

Quiz

좌표평면에서 점 P가 시각 $t=0$ 일 때 점 $(1, 0)$ 에서 출발하여 시각 t ($0 \leq t \leq 4$)에서의 속도가

$$\vec{v} = \left(3t^2 - 12t + 9, \pi \cos \frac{\pi t}{4} \right)$$

이다. 점 P가 두 번 지나는 점의 x 좌표를 a , y 좌표를 b 라 할 때, ab 의 값은?

① $6\cos \frac{\sqrt{3}\pi}{4}$

② $6\cos \frac{3\pi}{4}$

③ $12\cos \frac{\sqrt{3}\pi}{4}$

④ $12\cos \frac{3\pi}{4}$

⑤ $18\cos \frac{\sqrt{3}\pi}{4}$

Open Solution

- x 좌표와 y 좌표를 모두 고려해 주어야 합니다.
- t 의 값은 항상 0보다 크거나 같으므로 $t < 0$ 인 t 는 고려하지 않습니다.
- 그래프의 대칭성이 사용됩니다.

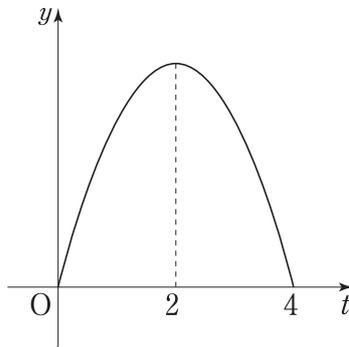
$\vec{v} = \left(3t^2 - 12t + 9, \pi \cos \frac{\pi t}{4} \right)$ 이며 $t=0$ 일 때 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$x = t^3 - 6t^2 + 9t + C_1$, $y = 4\sin \frac{\pi t}{4} + C_2$ 이다. $t=0$ 일 때 $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ 이므로

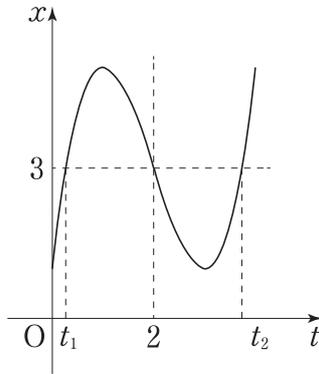
점 P 는 $\left(t^3 - 6t^2 + 9t + 1, 4\sin \frac{\pi t}{4} \right)$ 이다.

$0 \leq t \leq 4$ 에서 함수 $y = 4\sin \frac{\pi t}{4}$ 에 대하여 두 시각 t_1 , t_2 에서 y 의 값이 같을 때,

$t_1 + t_2 = 4$ 이다. 함수 $y = 4\sin \frac{\pi t}{4}$ 의 그래프가 직선 $t=2$ 에 대하여 대칭이기 때문이다.



한편, 곡선 $x = t^3 - 6t^2 + 9t + 1$ 에서 t_1 일 때와 t_2 일 때 두 x 의 값이 같아야 한다. 이때는 $x = 3$ 일 때이다.



따라서 $t^3 - 6t^2 + 9t + 1 = 3$ ($t \neq 2$)이고

$t^3 - 6t^2 + 9t + 1 = 3 \Leftrightarrow (t-2)(t^2 - 4t + 1) = 0$ 에서 방정식 $t^2 - 4t + 1 = 0$ 의 서로 다른 두 실근이 t_1, t_2 이다. 따라서 t_1, t_2 는 각각 $2 - \sqrt{3}$ 과 $2 + \sqrt{3}$ 이며

이때 x 의 값은 $a = 3$, y 의 값은 $b = 4\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \frac{\sqrt{3}\pi}{4}\right) = 4\cos\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$ 이다. 각각의 t_1, t_2 의 경우

모두 ab 의 값은 같다. 따라서 $ab = 12\cos\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$ 이다.

정답 ③