고지우의 난문현답

제 18 일

1. 2011년 수능
2. 2006년 5월 교육청
3. 2015년 6월 평가원
4. 2005년 수능
5. 2015년 경찰대
6. 2014년 11월 교육청
7. 2013년 6월 평가원
8. 2011년 7월 교육청
9. 2007년 수능
10. 2007년 3월 교육청

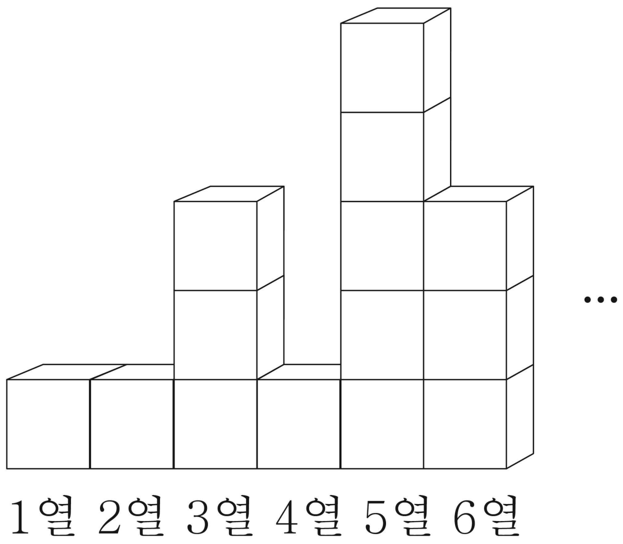
1. 자연수 m에 대하여 크기가 같은 정육면체 모양의 블록이 1열에 1개, 2열에 2개, 3열에 3개, $\cdots$, m열에 m개 쌓여있다. 블록의 개수가 짝수인 열이 남아 있지 않을 때까지 다음 시행을 반복한다.

블록의 개수가 짝수인 각 열에 대하여 그 열에 있는 블록의 개수의 $\frac{1}{2}$만큼의 블록을 그 열에서 들어낸다.

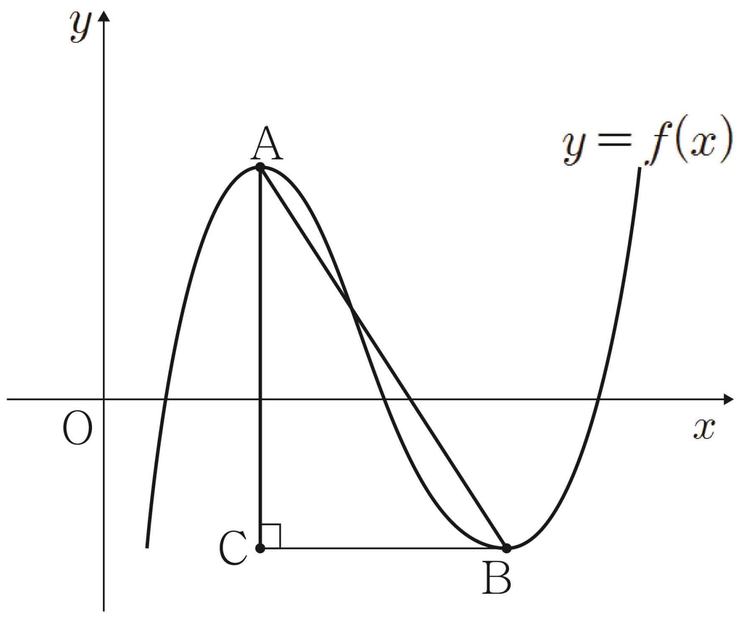
블록을 들어내는 시행을 모두 마쳤을 때, 1열부터 m열까지 남아 있는 블록의 개수의 합을 $f(m)$이라 하자.
예를 들어 $f(2)=2$, $f(3)=5$, $f(4)=6$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})}=\frac{q}{p}$$

일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



2. 삼차함수 $y=f(x)$는 점 A에서 극대이고 점 B에서 극소이며 극댓값과 극솟값의 차는 8이다. $y=f(x)$의 그래프 밖의 한 점 C에 대하여 $\triangle$ABC와 외심의 좌표가 $(6, 1)$, $\angle C=90^\circ$, $\overline{AB}=10$일 때, $f'(x)=0$의 두 근의 곱은? (단, $\overline{AC}$는 y축과 평행이다.)



