1. 비례식 계산의 기본 정리

〔1〕 비례식의 기본 계산 원리

물리1에서 깔끔한 문제풀이를 위해서는 비례식의 사용을 자유롭게 해야한다. 물론 비례식으로 풀지 않고 정량적 계산을 통해 실제값을 직접 구해도 상관은 없으나 선지에서도 매번 비율을 물어볼 뿐만 아니라 전체적인 풀이에서 비례식을 사용하면 깔끔해지는 경우가 많기 때문에 비례식에 대한 이해를 먼저 명확히 하도록 한다.

(1) 비례상수 : A:B＝a:b이고 A＝ak, B＝bk일 때 k를 비례식 A:B＝a:b의 비례상수라 한다. 즉, 비례식에서 나타내는 값을 **실제값**으로 바꿔주기 위하여 곱하는 상수를 의미한다.

예제) 철수와 영희의 속력이 각각 30, 40이면 $v_{철수} : v_{영희} = 3:4$이다. 이때 이 비례식의 비례상수는 10이다.

(2) 비례식의 특징 : **곱셈, 나눗셈**으로 이루어진 관계식에 대한 계산은 비례식에서도 똑같이 적용된다.

ex) 평균속력×시간＝거리 이므로 평균속력**비**×시간**비**＝거리**비**이다.
ex) 질량×가속도＝알짜힘 이므로 질량**비**×가속도**비**＝알짜힘**비**이다.
ex) 전기력 $F=\frac{q_1q_2}{r^2}k$ 이므로 F**비**＝q**비**÷r^2**비**

*익숙하지 않다면 ○비율x◇비율＝□비율 이런식으로 천천히 식을 세워볼것.

(3) 비례식의 덧셈 : 일반적으로 비례식끼리는 기본적으로 덧셈이 불가능하다. 하지만, **비례상수가 같은 비례식끼리는** 비례식의 덧셈과 뺄셈도 성립한다.

ex) A, B, C, D가 2, 4, 8, 12일 때 비례상수에 따른 덧셈을 비교해보자.

(4) 비례식의 곱셈법

$$(a:b)\times(c:d)=ac:bd \ , \ (a:b:c)\times(a':b':c')=aa':bb':cc'$$

비례식간의 곱셈에서는 왼쪽부터 **차례대로 곱해주도록 한다.**

ex) A, B의 질량(m) 비율이 3:4이며 가속도(a) 비율이 2:3일 경우 A, B가 받는 알짜힘(F) 비율은?

ex) A, B의 평균속력 비율이 2:3이고 이동 시간의 비율이 5:3일 경우 A, B의 이동거리 비율은?

(5) 비례식의 나눗셈

$$(a:b)\div(a':b')=\frac{a}{a'}:\frac{b}{b'} \ , \ (a:b:c)\div(a':b':c')=\frac{a}{a'}:\frac{b}{b'}:\frac{c}{c'}$$

비례식간의 나눗셈에서는 비례식을 **위아래로 써서 나눠주며** 숫자가 3개 이상일 때 역시 똑같이 적용하면 된다. 비례와 반비례 개념이 많은 물1 특성상 많이 쓰이므로 익숙하도록 최대한 연습하도록 하자. 또한 비례식을 이루는 숫자가 두개일 경우에는 아래와 같은 이미지를 연상하도록 하자.

$$\frac{a}{a'}:\frac{b}{b'}=ab':a'b$$

예제 1
A, B가 이동한 거리 비율이 2:3이고 이때 평균속력 비율이 1:2이다. 이동하는데 걸린 시간의 비율은? *$s=vt$
예제 2
A, B에 작용하는 알짜힘의 비율이 2:3이고 질량비율이 5:4일 때 가속도의 비율은? *$F=ma$
예제 3
일직선상에 존재하는 두 점전하 A와 B의 사이에 위치한 양전하가 정지해있다. 점전하 A와 B의 전하량의 크기가 1:4일때 양전하로부터 점전하 A, B까지의 거리비는? *$F=\frac{q_1q_2}{r^2}k$
예제 4
질량비가 2:3인 자동차 A와 B의 속력 변화량은 1:4이고 걸린 시간 비율이 1:2일 때 자동차 A와 B가 받는 알짜힘의 비율은? *$F=ma, a=\frac{\Delta v}{t}$

