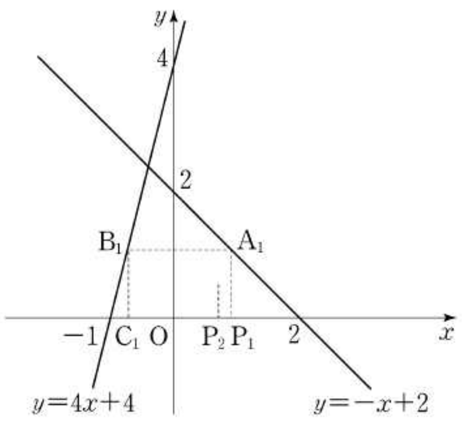
고지우의 난문현답

제 13 일

1. 2011년 6월 평가원
2. 2016년 4월 교육청
3. 2012년 7월 교육청
4. 2015년 경찰대
5. 2011년 수능
6. 2015년 6월 교육청
7. 2003년 수능
8. 1997년 수능
9. 2009년 3월 교육청
10. 2016년 사관학교

1. 자연수 n에 대하여 점 P_n이 x축 위의 점일 때, 점 P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 P_1의 좌표는 $(a_1, 0)(0 < a_1 < 2)$이다.
(나) (1) 점 P_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 $y=-x+2$와 만나는 점을 A_n이라 한다.
(2) 점 A_n을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=4x+4$와 만나는 점을 B_n이라 한다.
(3) 점 B_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 C_n이라 한다,
(4) 점 C_n을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 P_{n+1}이라 한다,



점 P_n의 x좌표를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$
④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

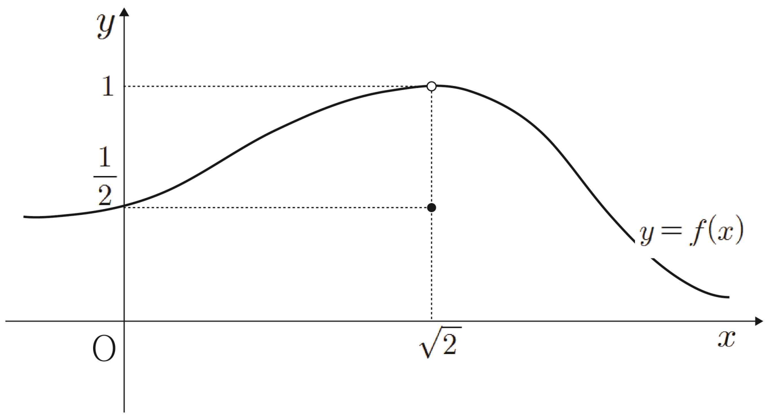
2. 함수 $f(x)=x^2-8x+a$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} 2x+5a & (x \geq a) \\ f(x+4) & (x < a) \end{cases}$$

라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 곱을 구하시오.

(가) 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 $(0, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
(나) 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

3. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)



ㄱ. $\lim_{x \to \sqrt{2}} [xf(x)] = 1$

ㄴ. 함수 $[xf(x)]$는 $x=\sqrt{2}$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $(x-\sqrt{2})[xf(x)]$는 $x=\sqrt{2}$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 점 P는 B를 출발하여 매초 1의 속력으로 정사각형 ABCD의 변을 따라 B→C→D→A의 방향으로 움직이고, 점 Q는 C를 출발하여 매초 $\frac{2}{3}$의 속력으로 정사각형 ABCD의 변을 따라 C→D→A→B의 방향으로 움직인다.
두 점 P, Q가 각각 B, C에서 동시에 출발한 수 시각 t초일 때, 삼각형 APQ의 넓이를 $f(t)$라 하자. [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? $\left(단, 0 \le t \le \frac{3}{2}\right)$

ㄱ. $f(t)$는 구간 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$에서 미분가능하다.

ㄴ. $f(t)$는 $t=\frac{3}{4}$에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. $f(t)$는 $t=1$에서 극댓값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(0 \le t \le 5)$에서 속도 $v(t)$가 다음과 같다.

$$v(t)=\begin{cases} 4t & (0 \le t < 1) \\ -2t+6 & (1 \le t < 3) \\ t-3 & (3 \le t \le 5) \end{cases}$$

$0 < x < 3$인 실수 x에 대하여 점 P가

시각 $t=0$에서 $t=x$까지 움직인 거리,

시각 $t=x$에서 $t=x+2$까지 움직인 거리,

시각 $t=x+2$에서 $t=5$까지 움직인 거리

중에서 최소인 값을 $f(x)$라 할 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $f(1)=2$

ㄴ. $f(2)-f(1)=\int_1^2 v(t)dt$

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

6. 두 집합 $A=\{2l \mid l$은 자연수$\}$, $B=\{3m-2 \mid m$은 자연수$\}$가 있다.

