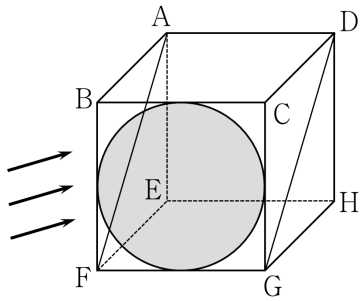
[마무리 약점공략 수학 칼럼] - 이중 정사영 : 빛이 교선에 수직인 방향이 아닐 때

본 칼럼은 교과과정내의 개념으로 이해할 수 있으나 수능시험에 출제 될 가능성은 낮은 주제입니다.

먼저 예제와 기출문항을 살펴보고 칼럼을 시작하도록 하겠습니다.

[기하와 벡터 - 공간도형과 공간벡터]

그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정육면체 ABCD−EFGH의 면 BFGC에 내접하는 원 C가 있다. 직선 BD에 평행한 방향으로 빛이 비출 때, 원 C의 <u>평면 AFGD</u>에 나타나는 그림자의 넓이를 구하시오. [4점] 풀이는 칼럼 마지막에 있습니다.

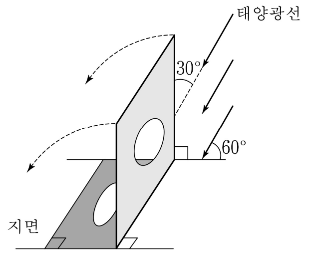


정답 : $4\sqrt{2}\pi$

기출문항

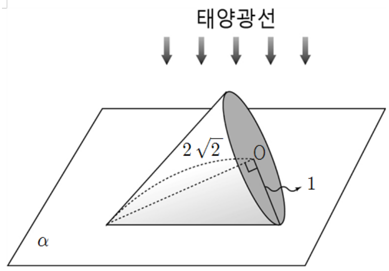
그림과 같이 태양광선이 지면과 60°의 각을 이루면서 비추고 있다. 한 변의 길이가 4인 정사각형의 중앙에 반지름의 길이가 1인 원 모양의 구멍이 뚫려 있는 판이 있다. 이 판은 지면과 수직으로 서 있고 태양광선과 30°의 각을 이루고 있다. 판의 밑변을 지면에 고정하고 판을 그림자 쪽으로 기울일 때 생기는 그림자의 최대 넓이를 S라 하자. S의 값을 $\dfrac{\sqrt{3}(a+b\pi)}{3}$라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 정수이고 판의 두께는 무시한다.)

[4점][2008년 9월]



반지름의 길이가 1, 중심이 O인 원을 밑면으로 하고 높이가 $2\sqrt{2}$인 원뿔이 평면 α 위에 놓여있다. 그림과 같이 태양광선이 평면 α에 수직인 방향으로 비출 때, 원뿔의 밑면에 의해 평면 α에 생기는 그림자의 넓이는? (단, 원뿔의 한 모선이 평면 α에 포함된다.)

[3점][2013년 7월]

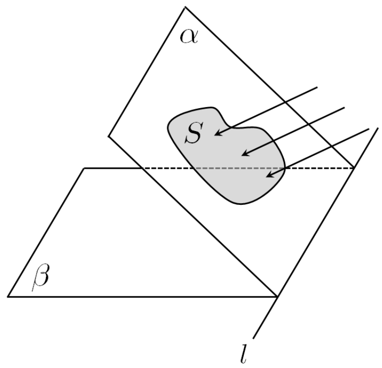


기출문항부터 살펴본다면 빛이 들어오는 각도와 별개로 1. 그림자를 만들어낼 도형과 그림자가 발생하는 평면의 교선은 2. 빛이 들어오는 방향과 수직이라는 것을 알 수 있습니다. 정사영을 한 번을 하던 두 번을 하던 우리는 단면화를 통해 문제를 해결하면 된다는 것을 기출공부를 통해 알 것입니다.

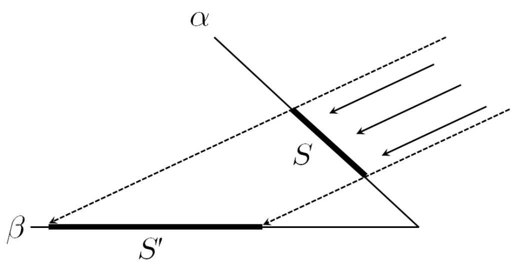
반면 저희가 제시한 예제 문항을 보시면 교선과 빛이 들어오는 방향은 수직인 관계가 아님을 알 수 있습니다. 그 동안 풀어온 문제와 다소 느낌이 다르다는 걸 느끼셨다면 충분합니다.

