2015학년도 사관학교 기출 문제

수학 영역[가형]

1. $\log_2 9 \times \log_3 8$의 값은? [2점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $AX=A+B$를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합은? [2점]

① 9 ② 11 ③ 13
④ 15 ⑤ 17

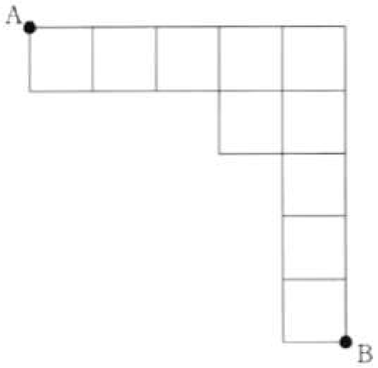
3. 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 이루는 각의 크기는 60° 이고, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$일 때, $|\vec{a}-2\vec{b}|$의 값은? [2점]

① $3\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{7}$
④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 6

4. 함수 $f(x)=8\sin x+4\cos 2x+1$의 최댓값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

5. 그림과 같이 정사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다.



이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는? [3점]

① 40 ② 42 ③ 44 ④ 46 ⑤ 48

6. 좌표평면에서 원점을 중심으로 90° 만큼 회전하는 회전변환을 f, 원점을 닮음의 중심으로 하고 닮음비가 $k(k>0)$인 닮음변환을 g라 하자. 합성변환 $g \circ f$에 의하여 원 $C_1 : (x-5)^2+y^2=16$ 이 옮겨진 원을 C_2라 할 때, 두 원 C_1, C_2가 외접하기 위한 모든 k의 값의 합은? [3점]

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{31}{9}$ ③ $\frac{32}{9}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ $\frac{34}{9}$

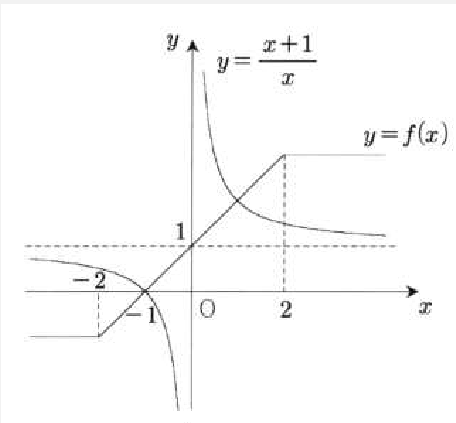
7. 어느 상품의 수요량이 D, 공급량이 S일 때의 판매가격을 P라 하면 관계식

$\log_2 P = C + \log_3 D - \log_9 S$ (단, C는 상수)

가 성립한다고 한다. 이 상품의 수요량 9배로 증가하고 공급량이 3배로 증가하면 판매가격은 k 배로 증가한다. k의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

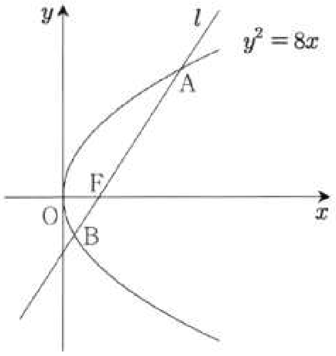
8. 함수 $f(x)=\begin{cases} -1 & (x<-2) \\ x+1 & (-2 \le x < 2) \\ 3 & (x \ge 2) \end{cases}$가 있다. 그림은 두 함수 $y=f(x)$, $y=\frac{x+1}{x}$의 그래프를 나타낸 것이다.



집합 $\left\{x \,\middle|\, \frac{x+1}{f(x)} > x, x\text{는 } |x|<10\text{인 정수}\right\}$ 의 원소의 개수는? [3점]

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

9. 포물선 $y^2 = 8x$의 초점 F를 지나는 직선 l이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}} = 14$를 만족시키는 직선 l의 기울기는 m이라 할 때, 양수 m의 값은? [3점]



① $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ③ 1
④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

10. 정규분포를 따르는 두 연속확률변수 X, Y가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{E}(X) = 10$ (나) $Y = 3X$

$\mathrm{P}(X \le k) = \mathrm{P}(Y \ge k)$를 만족시키는 상수 k의 값은? [3점]

① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

11. 주머니 A에는 흰 공 2개, 검은 공 4개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 4개, 검은 공 2개가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣고 섞은 다음 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 꺼내어 주머니 A에 넣었더니 두 주머니에 있는 검은 공의 개수가 서로 같아졌다. 이때 주머니 A에서 꺼낸 공이 모두 검은 공이었을 확률은? [3점]

① $\frac{6}{11}$ ② $\frac{13}{22}$ ③ $\frac{7}{11}$
④ $\frac{15}{22}$ ⑤ $\frac{8}{11}$

12. 좌표평면에서 두 점 $\mathrm{A}(-3, 0)$, $\mathrm{B}(3, 0)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 8인 타원이 있다. 초점이 B이고 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이 타원과 만나는 한 점을 P라 할 때, 선분 PB의 길이는? [3점]

① $\frac{22}{7}$ ② $\frac{23}{7}$ ③ $\frac{24}{7}$
④ $\frac{25}{7}$ ⑤ $\frac{26}{7}$

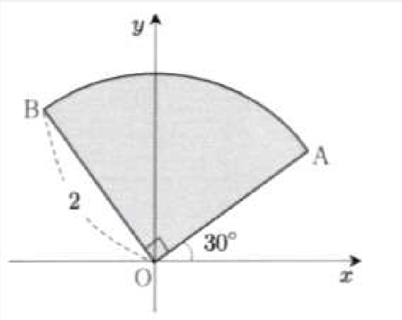
13. 모든 실수에서 연속이고 역함수가 존재하는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 제 1사분면에 있는 두 점 $(2,a)$, $(4,a+8)$을 지난다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(2+\frac{2k}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(a+\frac{8k}{n}\right)=50$$

을 만족시키는 두 상수 a의 값은? [3점]

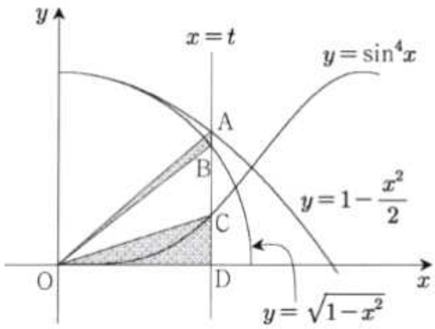
① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

14. 그림은 좌표평면에 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 OAB를 나타낸 것이다. 선분 OA가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $30°$일 때, 부채꼴 OAB의 내부를 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는? (단, O는 원점이고, 점 B는 제 2사분면에 있다.) [4점]



① $\frac{4(\sqrt{3}+1)}{3}\pi$ ② $\frac{5(\sqrt{3}+1)}{3}\pi$ ③ $2(\sqrt{3}+1)\pi$
④ $\frac{7(\sqrt{3}+1)}{3}\pi$ ⑤ $\frac{8(\sqrt{3}+1)}{3}\pi$

15. 그림과 같이 직선 $x=t$ $(0<t<1)$이 세 곡선 $y=1-\frac{x^2}{2}$, $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\sin^4 x$ 및 x축과 만나는 점을 각각 A, B, C, D라 하자. 두 삼각형 AOB, COD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $\lim_{t\to+0}\frac{S_1}{S_2}$ 의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

16. 두 이차정사각행렬 A, B가

$AB=O$, $(A+2B)(2A-B)=E$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.) [4점]

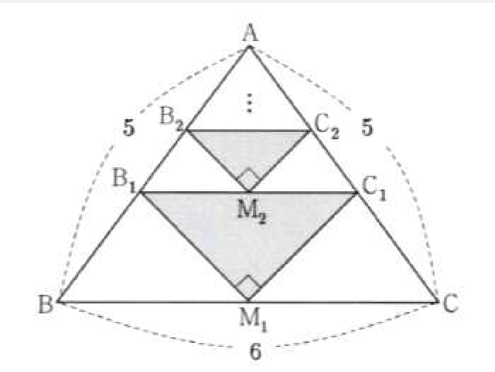
< 보 기 >

ㄱ. $BA=O$
ㄴ. 행렬 $A+B$ 의 역행렬이 존재한다.
ㄷ. $A^2+B^2=\frac{1}{2}E$이면 $B=O$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC} = 5$, $\overline{BC} = 6$인 이등변삼각형 ABC가 있다.

