

2017학년도 6월 모의평가 수학(나형) 30번

다음 조건을 만족시키는 20 이하의 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오. [4점]

$[\log_2(na - a^2)]$ 과 $\log_2(nb - b^2)$ 은 같은 자연수이고 $0 < b - a \leq \frac{n}{2}$ 인 두 실수 a, b 가 존재한다.]

[해설]

로그의 정의에 의해 $na - a^2 = nb - b^2 = 2^k$ (단, k 는 자연수)

$na - nb = a^2 - b^2$, $b - a > 0$ 이므로 $a + b = n$

$na - a^2 = a(n - a) = ab = 2^k$ 이다.

풀이 1)

$$0 < b - a \leq \frac{n}{2} \text{에서 } 0 < n - 2a \leq \frac{n}{2}, \quad 0 < 2b - n \leq \frac{n}{2}$$

이로부터 부등식 $\frac{n}{4} \leq a < \frac{n}{2} < b \leq \frac{3n}{4}$ 을 도출할 수 있다.

$$ab = 2^k \text{이므로 } \frac{n}{4} \leq a < \frac{n}{2} \text{와 } \frac{n}{2} < b \leq \frac{3n}{4} \text{에서 } \frac{3n^2}{16} \leq ab = 2^k < \frac{n^2}{4}$$

(참고; a 가 최솟값을 가질 때 b 가 최댓값을 가짐을 기억하자.)

$$\text{따라서 } 2^{k+2} < n^2 \leq \frac{2^{k+4}}{3}$$

이때

$$k=1 \text{일 때 } 8 < n^2 \leq \frac{32}{3}, \text{ 이를 만족시키는 자연수 } n=3$$

$$k=2 \text{일 때 } 16 < n^2 \leq \frac{64}{3}, \text{ 이를 만족시키는 자연수 } n \text{은 없다.}$$

$$k=3 \text{일 때 } 32 < n^2 \leq \frac{128}{3}, \text{ 이를 만족시키는 자연수 } n=6$$

$$k=4 \text{일 때 } 64 < n^2 \leq \frac{256}{3}, \text{ 이를 만족시키는 자연수 } n=9$$

$$k=5 \text{일 때 } 128 < n^2 \leq \frac{512}{3}, \text{ 이를 만족시키는 자연수 } n=12, 13$$

$$k=6 \text{일 때 } 256 < n^2 \leq \frac{1024}{3}, \text{ 이를 만족시키는 자연수 } n=17, 18$$

$$k=7 \text{일 때 } n > 20 \text{이므로, 조건을 만족시키는 } n \text{의 값의 합은 } 78 \text{이다.}$$

풀이 2)

$a + b = n$, $ab = 2^k$ 에서 a 와 b 를 두 근으로 하는 이차방정식을 생각할 수 있다.

즉, a 와 b 는 $x^2 - nx + 2^k = 0$ 의 두 근이다.

$$b - a > 0 \text{이므로 판별식 } D = n^2 - 4 \times 2^k > 0$$

$0 < b-a \leq \frac{n}{2}$ 에서 $0 < (b-a)^2 \leq \frac{n^2}{4}$ 인데 $D = (b-a)^2$ 이다.

$n^2 - 4 \times 2^k \leq \frac{n^2}{4}$ 에서 $n^2 \leq \frac{2^{k+4}}{3}$, $D = n^2 - 4 \times 2^k > 0$ 에서 $n^2 > 2^{k+2}$ 이므로

$$2^{k+2} < n^2 \leq \frac{2^{k+4}}{3}$$

이때

$k=1$ 일 때 $8 < n^2 \leq \frac{32}{3}$, 이를 만족시키는 자연수 $n=3$

$k=2$ 일 때 $16 < n^2 \leq \frac{64}{3}$, 이를 만족시키는 자연수 n 은 없다.

$k=3$ 일 때 $32 < n^2 \leq \frac{128}{3}$, 이를 만족시키는 자연수 $n=6$

$k=4$ 일 때 $64 < n^2 \leq \frac{256}{3}$, 이를 만족시키는 자연수 $n=9$

$k=5$ 일 때 $128 < n^2 \leq \frac{512}{3}$, 이를 만족시키는 자연수 $n=12, 13$

$k=6$ 일 때 $256 < n^2 \leq \frac{1024}{3}$, 이를 만족시키는 자연수 $n=17, 18$

$k=7$ 일 때 $n > 20$ 이므로, 조건을 만족시키는 n 의 값의 합은 78이다.

풀이 3)

$a+b=n$, $ab=2^k$ 에서 a 와 b 를 x 축과의 두 교점의 x 좌표로 가지는 이차함수 $f(x)=x^2-nx+2^k$ 를 생각할 수 있다.

이때 $b-a$ 는 이차함수 $f(x)$ 의 대칭축 $x=\frac{n}{2}$ 위의 점 $(\frac{n}{2}, 0)$ 로부터 같은 거리에 있는 $f(x)$ 위의 두 점 $(a, 0)$, $(b, 0)$ 사이의 거리와 같다.

따라서, $b-a$ 가 최댓값 $\frac{n}{2}$ 를 가질 때 $a=\frac{n}{4}$, $b=\frac{3n}{4}$ 이다.

$$\lim_{b-a \rightarrow 0} a = \lim_{b-a \rightarrow 0} b = \frac{n}{2}, a \neq b \neq \frac{n}{2} \text{이므로 } \frac{3n^2}{16} \leq ab = 2^k < \frac{n^2}{4}$$

$$\text{따라서 } 2^{k+2} < n^2 \leq \frac{2^{k+4}}{3}$$

이하의 풀이는 풀이 2)와 동일하다.