제시된 기출 문항을 비롯한 시중 문제집들의 대부분 문항들을 살펴보시면 알겠지만 그림자 문제를 정사영 개념을 활용하여 문제를 풀기 위해서는 다음과 같은 상황이 주어져야 합니다. '어떤 도형 S를 포함하는 평면 α와 그림자가 생기는 평면 β의 교선을 l이라 할 때, l의 방향과 빛의 방향은 서로 수직이어야 한다.'

그림으로 살펴보면 다음과 같습니다.



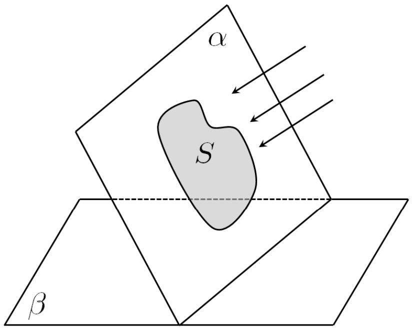
[그림1]



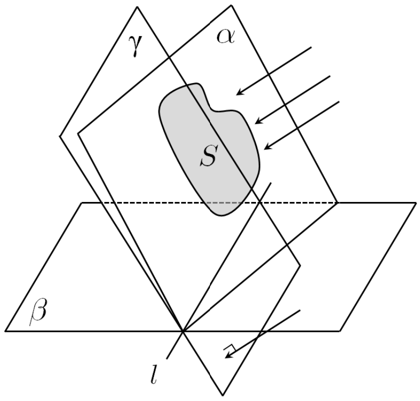
[그림2 - 그림1의 단면화]

앞서 언급한 것과 같이 빛이 들어오는 각도와 평면 α, β가 이루는 이면각의 크기를 고려하여 정사영 풀이를 구사할 수 있습니다.

하지만 예제에서 제시한 것과 같이 교선 l이 빛의 방향과 서로 수직이 아닌 경우도 생각해 볼 수 있습니다. 그림자 문제의 핵심은 단면화와 정사영이기 때문에 다른 문항과 마찬가지 상황으로 재구성하여 그림자의 넓이를 구할 수 있습니다. 다음 그림을 통해 살펴보도록 하겠습니다.



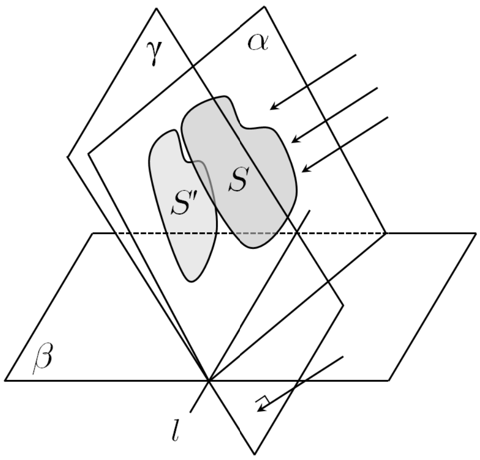
[그림1]



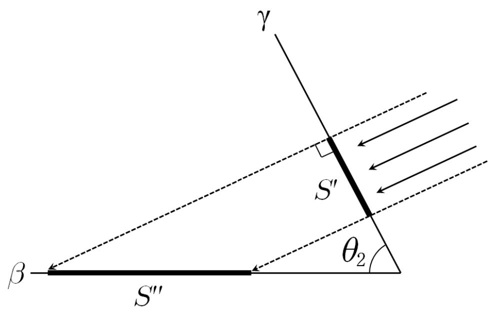
[그림2]

[그림1]은 어떤 도형 S를 포함하는 평면 α와 평면 β의 교선이 빛이 들어오는 방향과 수직이 아닙니다. 따라서 [그림2]와 같이 교선이 빛이 들어오는 방향과 수직이 될 수 있는 적당한 평면 γ를 잡아 줘야 합니다. 예시에서는 빛의 방향을 고려하여 빛의 방향과 수직인 평면을 γ로 잡았습니다. (뒤에서 살펴보겠지만 빛의 방향과 수직인 평면으로 잡아야 정사영 두 번으로 그림자 넓이를 계산할 수 있습니다. 특수한 상황이 아닌 이상 수직인 평면으로 잡아 주는게 자연스럽습니다.)

