 가장 큰 수를 a_n , 가장 작은 수를 b_n 이라 하자. 예를 들면, 주사위를 한 번 던지는 시행에서 나타나는 눈의 수가 3이면 $a_1 = b_1 = 3$ 이고, 주사위를 두 번 던지는 시행에서 나타나는 눈의 수가 4, 6이면 $a_2 = 6, b_2 = 4$ 이다.

$a_n - b_n < 5$ 가 될 확률을 p_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 의 값은?

- ① 7 ② 8 ③ 9
 ④ 10 ⑤ 11

17일차 과제

1. 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 $A(1, 0)$ 에 대하여 선분 OA 위의 한 점을 지나고 선분 OA와 수직인 직선이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 두 점 P, Q에서 만난다.

$\angle POA = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)이고 삼각형 APQ의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할

때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{S(\frac{\theta}{2})}$ 의 값은? (단, O는 원점이다.)

- ① 2 ② 4 ③ 6
- ④ 8 ⑤ 10

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\log_2(1+x)}$ 의 값은?

- ① 0 ② $(\ln 2)^2$ ③ $\ln 2$
- ④ 1 ⑤ $2\ln 2$

3. 함수 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 에 대하여 $f'(t) = 0$ 을 만족시키는 상수 t 의 값은?

- ① 0 ② $\frac{1}{e}$ ③ 1
- ④ e ⑤ e^2

4. 함수 $f(x) = \begin{cases} \ln x + a & (x > 1) \\ ae^x + b & (x \leq 1) \end{cases}$ 이 실수 전체의 집합에서 미분 가능할 때, $a+b$ 의 값은? (단, a 와 b 는 상수이다.)

- ① $\frac{1}{e} - 2$ ② $\frac{2}{e} - 2$ ③ $\frac{1}{e} - 1$
- ④ $\frac{2}{e} - 1$ ⑤ $\frac{1}{e}$

17일차 과제

5. 함수 $f(x) = \frac{(x-1)(x+4)}{(x+2)^3}$ 에 대하여 $f'(0)$ 의 값은?

- ① 1 ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{5}{4}$
- ④ $\frac{11}{8}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

6. 열린구간 $(0, \infty)$ 에서 곡선 $y = \frac{x^2}{x^2+3}$ 의 변곡점이 (a, b) 일 때, $20(a+b)$ 의 값은?

- ① 20 ② 25 ③ 30
- ④ 35 ⑤ 40

7. 곡선 $y = e^{-x}$ 위의 점 (t, e^{-t}) 에서의 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 P, Q 라 하자. 삼각형 OPQ 의 넓이를 $f(t)$ 라 할 때, $f(t)$ 의 최댓값은? (단, $t > 0$ 이고, O 는 원점이다.)

- ① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{2}{e}$ ③ 1
- ④ $\frac{e}{2}$ ⑤ e

8. 함수 $f(x) = x^2 \ln x$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f'(1) = 1$

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ 에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. 방정식 $f(x) + \frac{1}{e} = 0$ 의 실근의 개수는 2이다.

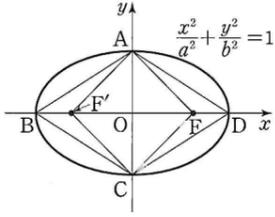
- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17일차 과제

9. 그림과 같이 타원

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

의 두 초점을 F, F'이라 하고, 네 꼭짓점을 A, B, C, D라고 하자. 사각형 AF'CF가 넓이가 12인 정사각형일 때, 사각형 ABCD의 넓이는?



- ① $12\sqrt{2}$ ② $14\sqrt{2}$ ③ $12\sqrt{3}$
- ④ $16\sqrt{2}$ ⑤ $14\sqrt{3}$

10. 두 직선 $y=2x$, $y=-2x$ 를 점근선으로 하고 두 초점이 x 축 위에 있는 쌍곡선이 점 $(2, 2\sqrt{2})$ 를 지날 때, 주축의 길이는?

- ① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4
- ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

11. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가

$$x = \sqrt{t}, \quad y = \sqrt{t^2 + 3}$$

이다. $t=1$ 에서 점 P의 속력은?

- ① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1
- ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

12. 매개변수 t 로 나타내어진 곡선

$$x = 2t^3 - 6t + 1, \quad y = 6t^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

의 길이는?

- ① 4 ② 5 ③ 6
- ④ 7 ⑤ 8

17일차 과제

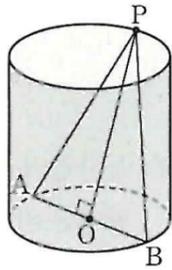
13. 좌표공간에서 구

$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 8y - 6z + 14 = 0$$

에 대하여 구 S 와 xy 평면이 만나서 생기는 도형을 C_1 이라 하고, 구 S 의 xy 평면 위로의 정사영을 C_2 라고 하자. 도형 C_1 의 외부와 도형 C_2 의 공통부분의 넓이는?

- ① 6π ② 7π ③ 8π
- ④ 9π ⑤ 10π

14. 그림과 같이 밑면인 원의 반지름의 길이가 1이고 높이가 2인 원기둥이 있다. 원기둥의 위쪽에 있는 밑면인 원의 둘레 위의 점 P 와 아래쪽에 있는 밑면인 원의 중심 O 에 대하여 직선 PO 에 수직인 아래쪽에 있는 밑면의 지름을 선분 AB 라고 하자. 평면 PAB 와 원기둥의 밑면이 이루는 예각의 크기를 θ 라고 할 때, $\cos\theta$ 의 값은?

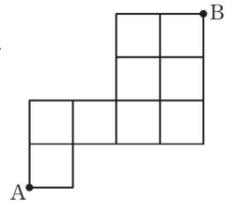


- ① $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{30}}{10}$
- ④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

15. 서로 다른 빵 5개와 같은 종류의 음료수 A가 2개, 같은 종류의 음료수 B가 3개 있다. 빵과 음료수를 5명에게 남김없이 나누어 주려고 할 때, 각 사람이 빵과 음료수를 각각 하나씩 받도록 나누어 주는 경우의 수는?

- ① 1100 ② 1200 ③ 1300
- ④ 1400 ⑤ 1500

16. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는?



- ① 30 ② 32 ③ 34
- ④ 36 ⑤ 38

17일차 과제

17. 7개의 문자 a, b, c, c, d, d, d 를 일렬로 나열할 때, a 와 b 가 서로 이웃하지 않는 경우의 수는?

- ① 200 ② 250 ③ 300
- ④ 350 ⑤ 400

18. 1부터 9까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 수를 택할 때, 두 수의 합이 짝수인 경우의 수는?

- ① 15 ② 16 ③ 17
- ④ 18 ⑤ 19

19. a, b, c, d, e 의 문자를 중복사용하여 5개의 문자를 택해 일렬로 나열할 때, 사용된 문자의 종류가 3가지인 경우의 수는?

- ① 1100 ② 1200 ③ 1300
- ④ 1400 ⑤ 1500

20. 주머니 안에 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적힌 숫자를 확인하고 주머니에 공을 되돌려 넣는 시행을 4번 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 차례로 a, b, c, d 라 하자. 네 수 a, b, c, d 가 세 식 $b^2 + c^2 = 20$, $a \leq b$, $c \leq d$ 를 모두 만족시킬 확률은?

- ① $\frac{2}{125}$ ② $\frac{4}{125}$ ③ $\frac{6}{125}$
- ④ $\frac{8}{125}$ ⑤ $\frac{2}{25}$