집합 A의 원소 a에 대하여 집합 B의 원소 중 a의 약수의 최댓값을 $M(a)$라 하자. 예를 들어 $M(2)=2$, $M(12)=4$이다.

수열 $\{a_n\}$을 $a_n=\sum_{k=1}^{2^{n-1}} M(2k)\,(n=1, 2, 3, \cdots)$라 할 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{150a_n}{(3n+1)\times 2^n}$의 값을 구하시오.

7. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$h(x)=\frac{1}{3}f(x)+\frac{2}{3}g(x)$$

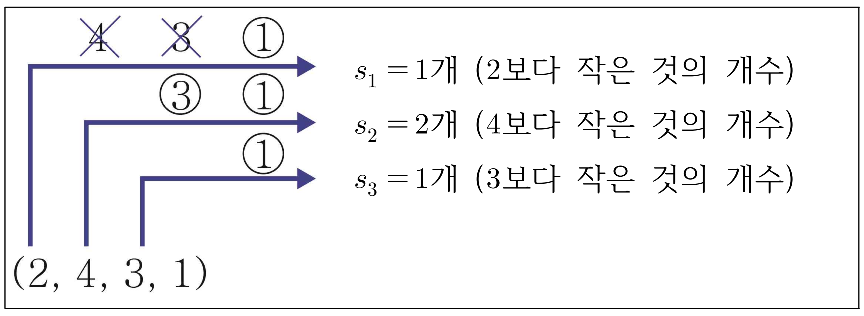
다음 [보기] 중 옳은 것을 모두 고르면?

ㄱ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 어떤 점에서 만나면 $y=h(x)$의 그래프는 그 교점을 지난다. ㄴ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 모두 y축에 대하여 대칭이면 $y=h(x)$의 그래프도 y축에 대하여 대칭이다. ㄷ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 모두 일대일 대응이면 $y=h(x)$도 일대일 대응이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

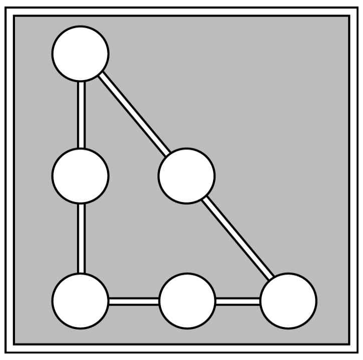
8. 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$의 네 원소를 배열하여 만든 수열 (a_1, a_2, a_3, a_4)에 대하여 각 숫자 a_k의 오른쪽에 있는 수 중에서 a_k보다 작은 것들의 개수를 $s_k(k=1, 2, 3)$이라고 하고, 이들의 합 $s_1+s_2+s_3$을 $|(a_1, a_2, a_3, a_4)|$로 나타내자.

예를 들면, $|(2, 4, 3, 1)|=s_1+s_2+s_3=1+2+1=4$이다.

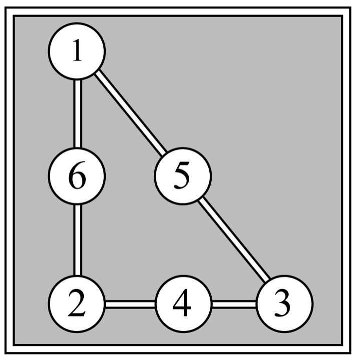


집합 A에 대한 24개의 모든 수열 (i_1, i_2, i_3, i_4)마다 각각 정해지는 $|(i_1, i_2, i_3, i_4)|$의 총합을 구하시오.

9. [그림1]과 같은 사각형 모양의 판에 6개의 원이 삼각형 모양으로 그려져 있다. 각 원 안에 1부터 6까지의 자연수를 각각 하나씩 적어 삼각형의 각 변에 있는 세 원 안에 적힌 수의 합이 모두 같게 하려고 한다. 예를 들어 [그림2]와 같이 적으면 삼각형의 각 변에 있는 수의 합이 모두 같다.



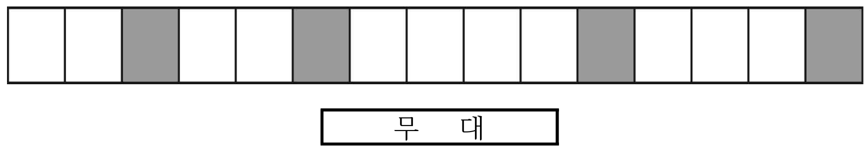
[그림1]



[그림2]

이와 같이 [그림1]의 원 안에 수를 적는 방법의 수를 구하시오.

10. 어느 공연장에 15개의 좌석이 일렬로 배치되어 있다. 이 좌석 중에서 서로 이웃하지 않도록 4개의 좌석을 선택하려고 한다. 예를 들면, 아래 그림의 색칠한 부분과 같이 좌석을 선택한다.



이와 같이 좌석을 선택하는 경우의 수를 구하시오.
(단, 좌석을 선택하는 순서는 고려하지 않는다.)