

고지우의 **난문현답**

제 20 일

1. 2015년 9월 평가원
2. 2011년 4월 교육청
3. 2005년 수능
4. 2014년 6월 평가원
5. 2010년 사관학교
6. 2015년 수능
7. 2008년 10월 교육청
8. 2006년 9월 평가원
9. 2010년 6월 평가원
10. 2011년 사관학교

1. 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하시오.

- (가) $1 \leq a \leq 10, 1 \leq b \leq 100$
- (나) 곡선 $y=2^x$ 이 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=1$ 과 만나지 않는다.
- (다) 곡선 $y=2^x$ 이 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=4$ 와 적어도 한 점에서 만난다.

2. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(0)=1, f(1)=2$
- (나) $f'(x)>0, f''(x)>0$ (단, $0 < x < 1$)

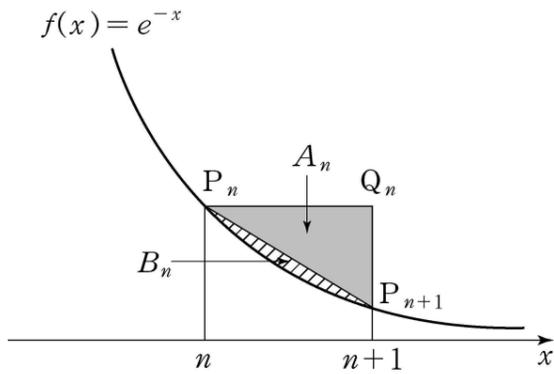
옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

- ㄱ. 함수 $y = \{f(x)\}^2$ 의 그래프는 구간 $(0, 1)$ 에서 아래로 볼록하다.
- ㄴ. $\int_0^1 \{f(x)+f(1-x)\}dx < 3$
- ㄷ. $\sum_{k=1}^n \frac{\left\{f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}^2 + \left\{f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^2}{2} \cdot \frac{1}{n} \geq \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$

- ① ㄱ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 함수 $f(x)=e^{-x}$ 과 자연수 n 에 대하여 점 P_n, Q_n 을 각각 $P_n(n, f(n)), Q_n(n+1, f(n))$ 이라 하자.

삼각형 $P_nP_{n+1}Q_n$ 의 넓이를 A_n , 선분 P_nP_{n+1} 과 함수 $y=f(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 B_n 이라 할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?



$\text{㉠. } \int_n^{n+1} f(x)dx = f(n) - (A_n + B_n)$ $\text{㉡. } \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{1}{2e}$ $\text{㉢. } \sum_{n=1}^{\infty} B_n = \frac{3-e}{2e(e-1)}$
--

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

4. 좌표평면에서 곡선 $y=x^2+x$ 위의 두 점 A, B 의 x 좌표를 각각 s, t ($0 < s < t$)라 하자. 양수 k 에 대하여 두 직선 OA, OB 와 곡선 $y=x^2+x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 k 가 되도록 하는 점 (s, t) 가 나타내는 곡선을 C 라 하자. 곡선 C 위의 점 중에서 점 $(1, 0)$ 과의 거리가 최소인 점의 x 좌표가 $\frac{2}{3}$ 일 때,

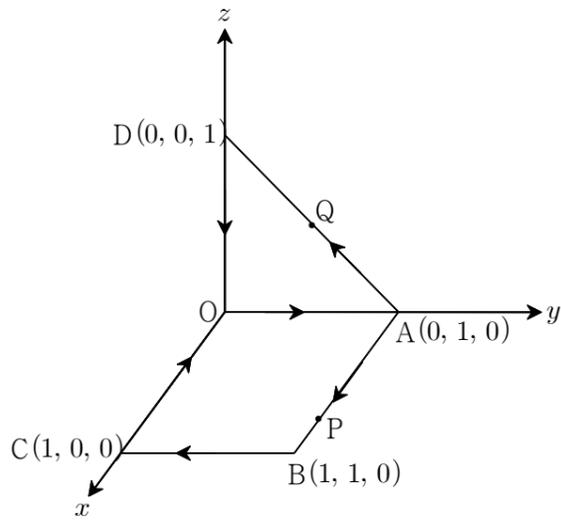
$k = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, O 는 원점이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

