정답 및 해설

1	①	2	⑤	3	①	4	②	5	③
6	②	7	③	8	①	9	④	10	⑤
11	④	12	③	13	⑤	14	①	15	④
16	②	17	⑤	18	③	19	②	20	④
21	①	22	6	23	8	24	54	25	16
26	55	27	36	28	270	29	13	30	3

해설 없는 문항은 교과서를 참고해 주세요.

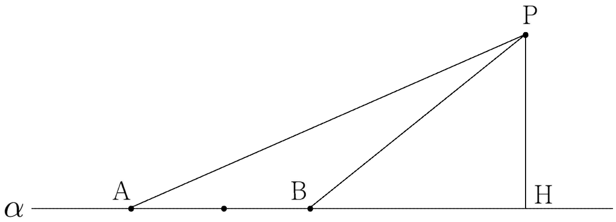
14. 〔 함수의 미분가능성 〕

$f(x)$가 미분가능한 함수이므로 $x=1$에서
연속이고 좌미분계수와 우미분계수가 같다.

$f(1)=2\times1-1=ae+b=1$

$f'(1)=2=ae \quad \therefore a=\dfrac{2}{e}, b=-1$, $ab=-\dfrac{2}{e}$

15. 〔 공간 도형 〕



점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하자.
선분 PQ의 길이가 최대가 될 때의 Q의 위치를 A, 최소가 될 때의 Q의 위치를 B라 하자. H에서 원의 중심까지의 거리를 a, PH의 길이를 b라 하면

$\overline{\mathrm{PA}}^2=(a+2)^2+b^2=65$

$\overline{\mathrm{PB}}^2=(a-2)^2+b^2=25$

따라서 $a=5, b=4$ 답은 4

16. 〔 조건부 확률 〕

과제를 하고 PC방에 갔을 확률 : $\dfrac{1}{5}\times\dfrac{3}{4}$

과제를 안 하고 PC방에 갔을 확률 : $\dfrac{4}{5}\times\dfrac{5}{6}$

$\therefore \dfrac{\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}}{\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}}=\dfrac{9}{49}$ ~~(과제 하고 놀자..)~~

17. 〔 삼각함수의 극한 〕

원 P의 중심을 O라 하고 O에서 $\overline{\mathrm{BC}}$에 그은 수선의 발을 H라 하고,
원 P의 반지름의 길이를 r이라고 하자.
삼각형 OBH에서 삼각비를 이용하여 r을 구하자.

$(3-r)\dfrac{\tan\theta}{2}=r$ 이므로 $\quad r=\dfrac{3\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}$이다.

$\angle$FOG의 크기는 $\pi-\theta$이므로,
선분 FG의 길이, 즉 $f(\theta)$는

$2r\sin\dfrac{\pi-\theta}{2}=2r\cos\dfrac{\theta}{2}=2\dfrac{3\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}\cos\dfrac{\theta}{2}$ 이다.

따라서, $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta}$의 값은 3이다.

18. 〔 확률 〕

주사위에서 나올 수 있는 수들을 구분하자.
(3으로 나눠) 나머지가 0인 수 : 3, 6
(3으로 나눠) 나머지가 1인 수 : 1, 4
(3으로 나눠) 나머지가 2인 수 : 2, 5

위 세 가지 경우가 나올 확률은 모두 $\dfrac{1}{3}$로 같다.

이제 각 자릿수의 합의 3으로 나누었을 때의 나머지가 1일 경우를 생각하자.

i) 나머지가 0인 수 2개, 나머지가 1인 수 1개

$(\dfrac{1}{3})^3\times3=\dfrac{1}{9}$

ii) 나머지가 0인 수 1개, 나머지가 2인 수 2개

$(\dfrac{1}{3})^3\times3=\dfrac{1}{9}$

iii) 나머지가 1인 수 2개, 나머지가 2인 수 1개

$(\dfrac{1}{3})^3\times3=\dfrac{1}{9}$

* 수가 나올 확률 3번 × 숫자의 자릿수 배열

$\dfrac{1}{9}\times3=\dfrac{1}{3}$

19. 〔 포물선의 성질 〕

(가) : $\frac{\pi}{2}$

(나) : n

(다) : 1

(라) : $\frac{\pi}{2}$

(한 번 해보세요.. 어렵지 않습니다ㅎ)

20. 〔 변곡점, 삼차함수의 대칭성 〕

(해설 1)

곡선 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 x좌표가 $g(t)$이다. $y=f'(t)(x-t)+f(t)$에서, x절편에 대한 식을 찾으면 $g(t)=-\frac{f(t)}{f'(t)}+t$이다.