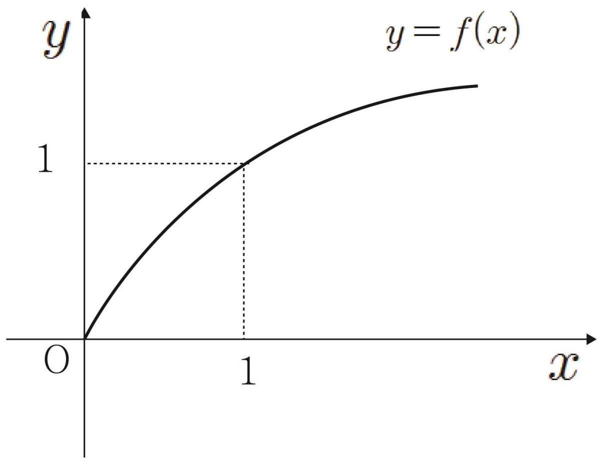
① 27 ② 30 ③ 33
④ 36 ⑤ 39

3. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $1 \le f'(x) \le 3$이다. (나) 모든 정수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(4n, 8n)$, 점 $(4n+1, 8n+2)$, 점 $(4n+2, 8n+5)$, 점 $(4n+3, 8n+7)$을 모두 지난다. (다) 모든 정수 k에 대하여 닫힌 구간 $[2k, 2k+1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 각각 이차함수의 그래프의 일부이다.

$\int_{3}^{6} f(x)dx = a$라 할 때, $6a$의 값을 구하시오.

4. 다음은 연속함수 $y=f(x)$의 그래프이다.



구간 $[0, 1]$에서 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 연속일 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$와 같은 값을 갖는 것은?

① $\int_{0}^{1} g(x)dx$ ② $\int_{0}^{1} xg(x)dx$ ③ $\int_{0}^{1} f(x)dx$

④ $\int_{0}^{1} xf(x)dx$ ⑤ $\int_{0}^{1} \{f(x)-g(x)\}dx$

5. 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} ax^3+bx^2+cx+1 & (x<1) \\ 1 & (x=1) \\ p(x-2)^3+q(x-2)^2+r(x-2)+5 & (x>1) \end{cases}$$

이고 $g(x)=f'(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족한다.

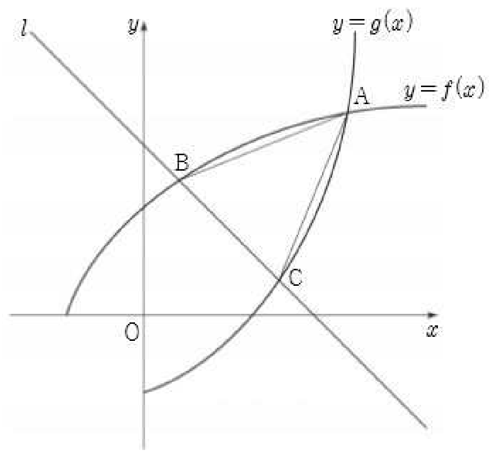
(가) $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다. (나) $g'(0)=g'(2)=0$

$\int_0^1 f(x)dx$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

6. 다음 그림과 같이 함수 $f(x)=\sqrt{2x+3}$의 그래프가 함수 $g(x)=\frac{1}{2}(x^2-3)(x \geq 0)$의 그래프가 만나는 점을 A라 하자.

함수 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, 2\right)$를 지나고 기울기가 -1인 직선 l이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는?



① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{19}{8}$ ③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{21}{8}$ ⑤ $\frac{11}{x}$

7. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 2$이고 $n \geq 1$일 때, a_{n+1}은

$$\frac{1}{n+2} < \frac{a_n}{k} < \frac{1}{n}$$

을 만족시키는 자연수 k의 개수이다. a_{10}의 값을 구하시오.

8. 순서대로 읽은 수와 거꾸로 읽은 수가 일치하는 자연수를 대칭수라 한다. 예를 들어 345543은 대칭수이고, 345567은 대칭수가 아니다. 0과 1만을 이용하여 n자리 대칭수를 만들 때, 사용된 1의 개수가 0의 개수보다 많은 n자리 대칭수의 개수를 a_n이라 하자.

이때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{300}{a_{4n}}$의 값을 구하시오.