5. 좌표공간에 네 점 $A(0, 1, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, 0, 0)$, $D(0, 0, 1)$ 이 있다. 그림과 같이 점 P 는 원점 O 에서 출발하여 사각형 $OABC$ 의 둘레를 $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow \dots$ 의 방향으로 움직이며,

점 Q 는 원점 O 에서 출발하여 삼각형 OAD 의 둘레를 $O \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow O \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow \dots$ 의 방향으로 움직인다.

두 점 P, Q 가 원점 O 에 동시에 출발하여 각각 매초 1의 일정한 속력으로 움직인다고 할 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

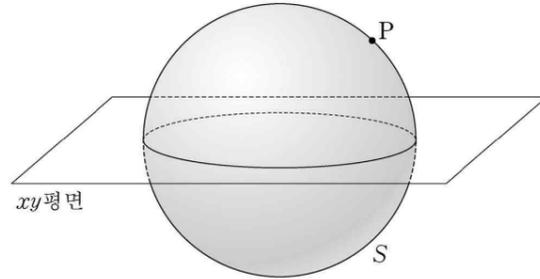


- ㄱ. 두 점 P, Q 가 출발 후 원점에서 다시 만나는 경우는 없다.
 ㄴ. 출발 후 4초가 되는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.
 ㄷ. 출발 후 2초가 되는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리는 $\sqrt{2}$ 이다.

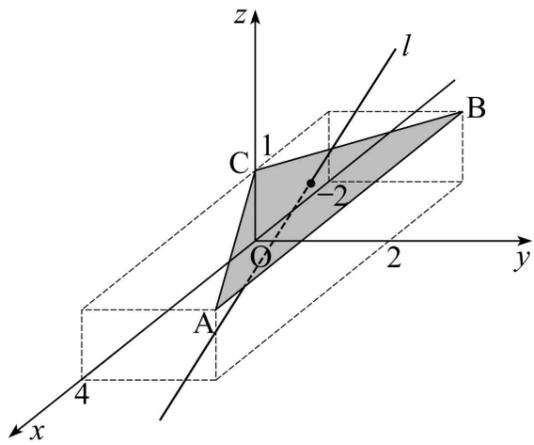
- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

6. 좌표공간에 구 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 50$ 와 점 $P(0, 5, 5)$ 가 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 원 C 에 대하여 다음 C 의 xy 평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 $\frac{q}{p}\pi$ 라 하자. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

- (가) 원 C 는 점 P 를 지나는 평면과 구 S 가 만나서 생긴다.
 (나) 원 C 는 반지름의 길이는 1이다.



7. 좌표공간에 세 점 $A(4, 2, 1)$, $B(-2, 2, 1)$, $C(0, 0, 1)$ 과 직선 $l : \frac{x+2}{a} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$ 가 있다.



직선 l 이 삼각형 ABC 의 변 또는 내부를 지나도록 상수 a 의 값을 정할 때, 정수 a 의 개수는?

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

8. 자연수 n 에 대하여

$f(n) = \sum_{k=1}^n ({}_{2k}C_1 + {}_{2k}C_3 + {}_{2k}C_5 + \dots + {}_{2k}C_{2k-1})$ 일 때, $f(5)$ 의 값을 구하시오.

9. 어느 창고에 부품 S가 3개, 부품 T가 2개 있는 상태에서 부품 2개를 추가로 들여왔다. 추가된 부품은 S 또는 T이고, 추가된 부품 중 S의 개수는 이항분포 $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다. 이 7개의 부품 중 임의로 1개를 선택한 것이 T일 때, 추가된 부품이 모두 S였을 확률은?