그런데, $f'(t)=0$인 지점이 존재하면,
'$g(t)$의 최솟값'이 생길 수 없고,
동시에 실수 전체의 집합에서 정의되지 않는다.
그러므로 임의의 실수 t에 대하여 $f'(t)>0$이고
이에 따라 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.… ㉠
$g(2)=-4$이고, $g'(2)=0$이다.

즉 $g'(2)=\frac{-f'(2)^2+f'(2)f''(2)}{\{f'(2)\}^2}+1=0$이다.

그런데, $g(2)=-4$이므로 $-\frac{f(2)}{f'(2)}+2=-4$이고
정리하면 $f(2)=6f'(2)$이다. … ㉡
이를 종합하면 $f''(2)=0$이고, $f''(x)=6x-12$.
이를 부정적분하면
$f'(x)=3x^2-12x+a,\ f(x)=x^3-6x^2+ax+b$
이고 ㉡과 (나) 조건을 이용하면
$f(x)=x^3-6x^2+13x-4$임을 알 수 있다.
$\therefore f(4)=16$

(해설 2)

일단 (가) 조건에서 $f(x)$가 증가함수임을 안다.
그리고 대략적인 그래프의 개형을 그려보면 $f(x)$의 변곡접선에서 $g(t)$가 극값을 가질 것을 예상할 수 있고, (나) 조건에서 삼차함수의 성질을 활용.
삼차함수는 변곡점을 기준으로 점대칭인 함수이다.

그런데 $\int_0^4 \{f(x)-k\}\,dx=0$이라는 점에서
$f(x)-k$라는 함수의 그래프가 $(2, 0)$을 기준으로 점대칭인 함수일 것이라 예측할 수 있고, $k=6$이므로 $f(2)=6$이고 $(2, 6)$은 $f(x)$의 변곡점.
$f''(2)=0$
그리고 다시 (가) 조건으로 돌아와서 변곡접선
$y=f'(2)(x-2)+f(2)$에 $(-4, 0)$을 대입,
$f'(2)=1$
식을 종합하면 $f(x)=x^3-6x^2+13x-4$
$\therefore f(4)=16$

21. 〔 함수의 개형과 볼록성 파악 〕

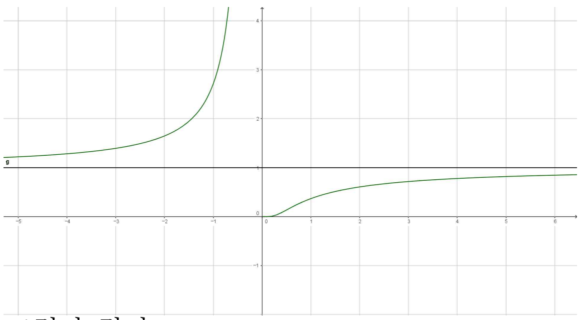
$f(x)=x^a \ln x$를 미분하면
$f'(x)=x^{a-1}(a\ln x+1)$ 이므로

함수 $f(x)$는 $x=e^{-\frac{1}{a}}$에서 극값을 갖는다.

따라서, $g(a)=e^{-\frac{1}{a}}$ 이다.

$-\frac{1}{a}\neq 0$이므로 $g(a)\neq 1$, ㄱ은 옳다.

그리고 그래프의 개형을 그려보면 다음



그림과 같다.

ㄴ 보기는 $a=0$좌우에서 $(a, g(a))$와 $(0, 0)$을 잇는 직선의 기울기가 같은지 묻고 있다. 따라서 틀렸다.

