

2016학년도 사관학교 기출 문제

수학 영역(가형)

1

1. ${}_3H_1 + {}_3H_2 + {}_3H_3$ 의 값은?

- ① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

2. 두 이차정사각행렬 A, B 에 대하여 $(A+B)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ 이고 행렬 A 의 모든 성분의 합이 2일 때, 행렬 B 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

3. 좌표공간에서 두 점 $A(2, 3, -1), B(-1, 3, 2)$ 에 대하여 선분 AB 를 1:2로 내분하는 점의 좌표를 (a, b, c) 라 할 때, $a+b+c$ 의 값은? [2점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

4. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 가 있다. 행렬 AB 로 나타내어지는 일차변환에 의하여 두 점 $(1, 0), (0, 1)$ 이 각각 두 점 $(0, 2), (-2, 0)$ 으로 옮겨질 때, $a+b+c+d$ 의 값은? [4점]

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

5. 쌍곡선 $7x^2 - ay^2 = 20$ 위의 점 $(2, b)$ 에서의 접선이 점 $(0, -5)$ 를 지날 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

6. 연속함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = e^x + \int_0^1 t f(t) dt$$

를 만족시킬 때, $\int_0^1 f(x) dx$ 의 값은? [3점]

- ① $e-1$ ② $e+1$ ③ $2e-1$
 ④ $2e$ ⑤ $2e+1$

7. 어느 과수원에서 생산되는 사과와 배의 무게는 평균이 350g 이고 표준편차가 30g인 정규분포를 따르고, 배의 무게는 평균이 490g 이고 표준편차가 40g 인 정규분포를 따른다고 한다.

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.4	0.16
0.6	0.23
0.8	0.29
1.0	0.34

이 과수원에서 생산된 사과 중에서 임의로 선택한 9 개의 무게의 총합을 $X(g)$ 이라 하고, 이 과수원에서 생산된 배 중에서 임의로 선택한 4개의 무게의 총합을 $Y(g)$ 이라 하자. $X \geq 3240$ 이고 $Y \geq 2008$ 일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 사과와 배의 무게는 서로 독립이다.) [3점]

- ① 0.0432 ② 0.0482 ③ 0.0544
 ④ 0.0567 ⑤ 0.0614

8. 어느 액체의 끓는 온도 $T(^{\circ}C)$ 와 증기압 $P(\text{mmHg})$ 사이에는 다음 관계식이 성립한다.

$$\log P = k - \frac{1000}{T+250} \quad (\text{단, } k \text{는 상수})$$

이 액체의 끓는 온도가 $0^{\circ}C$ 일 때와 $50^{\circ}C$ 일 때의 증기압을 각각 $P_1(\text{mmHg})$, $P_2(\text{mmHg})$ 라 할 때, $\frac{P_2}{P_1}$ 의 값은? [3점]

- ① $10^{\frac{1}{4}}$ ② $10^{\frac{1}{3}}$ ③ $10^{\frac{1}{2}}$
 ④ $10^{\frac{2}{3}}$ ⑤ $10^{\frac{3}{4}}$

수학 영역(가형)

3

9. 주머니에 흰 공 1개, 파란 공 2개, 검은 공 3개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 색을 확인한 후 꺼낸 공과 같은 색의 공을 1개 추가하여 꺼낸 공과 함께 주머니에 넣는다. 이와 같은 시행을 두 번 반복하여 두 번째 꺼낸 공이 검은 공이었을 때, 첫 번째 꺼낸 공도 검은 공이었을 확률은? (단, 공의 크기와 모양은 모두 같다.) [3점]

- ① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{10}{21}$ ③ $\frac{11}{21}$
 ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{13}{21}$

10. $0 \leq x \leq \pi$ 에서 함수 $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\cos x$ 는 $x = \theta$ 일 때 최댓값을 갖는다. $\tan \theta$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{\sqrt{3}}{12}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{4}$
 ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

[11~12] 좌표평면에서 매개변수 θ 로 나타내어진 곡선 $x = 2\cos\theta + \cos 2\theta, y = 2\sin\theta + \sin 2\theta$ 에 대하여 11번과 12번의 두 물음에 답하십시오. (단, θ 는 실수이다.)

11. $\theta = \frac{\pi}{6}$ 에 대응하는 이 곡선 위의 점에서의 접선의 기울기는? [3점]

- ① -2 ② $-\sqrt{3}$ ③ -1
 ④ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

12. $0 \leq \theta \leq \pi$ 일 때, 이 곡선의 길이는? [3점]

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

13. 이차함수 $f(x) = x^2 + 2kx + 2k^2 + k$ 가 있다. x 에 대한 방정식

$$\frac{1}{\sqrt{f(x)+3}} - \frac{1}{f(x)} = \frac{3}{f(x)\sqrt{f(x)+3}}$$

이 서로 다른 두 개의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 k 의 값의 합은? [3점]

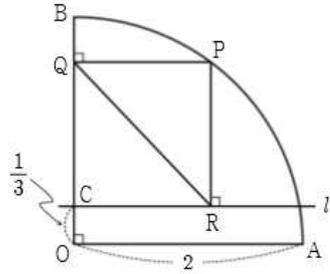
- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

14. $x \geq 0$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할

때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(1 + \frac{3k}{n}\right)$ 의 값은?