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

10. 어느 선박 부품 공장에서 만드는 부품의 길이 X 는 평균이 100, 표준편차가 0.6인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 만든 부품 중에서 9개를 임의추출한 표

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.65	0.450
1.96	0.475
2.58	0.495

본의 길이의 평균을 \bar{X} 라 할 때, 표본평균 \bar{X} 와 모평균의 차가 일정한 값 c 이상이면 부품의 제조과정에 대한 전면적인 조사를 하기로 하였다. 부품의 제조 과정에 대한 전면적인 조사를 하게 될 확률이 5%이하가 되도록 상수 c 의 값을 정할 때, c 의 최솟값은? (단, 단위는 mm이고, 오른쪽 표준정규분포표를 이용한다.)

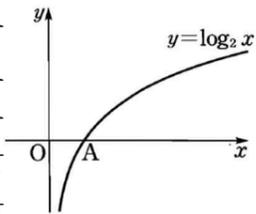
- ① 0.196 ② 0.258 ③ 0.330
 ④ 0.392 ⑤ 0.475

20일차 과제

1. 두 곡선 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, $y = \log_2 x + k$ 가 직선 $x = \frac{1}{2}$ 과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이가 4가 되도록 하는 모든 상수 k 의 값의 합은?

- ① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

2. 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점을 A라 하자. 선분 OA를 x 축의 방향으로 5만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 선분과 $y = \log_2(x+a)$ 의 그래프가 만날 때, 실수 a 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라. (단, 0는 원점이다.)



3. 자연수 n 에 대하여 $a_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx$ 라 할 때,

$\sum_{n=1}^{28} a_n a_{n+1}$ 의 값은?

- ① $\frac{13}{30}$ ② $\frac{7}{15}$ ③ $\frac{1}{2}$
 ④ $\frac{8}{15}$ ⑤ $\frac{17}{30}$

4. 연속함수 $f(x)$ 가

$$\int_0^x t f(x-t) dt = -4 \sin 3x + ax$$

를 만족시킬 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

20일차 과제

5. $0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때, 함수

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \sum_{k=1}^n \frac{kx}{n} \cos \frac{kx}{n}$$

는 $x=a$ 에서 극솟값 b 를 갖는다. 이때 $a+b$ 의 값을 구하여라.

6. 미분가능한 함수 $f(x)$ 가

$$f(6) = 4, \int_0^6 f(x) dx = 8$$

을 만족시킬 때, 정적분 $\int_0^{36} f'(\sqrt{x}) dx$ 의 값을 구하여라.

7. 곡선 $ax^2 + \sqrt{y} = b$ 위의 점 $(1, 4)$ 에서의 접선의 기울기가 -2 일 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은?

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

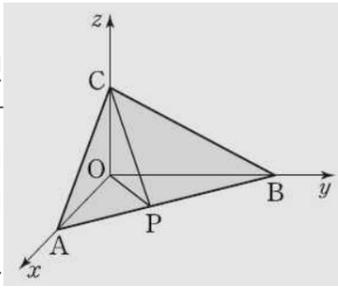
8. 곡선 $x^2y - 2 = 0$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선을 l 이라 할 때, 원점에서 직선 l 까지의 거리는?

- ① $\frac{\sqrt{17}}{17}$ ② $\frac{2\sqrt{17}}{17}$ ③ $\frac{4\sqrt{17}}{17}$
④ $\frac{5\sqrt{17}}{17}$ ⑤ $\frac{6\sqrt{17}}{17}$

20일차 과제

9. 좌표공간의 세 점

$A(2,0,0), B(0, \sqrt{14}, 0), C(0,0,2)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 에 대하여 각 ACB 를 이등분하는 직선과 선분 AB 의 교점을 P 라고 하자. 원점 O 에 대하여 $\overline{OP}^2 = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



11. 좌표공간에서 구

$$S: (x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = \frac{a^2}{4}$$

위의 점 P 에서 이 구에 접하는 직선이 원점 O 를 지난다.
 $\overline{OP} = \sqrt{22}$ 일 때, 구 S 의 반지름의 길이는?
(단, a 는 상수이다.)