9. $1, 2, 3, \cdots, 3n$ (n은 자연수)의 숫자가 하나씩 적혀 있는 $3n$장의 카드 중 임의로 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수를 각각 $a, b(a<b)$라 하자. $3a<b$일 확률을 P_n이라 할 때, 다음은 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}_n$의 값을 구하는 과정이다.

> $3n$장의 카드 중 2장의 카드를 꺼내는 경우의 수는 ${}_{3n}\mathrm{C}_2$이다.
> $3a<b$인 경우에는 $b \le 3n$이므로 $1 \le a < n$이다.
> 따라서 $a=k$라 하면 $3a<b$를 만족시키는
> b의 경우의 수는 $\boxed{(가)}$이므로
> $\mathrm{P}_n = \dfrac{\boxed{(나)}}{{}_{3n}\mathrm{C}_2}$ 이다.
> 그러므로 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}_n = \boxed{(다)}$ 이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다) 에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$3(n-k)$	$\frac{3}{2}n(n-1)$	$\frac{1}{3}$
②	$3(n-k)$	$\frac{3}{2}n(n-1)$	$\frac{2}{3}$
③	$3(n-k)$	$3n(n-1)$	$\frac{2}{3}$
④	$3(n-k+1)$	$3n(n-1)$	$\frac{1}{3}$
⑤	$3(n-k+1)$	$3n(n-1)$	$\frac{1}{3}$

10. $\mathrm{A, B, C, D}$ 4개의 축구팀이 있다. 이들은 각각 다른 모든 팀과 1경기씩을 치르게 되고, 각각의 팀이 경기에서 이길 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 경기에서 모두 이기거나, 경기에서 모두 진 팀이 생길 확률을 $\frac{n}{m}$(m, n은 서로소인 자연수)이라 할 때, $m+n$의 값을 구하시오.(단, 비기는 경기는 없다)

18일차 과제

1. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$$S_n=\frac{4n}{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

2. 수열 $\{a_n\}$이 다음 등식을 만족시킨다.

$$a_{n+1}-a_n=\frac{2^{n+2}}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴할 때, a_1의 값은?

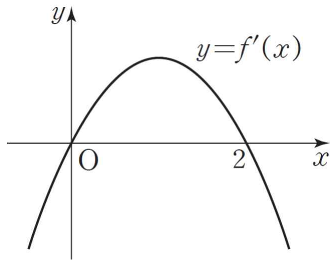
① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ -1
④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{3}$

3. 삼차함수 $f(x)=2x^3-3x^2+ax+5$가 구간 $(-\infty,\ k)$와 $(k+3,\ \infty)$에서 증가하고 열린 구간 $(k,\ k+3)$에서 감소할 때, $f(1)$의 값은? (단, a, k는 상수이다.)

① -4 ② -6 ③ -8
④ -10 ⑤ -12

4. 함수 $f(x)=x^3-3ax+b$의 극댓값이 4이고 극솟값이 0일 때, $f(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

5. 최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같이 두 점 $(0,\ 0)$, $(2,\ 0)$을 지난다. $f(1)=1$일 때, $f(x)$의 모든 극값의 합은?



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

6. 이차함수 $f(x)=ax^2-2ax\,(a>0)$에 대하여 $\int_1^k f(x)dx=0$이다. $\int_1^k |f(x)|dx=A$, $\int_0^1 |f(x)|dx=B$라 할 때, $\frac{A}{B}$의 값은? (단, a, k는 상수이고, $k>1$이다.)

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

7. 이차함수 $f(x)=k(x-1)(x-3)$에 대하여

$$\int_0^3 \{f(x)+|f(x)|\}dx=8$$

일 때, 양수 k의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

8. 함수 $f(x)=x^3$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n+3)+f(n+6)+f(n+9)+\cdots+f(n+3n)}{n^4}$$

의 값은? (단, n은 자연수이다.)

① $\frac{85}{4}$ ② $\frac{43}{2}$ ③ $\frac{87}{4}$
④ 22 ⑤ $\frac{89}{4}$

9. 자연수 m에 대하여

$$S(m)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(-1+\frac{2k}{n}\right)^m$$

이라 하자. $\sum_{m=1}^{10}S(2m-1)+\sum_{m=1}^{10}\frac{1}{S(2m)}$의 값은?