선분 BC의 중점 M_1을 잡고 두 선분 AB, AC 위에 각각 점 B_1, C_1을 $\angle B_1M_1C_1 = 90^\circ$이고 $\overline{B_1C_1} // \overline{BC}$가 되도록 잡아 직각삼각형 $B_1M_1C_1$을 만든다.
선분 B_1C_1의 중점 M_2를 잡고 두 선분 AB_1, AC_1 위에 각각 B_2, C_2를 $\angle B_2M_2C_2 = 90^\circ$이고 $\overline{B_2C_2} // \overline{B_1C_1}$이 되도록 잡아 직각삼각형 $B_2M_2C_2$를 만든다.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 만든 직각삼각형 $B_nM_nC_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{47}{11}$　② $\frac{48}{11}$　③ $\frac{49}{11}$
④ $\frac{50}{11}$　⑤ $\frac{51}{11}$

18. 18. 수열 $\{a_n\}$이 다음 건을 만족시킨다.

> (Ⅰ) $a_1 = 2$이고 $a_n < a_{n+1}$ $(n \geq 1)$이다.
> (Ⅱ) $b_n = \frac{1}{2}\left(n+1-\frac{1}{n+1}\right)$ $(n \geq 1)$이라 할 때, 좌표평면에서 네 직선 $x = a_n$, $x = a_{n+1}$, $y = 0$, $y = b_n x$에 동시에 접하는 원 T_n 이 존재한다.

다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다.

> 원점을 O라 하고, 원 T_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하자.
> 직선 $x = a_n$과 두 직선 $y = 0$, $y = b_n x$의 교점을 각각 A_n, B_n이라 하고,
> 원 T_n과 세 직선 $x = a_n$, $y = b_n x$, $y = 0$의 접점을 각각 C_n, D_n, E_n 이라 하면
> $\overline{A_nB_n} = a_n b_n$이고 $\overline{OB_n} = a_n\sqrt{\boxed{(가)} + b_n^2}$ 이다.
> $\overline{OD_n} = \overline{OB_n} + \overline{B_nD_n} = \overline{OB_n} + \overline{B_nC_n}$
> $= a_n\sqrt{\boxed{(가)} + b_n^2} + a_n b_n - r_n$
> $\overline{OE_n} = a_n + r_n$
> $\overline{OD_n} = \overline{OE_n}$ 이므로
> $$r_n = \frac{a_n\left(b_n - 1\sqrt{\boxed{(가)} + b_n^2}\right)}{2}$$
> $\therefore a_{n+1} = a_n + 2r_n = (\boxed{(나)}) \times a_n$ $(n \geq 1)$
> 이때 $a_1 = 2$이고
> $a_n = \boxed{} \times a_{n-1} = \boxed{} \times a_{n-2} = \cdots$
> $= \boxed{} \times a_1$
> 이므로
> $a_n = \boxed{(다)}$

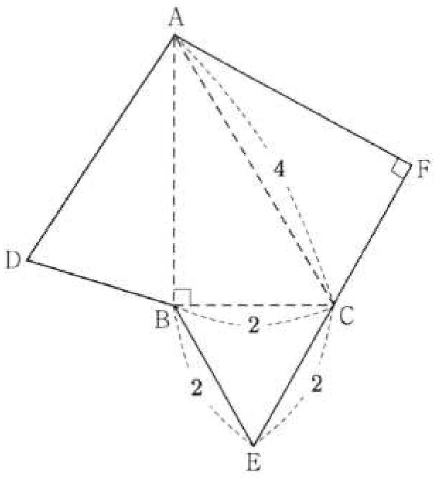
위의 과정에서 (가) 에 알맞은 수를 p라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $p + f(4) + g(4)$의 값은? [4점]

① 54　② 55　③ 56
④ 57　⑤ 58

19. 자연수 n에 대하여 $\log_n$의 지표를 $f(n)$, 가수를 $g(n)$이라 할 때, 좌표평면에서 점 A_n의 좌표를 $(f(n), g(n))$이라 하자. 10보다 크고 1000보다 작은 두 자연수 k, m $(k < m)$에 대하여 세 점 A_1, A_k, A_m이 한 직선 위에 있을 때, $k+m$의 최댓값은? [4점]

