고지우의 난문현답

제 12 일

1. 2013년 사관학교
2. 2014년 7월 교육청
3. 2011년 9월 평가원
4. 2017년 6월 평가원
5. 2006년 수능
6. 2012년 사관학교
7. 2010년 9월 평가원
8. 2012년 7월 교육청
9. 2006년 사관학교
10. 2007년 경찰대

1. $x>0$에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{(\ln x)^6}{x^2}$에 대하여 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln x)^6}{x^2}=0$이다.)

ㄱ. $x=e^3$에서 극댓값을 갖는다.
ㄴ. $x=e$에서 극솟값을 갖는다.
ㄷ. $x>0$에서 방정식 $f(x)=1$의 실근의 개수는 3개이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-x)=f(x)$
(나) $f(x+2)=f(x)$
(다) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x+2)^2f(x)dx=50,\ \int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=2$

$\displaystyle\int_{-3}^{3}x^2f(x)dx$의 값을 구하시오.

3. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 t에 대하여

$$\int_0^2 xf(tx)dx = 4t^2$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

4. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 상수 $a\,(0<a<2\pi)$와 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

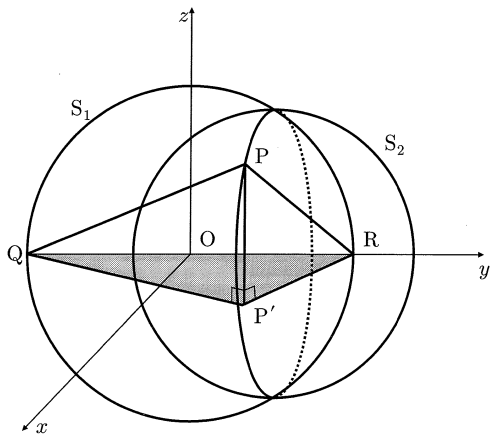
(가) $f(x)=f(-x)$
(나) $\int_x^{x+a} f(t)dt = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

닫힌 구간 $\left[0,\ \frac{a}{2}\right]$에서 두 실수 b, c에 대하여

$f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$일 때 $abc=-\frac{q}{p}\pi$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

5. 두 구 $x^2+y^2+z^2=81$, $x^2+(y-5)^2+z^2=56$을 각각 S_1, S_2라 하자. 두 구 S_1, S_2가 만나서 생기는 원 위를 한 점을 P라 하고, 점 P의 xy 평면 위로의 정사영을 P′이라 하자. 구 S_1과 y 축이 만나는 점을 각각 Q, R이라 할 때, 사면체 PQP′R의 부피의 최댓값을 구하시오.

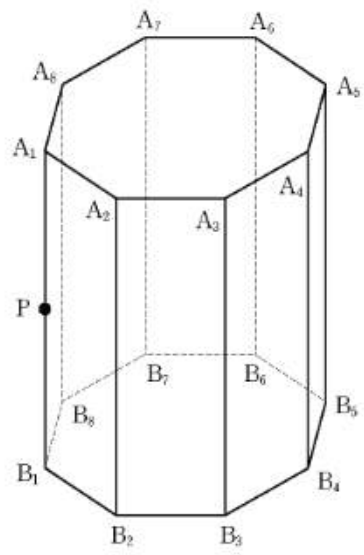


6. 좌표평면 위를 움직이는 두 점 $A(2+\sin\theta, 2\sqrt{3}+\sqrt{3}\sin\theta)$, $B(\cos\theta, -\sqrt{3}\cos\theta)$와 점 $C(1,0)$에 대하여 선분 AB의 중점을 M이라 하고, $\overline{CM}$이 최대일 때 점 M을 D, $\overline{CM}$이 최소일 때 점 M을 E라 하자. 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? (단, $0 \le \theta < 2\pi$)

ㄱ. 점 M이 그리는 도형은 타원이다.
ㄴ. $\overline{CD}+\overline{CE}=2\sqrt{3}$
ㄷ. $\angle DOE=\alpha$라 하면 $\tan\alpha=\frac{2}{5}\sqrt{6}$이다.
(단, O는 원점이다.)