ㄷ 보기는 a가 양수일 때 함수가 위로 볼록한 함수인지를 묻고 있다. 하지만 $e^{-\frac{1}{a}}$를 두 번 미분해보면 $a=\frac{1}{2}$에서 변곡점을 갖고, $0<a<\frac{1}{2}$ 에선 아래로 볼록인 함수이다.
따라서 ㄷ 은 틀렸다.

26. 〔 음함수의 미분법 〕

$C: x^2y+2\sqrt{y}=k$에 $(1,4)$를 대입하면

$4+4=8=k$

$C: x^2y+2\sqrt{y}=8$ 을 미분하면

$2xy+x^2\frac{dy}{dx}+\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=0$

$(1,4)$를 대입, $\frac{dy}{dx}=-\frac{16}{3}$

$(1,4)$에서의 접선의 방정식은

$y=-\frac{16}{3}(x-1)+4$ 이고

x절편은 $\frac{7}{4}$, y절편은 $\frac{28}{3}$이다.

$\therefore \frac{7}{4}\times\frac{28}{3}=\frac{49}{6}$, $p+q=55$

27. 〔 회전하는 법선벡터와의 각 〕

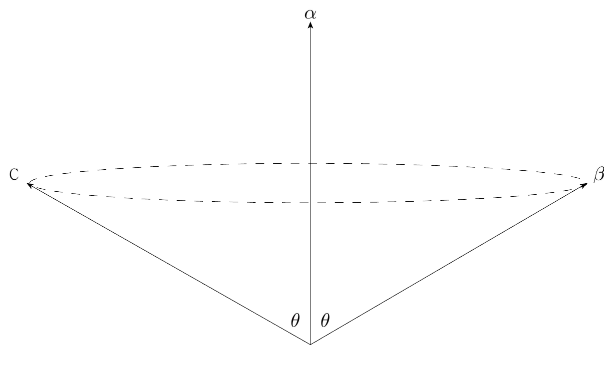
평면들 사이의 각을 통해 위치관계를 파악하고 이를 통한 넓이의 최댓값을 찾자. 일단 α,β의 법선벡터를 서로 내적하면

$(0,1,1)\cdot(1,0,1)=1=2\cos\theta$이므로 α,β의 이면각은 60°

α와 원 C의 이면각은 $\frac{\text{정사영된넓이}}{\text{원래넓이}}=\cos\theta$

이므로 $\cos\theta=\frac{1}{2}$, 이면각은 60°

법선 벡터들의 위치관계도를 그리면 아래와 같다.



(원 C의 법선 벡터 C는 점선 궤도 회전)

따라서 β와 각이 최소인 0°일 때 정사영의 넓이가 최대, 6

β와 각이 90°일 때 정사영의 넓이가 최소, 0

$\therefore a^2+b^2=36$

28. 〔 중복 조합 〕

(가)조건을 만족시키는 집합에서 (나) 또는 (다) 조건을 만족시키지 않는 집합을 빼자.

{가O}-({나X}+{다X}-{나X다X})

일단 (가)를 만족시키는 순서쌍의 개수는

${}_4\mathrm{H}_{12}=455$

(나)를 만족시키지 않는 순서쌍의 개수는

$x=z+2$일 때의 경우를 생각하면 되므로

$y+2z+2+w=12$에 z에 $0,1,2,3,4,5,6$을 대입하여 계산하면

${}_2\mathrm{H}_{10}+{}_2\mathrm{H}_8+{}_2\mathrm{H}_6+{}_2\mathrm{H}_4+{}_2\mathrm{H}_2+{}_2\mathrm{H}_0=36$

(다)를 만족시키지 않는 순서쌍의 개수는

$y>5$이거나 $z>5$인 경우를 생각하면 되므로

$i)$ $x+y'+6+z+w=12$ ${}_4H_6=84$

($y=y'+6$)

$ii)$ $x+y+z'+6+w=12$ ${}_4H_6=84$

($z=z'+6$)

여기서 $y>5$이고 $z>5$인 경우를 한번 빼주자. (1가지)

$84+84-1=167$

이제 (나), (다)를 둘다 만족시키지 않는 경우를 구하자.