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

10. 좌표공간의 두 점 $A(-2,5,4), B(2,2,0)$ 에 대하여 xy 평면에서 점 B 를 중심으로 하고 x 축과 y 축에 모두 접하는 원 위의 점을 P 라고 하자. 선분 AP 의 길이의 최솟값은?

- ① 4 ② $3\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{5}$
④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

12. 좌표공간에서 구 S 의 xy 평면 위로의 정사영은 중심이 $(1, 3, 0)$ 이고 반지름의 길이가 6인 원과 그 내부이다.
구 S 와 yz 평면이 만나서 생기는 원의 넓이는?

- ① 32π ② 33π ③ 34π
④ 35π ⑤ 36π

20일차 과제

13. 좌표공간에서 두 구

$$(x+1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 1,$$

$$x^2 + (y-3)^2 + (z-a)^2 = 4$$

의 중심을 모두 지나는 직선이 x 축과 만날 때, 상수 a 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0
 ④ 1 ⑤ 2

14. 좌표공간에서 점 $(2, a, b)$ 를 지나고 직선

$$\frac{x-1}{2} = y+1 = -\frac{z}{3}$$

와 평행한 직선을 l 이라 하자. 직선 l 이 원점을 지날 때, $a+b$ 의 값은?

- ① -5 ② -4 ③ -3
 ④ -2 ⑤ -1

15. $2_{10}C_1 + 2 \cdot 2^2_{10}C_2 + 3 \cdot 2^3_{10}C_3 + \dots + 10 \cdot 2^{10}_{10}C_{10}$ 의 값은?

- ① 10×3^9 ② 20×3^9 ③ 10×3^{10}
 ④ 20×3^{10} ⑤ 10×3^{11}

16. 다항식 $1 + (x+1) + (x+1)^2 + (x+1)^3 + \dots + (x+1)^{20}$ 의 전개식

에서 x^k 의 계수를 a_k 라 할 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값은?

- ① $2^{20} - 22$ ② $2^{20} - 21$ ③ $2^{21} - 22$
 ④ $2^{21} - 21$ ⑤ 2^{21}

20일차 과제

17. 동전 2개를 동시에 던지는 시행을 20회 반복할 때 동전 2개가 모두 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X 라 하자. $V(2X+1)$ 의 값은?

- ① 12 ② 13 ③ 14
 ④ 15 ⑤ 16

18. 이산확률변수 X 가 값 r 를 가질 확률이

$$P(X=r) = {}_{64}C_r \left(\frac{1}{4}\right)^r \left(\frac{3}{4}\right)^{64-r} \quad (r=0, 1, 2, \dots, 64)$$

일 때, $\sum_{r=0}^{64} r^2 {}_{64}C_r \left(\frac{1}{4}\right)^r \left(\frac{3}{4}\right)^{64-r}$ 의 값을 구하시오.

19. 정규분포 $N(m, 5^2)$ 을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n 인 표본의 표본평균을 \bar{X} 라 하자.

$P(|\bar{X}-m| > 3) < 0.0456$ 을 만족시키는 n 의 최솟값은? (단, Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 로 계산한다.)

- ① 8 ② 10 ③ 12
 ④ 14 ⑤ 16

20. 어느 나라를 방문한 관광객 1명이

<표준정규분포표>

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938
3.0	0.4987

체류기간 동안 지출한 금액은 평균이 500, 표준편차가 10인 정규분포를 따른다고 한다. 이 나라를 방문한 관광객 중 임의로 택한 4명이 체류기간 동안 지출한 금액의 합을 확률변수 X 라 할 때, $P(X \geq 1940)$ 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 금액의 단위는 달러이다.)

- ① 0.9332 ② 0.9544 ③ 0.9772
 ④ 0.9938 ⑤ 0.9987