(6) 비례식의 역수비율

$$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}=b:a\,,\ \frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}=bc:ac:ab$$

주로 같은 거리, 같은 힘의 크기와 같은 **같은값**에 대한 계산에서 많이 쓰이며 숫자가 두개일 경우에는 **반대비율이라고 생각하면 편하다.** 하지만 세개 이상일 경우에는 **반대비가 아닌 나머지값의 곱의 비이므로** 주의하도록 한다.

ex) A, B가 같은거리를 이동하는데 걸린 시간비율이 3:4일때 평균 속력비율은?

ex) A, B가 받는 알짜힘이 같고 질량 비율이 2:3일때 가속도의 비율은?

(7) $ab=cd$이면 $a:c=d:b$ (단, 0이 아니다.)
문제에서 비율을 도출하거나 문제풀이에 사용할 공식을 유도할때 사용된다.공식 유도나 결과에서 두 값의 비율을 도출할 때 많이 쓰인다.

예제) **비례식의 성질**을 이용하여 아래의 물음에 답하여라.

문제1) 일직선상에 존재하는 두 점전하 A,B의 전하량의 크기는 a:b이다. 두 점전하 A, B사이에 위치한 C가 A, B에 의해 정지해있을 때 C로부터 A, B까지의 거리 비는?

문제2) 받침대 위에 막대와 물체 A, B가 있다. 물체 A, B의 무게가 3:4일 때, 받침대로부터 A, B까지의 거리 비는? (단, 막대의 무게는 무시한다.)

〔2〕 비례식의 연결 (비례 상수의 일치)

이해를 돕기 위해 간단한 예시를 들어보도록 하겠다.

a:b=3:4이고 b:c=5:4이다.

a:b=3:4에서 **b는 4에 해당한다.** 또한 b:c=5:4에서 **b는 5에 해당한다.** 즉, 두 비례식에서 b에 해당하는 값이 다르다는 것은 두 비례식의 **비례상수가 서로 다른 상태라는 것을 의미한다.** 따라서 이 상태에서는 a와 c의 비율을 바로 비교할 수 없다. 따라서 이를 비교하기 위해서는 비례상수를 같은 값으로 맞춰주는 과정이 필요하며 이를 비례식을 **연결해준다 하자.** 대표적으로 비례식의 비례상수를 일치시키는 방법은 공통요소의 값을 **같게 맞춰주는것이 있다.** 아래 예제를 풀어보도록 하자.

예제 1	예제 2
a:b=3:4, b:c=5:4일 때 a:b:c를 구하여라	a:b=4:5, a:c=1:3일 때 a:b:c를 구하여라

두 비례식을 연결하기 위해서는 비례상수를 같게 맞춰야 하므로 **공통 요소의 값을 일치시켜줘야 한다.** 예제 1의 경우에는 b에 해당하는 값이 각각 4, 5이며 $4\times5=5\times4$이므로 두 비례식에 **서로의 b의 값**인 5, 4를 곱하면 15:20, 20:16이 되며 a:b:c=15:20:16이 된다.

* 좀더 논리적으로 말하면 a:b에는 x를, b:c에는 y라는 상수를 곱해줬을때 양 비례식에서 b가 나타내는 값이 1:1 즉, 같아야 한다. 따라서 (4:5)×(x:y)=1:1, x:y=5:4이므로 두 비례식에 각각 5와 4를 곱해주면 두 비례식의 비례상수가 같아진다. 아래의 예제도 위와 같은 원리로 풀어보도록 하자.

예제 1	예제 2
a:b=3:4, c:d=1:2이며 a:c=6:5이다. a:b:c:d를 구하여라.	a:b=2:3, c:d=5:4이며 b:c=2:3이다. a:b:c:d를 구하여라.