$y+2z+2+w=12$

$i)$ $(y>5)$ $y'+2z+w=4$ 9가지

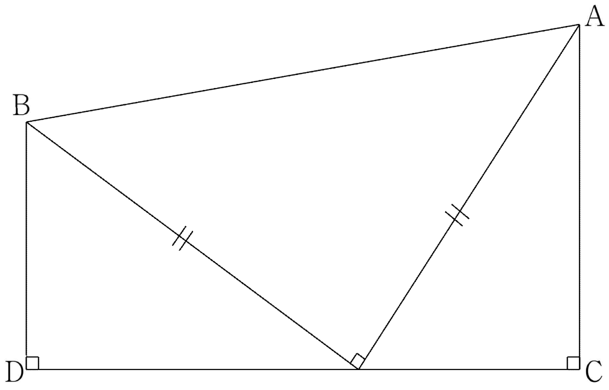
$ii)$ $(w>5)$ $y+2z+w'=4$ 9가지

$iii)$ $(y,z>5)$ 없음.

$\therefore 455-(36+167-18)=270$

29. 〔 공간 도형의 해석 〕

(가) 조건의 길이 조건을 활용하자.



원의 중심을 O 라 할 때 $\triangle BOD \equiv \triangle OAC$

선분 OD, 선분 AC 의 길이는 $4\sqrt{2}$

선분 OC 의 길이는 2

이제 이면각을 구하기 위해 벡터의 내적을 활용.

A 와 B 에서 l 에 내린 수선의 발을 각각 H, M 이라 하자.

AH 의 길이 $= \sqrt{33}$, BM 의 길이 $= \sqrt{30}$

$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH}) \cdot (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM})$

삼수선의 정리와 직선 l 과 선분 PQ 의 각을 이용해 OH,OM의 길이를 구하면

OH 의 길이 = OC 의 길이 $\times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

OM 의 길이 = OD의 길이 $\times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6}$

$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH}) \cdot (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM})$

$= 0 + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$= \sqrt{33} \times 2\sqrt{3} \cos\theta$ 이므로

$\cos\theta = \sqrt{\frac{72}{33 \times 12}} = \sqrt{\frac{2}{11}}$

$\cos^2\theta = \frac{2}{11}$ $p + q = 13$

30. 〔 적분의 활용 〕

1) 출제자가 의도한 풀이

$g(t) = \sqrt{t^2 + f(t)^2}$

$g'(t) = \frac{2t + 2f(t)f'(t)}{2\sqrt{t^2 + f(t)^2}} = \frac{t + f(t)f'(t)}{g(t)}$

$g(t)g'(t) = t + f(t)f'(t)$ 이다. (나)조건에 활용하면

$t + f(t)f'(t) + g(t) = tf(t)g(t)$

>> $g(t)(g'(t) + 1) = tf(t)g(t)$, $tf(t) = g'(t) + 1$

$tf(t) = g'(t) + 1$ >> 치환적분에 활용.

각의 이등분선의 성질에 의하여 $\overline{OP} : \overline{OH} = \overline{PQ} : \overline{HQ}$

$\overline{HQ}$ 의 길이 $h(t) = \frac{tf(t)}{t + g(t)} = \frac{1 + g'(t)}{t + g(t)}$

따라서 $\int_1^3 h(t)\,dt = [\ln(t + g(t))]_1^3$

$g(3) = \sqrt{3^2 + f(3)^2} = 5$

$g(1) = \sqrt{1^2 + f(1)^2} = \frac{5}{3}$ 이므로

$\int_1^3 h(t)\,dt = [\ln(t + g(t))]_1^3 = \ln 8 - \ln\frac{8}{3} = \ln 3$

$\therefore e^k = 3$

2) 갑자기 떠오른 풀이 (길어서 요약 설명만..)

$\angle POH = 2\theta$, $\angle QOH = \theta$ 로 잡고

tan 함수의 도입으로 식을 정리해 나가는 방식.

식을 정리하다 보면 같은 방식으로 답이 나옴.