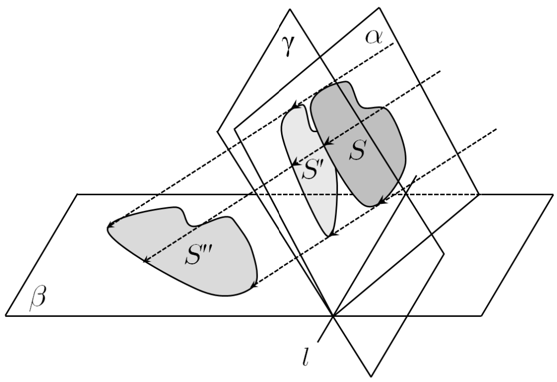
이때, 평면 α와 평면 γ가 이루는 각의 크기를 θ_1이라 하자. 도형 S의 평면 γ 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하면 $S' = S \times \cos\theta_1$입니다.



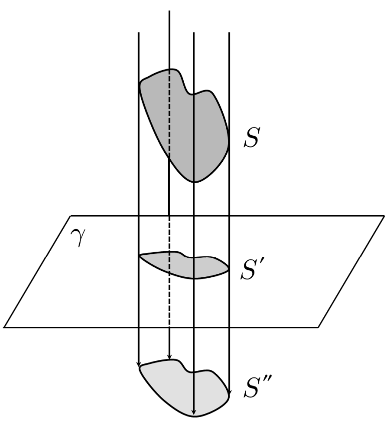
이제 1과 마찬가지 상황이 되었으므로 단면화 후 정사영 풀이를 구사할 수 있습니다. 평면 β와 평면 γ가 이루는 각의 크기를 θ_2라 하고 도형 S'의 평면 β 위로의 정사영을 S''라 하면 $S''\times\cos\theta_2 = S'$입니다.



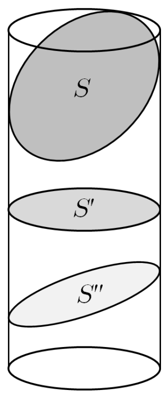
전체 상황을 한 그림에 나타내면 다음과 같다.



결과적으로 다음과 같이 이해 할 수 있습니다.



[그림1]



[그림2]

[그림2]는 [그림1]을 원기둥 모양으로 구조를 간단히 한 모습입니다.

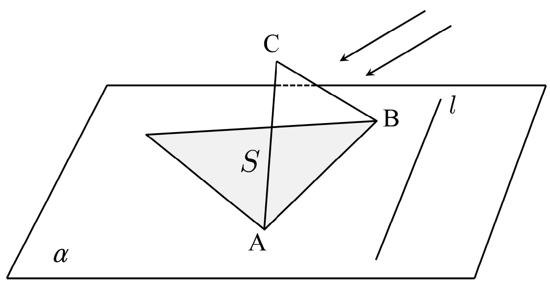
이제 예제를 풀이하고 마치도록 하겠습니다.

풀이)
빛이 들어오는 방향에 수직인 평면은 평면 ACGE$(=\gamma)$로 잡겠습니다. 평면 ACGE와 평면 BFGC$(=\alpha)$가 이루는 이면각의 크기를 θ_1이라 할 때, $\cos\theta_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$입니다. 따라서 평면 ACGE 위로의 정사영의 넓이는 $4\pi\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}\pi$입니다.
이제 그림자가 생길 평면 AFGD$(=\beta)$와 정사영 시킬 도형(S')을 포함하는 평면 ACGE$(=\gamma)$과의 교선은 빛이 들어오는 방향과 수직입니다. 따라서 평면 AFGD와 평면 ACGE가 이루는 각의 크기가 60°임을 이용하면 $S''\times\cos60^\circ=S'$에서 $S''=4\sqrt{2}\pi$입니다.

※ 다음 문항은 [2018 마약 N제 기벡편 166번]입니다. 주어진 도형이 삼각형이라 이중정사영의 내용을 이용하지 않아도 해결되도록 제작된 문항이지만 이중정사영의 내용을 적용하여 풀이 할 수도 있습니다. 반각공식, 제2코사인 정리를 통해 계산이 쉬워지므로 반드시 이중정사영의 내용으로 풀어 보실 필요는 없습니다.

[2018 마약 N제 기벡편 166번]

평면 α 위에 직선 l과 길이가 2인 선분 AB가 있다. 선분 AB와 직선 l이 이루는 각의 크기는 30°이고 평면 α 밖의 한 점 C에 대하여 삼각형 ABC는 정삼각형이다. 평면 ABC와 평면 α가 이루는 각의 크기가 60°이고 태양광선이 평면 α와 30°의 각을 이루면서 직선 l에 수직으로 비출 때, 그림과 같이 평면 α에 나타나는 삼각형 ABC의 그림자의 넓이를 S라 하자. S의 값을 $p+q\sqrt{3}$이라 할 때, $\frac{p}{q^2}$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]



정답 : 9

긴 글 읽어주셔서 감사합니다.