① 110 ② 115 ③ 120
④ 125 ⑤ 130

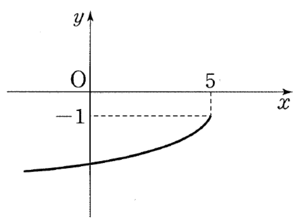
10. 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2-3x+b$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
(나) $\int_{-2}^{2}f(x)dx=4$

$\int_{-3}^{3}f(x)dx$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

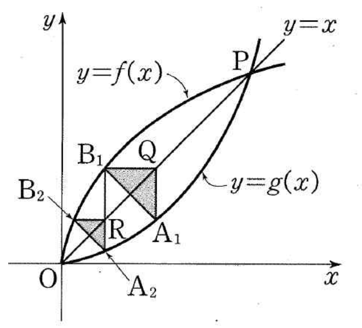
11. 무리함수



$y=-\sqrt{-x-2a+b}-a+b$의 그래프가 그림과 같고, 정의역이 $\{x|x\le 5\}$이고 치역이 $\{y|y\le -1\}$일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① -15 ② -14 ③ -13
④ -12 ⑤ -11

12. 그림과 같이 함수



$f(x)=\sqrt{2x}$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점 중 원점 O가 아닌 점을 P라 하자. 선분 OP의 중점을 Q라 할 때, 점 Q를 지나면서 y축에 평행한 직선이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 A_1, 점 Q를 지나면서 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점을 B_1이라 하자. 점 B_1을 지나면서 y축에 평행한 직선이 선분 OP, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 각각 R, A_2라 하고 점 R를 지나면서 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점을 B_2라 하자. 삼각형 QB_1A_1과 삼각형 RB_2A_2의 넓이의 합은?

① $\frac{21}{128}$ ② $\frac{11}{64}$ ③ $\frac{23}{128}$ ④ $\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{25}{128}$

13. 수열$\{a_n\}$은 $a_1 = \frac{1}{2}$이고

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)}\ (n = 1,2,3,\cdots)$$

을 만족시킬 때, a_5의 값은?

① $\frac{11}{10}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{13}{10}$
④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

14. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 = 1, b_1 = 49$
(나) $a_{n+1} = a_n + 5,\ b_{n+1} = b_n + 2\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$a_k = b_k$를 만족시키는 자연수 k의 값을 구하시오.

15. 1, 2, 3, 4, 5의 다섯 개의 숫자를 중복을 허락하여 배열하여 만든 다섯 자리의 자연수 중에서 천의 자리에 오는 수는 홀수이고 일의 자리에 오는 수는 짝수인 자연수의 개수는?

① 625 ② 750 ③ 1000
④ 1125 ⑤ 1500

16. 두 집합

$$A = \{a,\ b,\ c,\ d\},\ B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : A \to B$의 개수를 구하시오.

(가) $f(a)$와 $f(b)$는 홀수이다.
(나) $f(c)$와 $f(d)$는 짝수이고 $f(c) < f(d)$이다.

17. $1, 2, 2, 3, 3, 3$의 여섯 개의 숫자를 모두 배열하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수의 집합에서 하나의 원소를 임의로 택할 때, $223133, 312323$과 같이 숫자 3과 3 사이에 숫자 1이 있을 확률은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

18. 1이 적혀 있는 공 4개, 2가 적혀 있는 공 4개, 3이 적혀 있는 공 2개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개씩 2개의 공을 임의로 꺼낼 때, 나온 공에 적힌 수를 차례로 a, b라 하자. $5 \times a \times b$가 홀수일 때, 이 수가 15 이상일 확률은? (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{7}{15}$ ③ $\frac{8}{15}$
④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

19. 상자 A에는 흰 공 3개, 검은 공 4개가 들어 있고 상자 B에는 흰 공 2개, 검은 공 3개가 들어 있다. 상자 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내고 꺼낸 2개의 공을 상자 B에 넣은 후 상자 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 흰 공 2개가 나올 확률은?

① $\frac{17}{147}$ ② $\frac{6}{49}$ ③ $\frac{19}{147}$
④ $\frac{20}{147}$ ⑤ $\frac{1}{7}$

20. 주머니 속에 자연수 $k\,(k=1, 2, 3, 4, 5)$가 적힌 공이 k개씩 들어 있다. 이 15개의 공 중에서 동시에 3개의 공을 임의로 꺼낼 때, 3개의 공에 적힌 수의 합이 12일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)