예제 1에서 a:b에서 a는 3에 해당하고 c:d에서 c는 1에 해당하지만 a:c=3:1이 아니다. 그 이유는 앞서 말했듯 두 비례식의 비례상수가 다르기 때문이다. 따라서 추가 조건으로 비례상수를 같게 해야한다. 이를 위해 제공된 조건이 a:c이다. 따라서 a:c를 6:5로 맞춰주기 위해서는 3:1×x:y=6:5, x:y=$\frac{6:5}{3:1}$=2:5이다. 따라서 a:b에는 2를, c:d에는 5를 곱해주면 a:b=6:8, c:d=5:10이므로 a:b:c:d=6:8:5:10이다. 동시에 앞서 사용한 조건인 a:c=6:5에도 어긋나지 않음을 확인할 수 있다.

위 계산 과정은 두 실험결과에 대해서 도출한 두 비례식의 실제값을 구하기 위해서 반드시 거쳐야 할 과정이므로 꼭 익혀두도록 한다.

〔3〕 비례식에서 실제값으로의 변환

a:b=4:5라고 해서 a=4, b=5라고 추론하는 건 있을 수 없는 일이다. 비례식은 말 그대로 실제값의 비를 나타낸 것이기 때문에 실제 값과는 대부분 다른 값을 갖게 된다. 따라서 비율을 통해 실제값을 알기 위해서는 추가 자료가 필요하다. 따라서 비례식을 **실제값**으로 나타낸다는것은 **비례상수를 1로 조절한다는 의미와 같다.** 비례상수를 1로 바꿔 비례식을 실제값으로 바꾸는 과정을 알아보도록 하자. 그 전에 아래 예제 2개를 풀어보자.

예제 1	예제 2
a:b=1:3, a+b=80일때 a와 b의 값을 각각 구하여라. (합 이용)	a:b=3:4, b-a=10일때 a와 b의 값을 각각 구하여라. (차 이용)

예제 1 해설	예제 2 해설
a=k, b=3k라 하면 a+b=4k=80으로 k=20이다. 따라서 a=20, b=60이다.	a=3k, b=4k라 하면 b-a=k=10이므로 a=30, b=40이다.

위 예제를 좀 더 **직관적으로 보기 쉽게** 해석해보도록 하자. 아래는 a:b=3:4과 a:b=1:3이라는 비례식에 1, 2, 3을 곱했을때 b-a와 a+b 값의 변화를 나타낸것이다.

a:b=3:4				a:b=1:3			
	a	b	a+b		a	b	|a-b|
1	1	3	4	1	3	4	1
2	2	6	8	2	6	8	2
3	3	9	12	3	9	12	3
n	n	3n	4n	n	3n	4n	n

즉, 숫자가 n배가 되면 차나 합도 n배가 된다. 따라서 다시 해석하면 아래와 같다.

예제 1
a:b를 이루는 숫자의 **합**이 4이므로 80/4=20을 각각 곱해주면 a=20, b=60이다.

예제 2
a:b를 이루는 숫자의 **차**가 1이므로 10/1=10을 각각 곱해주면 a=30, b=40이다.

앞에서 말했듯 비례식은 실제값이 아닌 **실제값의 비율만 나타낸 것**이므로 실제값에 관한 조건이 주어지지 않는 이상 실제 값을 구하는것은 불가능하다. 따라서 문제를 풀 때 **실제값에 관한 자료**를 찾아 실제값을 구하거나 다른 요소들과의 비례식 관계를 찾아 두 비례식을 연결시켜 주는 등 다양한 풀이를 접하게 될것이다. 다만 이를 익숙하게 하기 위해선 연습이 필요하므로 비례식의 계산을 평소에 천천히, 꾸준히 연습하도록 하자.

예제 1	A와 B는 가속 운동을 하며 점점 빨라지고 있다. 작용하는 알짜힘의 비는 2:3이며 운동한 시간 비가 1:3일 때 속도 변화량의 비는 2:5이다. A와 B의 질량비를 구하여라
예제 2	고정된 점전하 A와 B가 있다. A와 B의 a:b 내분점에 존재하는 점전하 C가 A와 B에 의해 정지해 있을 때 A와 B의 전하량의 비율을 구하여라.
예제 3	두 물체 A와 B의 질량이 a:b이며 운동에너지는 3:4이다. 두 물체의 질량비를 구하여라.