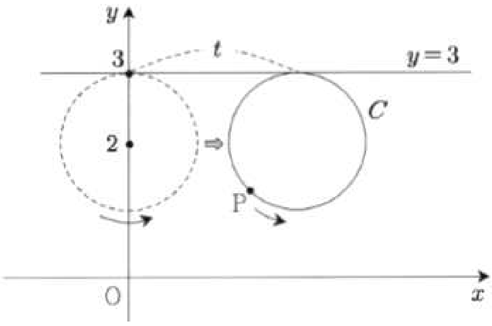
① 988 ② 990 ③ 992
④ 994 ⑤ 996

20. 그림은 어떤 사면체의 전개도이다. 삼각형 BEC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이고 $\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{CFA} = 90°$, $\overline{\mathrm{AC}} = 4$이다. 이 전개도로 사면체를 만들 때, 두 면 ACF, ABC가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

21. 좌표평면에 중심이 $(0, 2)$이고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있고, 이 원 위의 점 P가 점 $(0, 3)$의 위치에 있다. 원 C는 직선 $y=3$에 접하면서 x축의 양의 방향으로 미끄러지지 않고 굴러간다. 그림은 원 C가 굴러간 거리가 t일 때, 점 P의 위치를 나타낸 것이다.



점 P가 나타내는 곡선을 F라 하자. $t=\frac{2}{3}\pi$일 때 곡선 F 위의 점에서의 접선의 기울기는? [4점]

① $-\sqrt{3}$　② $-\sqrt{2}$　③ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　④ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

22. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_2+a_4=16$, $a_8+a_{12}=58$ 일 때, a_{17}의 값을 구하시오. [3점]

23. 방정식 $\sqrt{x+3}=|x|-3$ 의 모든 근의 합을 구하시오. [3점]

24. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x t^2 f'(t)dt = \frac{3}{2}x^4 + kx^3$이다.

(나) $x=1$에서 극솟값 7을 갖는다.

$f(10)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

25. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x) = x^n \ln x$의 최솟값을 $g(n)$이라 하자. $g(n) \le -\frac{1}{6e}$을 만족시키는 모든 n의 값의 합을 구하시오. [3점]

26. 이차함수 $f(x) = ax^2$에 대하여 구간 $[0, 2]$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $g(x)$가

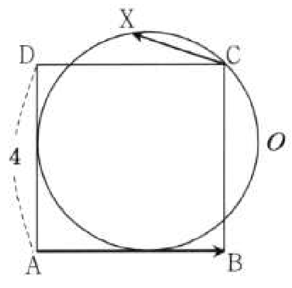
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \le x < 1) \\ f(x-1) + f(1) & (1 \le x \le 2) \end{cases}$$

일 때, $\mathrm{P}(a \le X \le a+1) = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

27. 두 함수 $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{k}{x}$ $(k > 1)$ 에 대하여 좌표평면에서 직선 $x=2$가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 곡선 $y=f(x)$에 대하여 점 P에서의 접선을 l, 곡선 $y=g(x)$에 대하여 점 Q에서의 접선을 m이라 하자. 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$일 때, 상수 k에 대하여 $3k$의 값을 구하시오. [4점]

28. 좌표공간에서 구 $(x-6)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=16$ 위의 점 P와 yz평면 위에 있는 원 $(y-2)^2+(z-1)^2=9$ 위의 점 Q사이의 거리의 최댓값을 구하시오. [4점]

29. 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABCD에서 변 AB와 변 AD에 모두 접하고 점 C를 지나는 원을 O라 하자. 원 O 위를 움직이는 점 X에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CX}$의 내적 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CX}$의 최댓값은 $a-b\sqrt{2}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 자연수이다.) [4점]



30. 함수 $f(x)=-xe^{2-x}$과 상수 a가 다음 조건을 만족시킨다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, $x<a$이면 $f(x)>g(x)$이고, $x>a$이면 $f(x)<g(x)$이다.

곡선 $y=f(x)$와 접선 $y=g(x)$ 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $k-e^2$이다. k의 값을 구하시오. [4점]