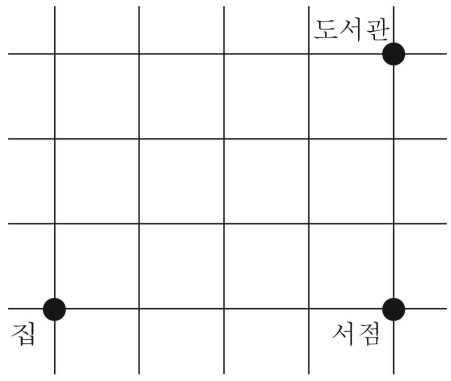
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7. 다음 그림은 밑면이 정팔각형인 팔각기둥이다.

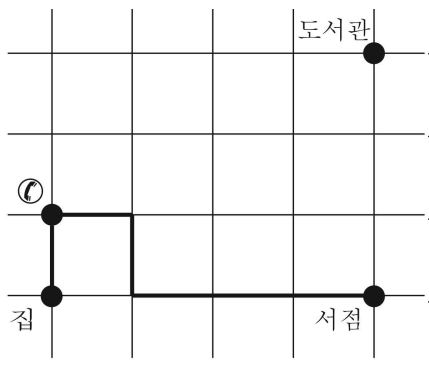


$\overline{A_1A_3}=3\sqrt{2}$이고, 점 P가 모서리 A_1B_1의 중점일 때, 벡터 $\sum_{i=1}^{8}(\overrightarrow{PA_i}+\overrightarrow{PB_i})$의 크기를 구하시오.

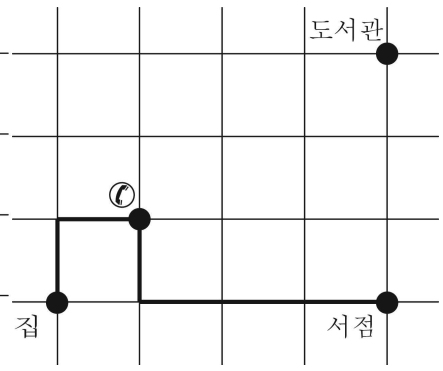
8. 그림과 같이 이웃한 두 교차로 사이의 거리가 모두 같은 도로망이 있다.



철수가 집에서 도로를 따라 최단거리로 약속장소인 도서관으로 가다가 어떤 교차로에서 약속장소가 서점으로 바뀌었다는 연락을 받고 곧바로 도로를 따라 최단거리로 서점으로 갔다. 집에서 서점까지 지나 온 길이 같은 경우 하나의 경로로 간주한다. 예를 들어, [그림1]과 [그림2]는 연락받은 위치는 다르나, 같은 경로이다.



[그림 1]



[그림2]

철수가 집에서 서점까지 갈 수 있는 모든 경로의 수를 구하시오. (단, 철수가 도서관에 도착한 후에 서점으로 가는 경우도 포함한다.)

9. 양궁대회에 참가한 어떤 선수가 활을 쏘아 과녁의 10점 부분을 명중시킨 다음 다시 활을 쏘아 10점 부분을 명중시킬 확률이 $\frac{8}{9}$이고, 10점 부분을 명중시키지 못한 다음 다시 10점 부분을 명중시키지 못할 확률이 $\frac{1}{5}$이다. 이 선수가 반복하여 계속 활을 쏜다고 할 때, n번째에 10점 부분을 명중시킬 확률을 p_n이라 하자. 이때, $\lim_{n\to\infty} p_n$의 값은?

① $\frac{14}{27}$ ② $\frac{17}{27}$ ③ $\frac{25}{41}$
④ $\frac{32}{41}$ ⑤ $\frac{36}{41}$

10. 여론 조사에서 찬성과 반대 의견이 거의 비슷한 어떤 안건을 투표로 결정하려고 한다. 전체 유권자 10000명 중 최소 $a\%$가 찬성해야 통과되는 것으로 정했을 때, 이 안건이 통과될 확률이 0.0228이하이기 위한 a의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le \mathrm{Z} \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 51 ② 52 ③ 53
④ 54 ⑤ 55