- ① $\frac{\pi - \sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{\pi + \sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{9}$
 ④ $\frac{4\pi + 3\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{2\pi - \sqrt{3}}{3}$

15. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 90° 인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OB 위에 $\overline{OC} = \frac{1}{3}$ 인 점 C를 잡고, 점 C를 지나고 선분 OA와 평행한 직선을 l 이라 하자. 호 AB 위를 움직이는 점 P에서 선분 OB와 직선 l 에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이의 최댓값은? [4점]



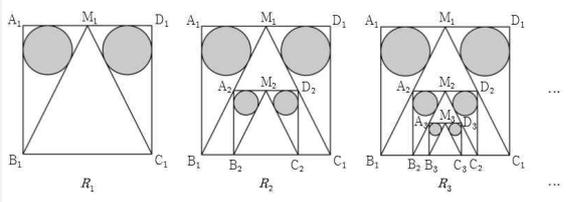
- ① $\frac{\sqrt{7}}{8}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{6}$ ③ $\frac{5\sqrt{7}}{24}$
 ④ $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{7}}{24}$

16. 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 이 있다. 그림과 같이 변 A_1D_1 의 중점을 M_1 이라 할 때, 두 삼각형 $A_1B_1M_1$ 과 $M_1C_1D_1$ 에 각각 내접하는 두 원을 그리고, 두 원에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 두 꼭짓점이 변 B_1C_1 위에 있고 삼각형 $M_1B_1C_1$ 에 내접하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 를 그린 후 변 A_2D_2 의 중점을 M_2 라 할 때, 두 삼각형 $A_2B_2M_2$ 와 $M_2C_2D_2$ 에 각각 내접하는 두 원을 그리고, 두 원에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

그림 R_2 에서 두 꼭짓점이 변 B_2C_2 위에 있고 삼각형 $M_2B_2C_2$ 에 내접하는 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$ 를 그린 후 변 A_3D_3 의 중점을 M_3 이라 할 때, 두 삼각형 $A_3B_3M_3$ 과 $M_3C_3D_3$ 에 각각 내접하는 두 원을 그리고, 두 원에 색칠하여 얻은 그림을 R_3 이라 하자.

이와 같은 과정으로 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{4(7-3\sqrt{5})}{3} \pi$ ② $\frac{4(8-3\sqrt{5})}{3} \pi$ ③ $\frac{6(7-3\sqrt{5})}{3} \pi$
- ④ $\frac{5(8-3\sqrt{5})}{3} \pi$ ⑤ $\frac{5(9-4\sqrt{5})}{3} \pi$

17. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = -\frac{5}{3}$ 이고

$$a_{n+1} = -\frac{3a_n + 2}{a_n} (n \geq 1) \dots\dots(*)$$

를 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

(*)에서

$$a_{n+1} + 2 = \frac{a_n + \boxed{\text{(가)}}}{a_n} (n \geq 1)$$

이다. 여기서

$$b_n = \frac{1}{a_n + 2} (n \geq 1)$$

이라 하면 $b_1 = 3$ 이고

$$b_{n+1} = 2b_n - \boxed{\text{(나)}} (n \geq 1)$$

이다. 수열 $\{b_n\}$ 의 일반항을 구하면

$$b_n = \boxed{\text{(다)}} (n \geq 1)$$

이므로

$$a_n = \frac{1}{\boxed{\text{(다)}}} - 2 (n \geq 1)$$

이다.

위의 (가) 와 (나) 에 알맞은 수를 각각 p, q 라 하고, (다)에 알맞은 식을 $f(n)$ 이라 할 때, $p \times q \times (5)$ 의 값은? [4점]

- ① 54 ② 58 ③ 62
- ④ 66 ⑤ 70

18. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x & (x \geq 0) \\ -1 + \sin x & (x < 0) \end{cases}$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
[4점]

< 보 기 >

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)f(-x) = -1$

ㄴ. 함수 $f(f(x))$ 는 $x = \frac{\pi}{2}$ 에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 $x=0$ 에서 미분가능하다.

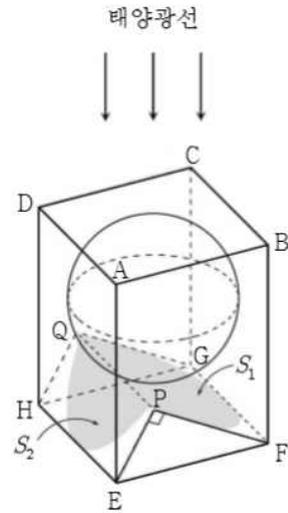
- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 좌표공간에서 구 $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$ 와 xy 평면이 만나서 생기는 원 위의 한 점을 P라 하자. 점 P에서 이 구와 접하고 점 A(3, 3, -4)를 지나는 평면 α 라 할 때, 원 점과 평면 α 사이의 거리는? [4점]

- ① $\frac{14}{3}$ ② 5 ③ $\frac{16}{3}$
④ $\frac{17}{3}$ ⑤ 6

20. 한 변의 길이가 8인 정사각형을 밑면으로 하고 높이가

$4+4\sqrt{3}$ 인 직육면체 ABCD-EFGH가 있다. 그림과 같이 이 직육면체의 바닥에 $\angle EPF = 90^\circ$ 인 삼각형 EFP-HGQ가 놓여있고 그 위에 구를 삼각기둥과 한 점에서 만나도록 올려놓았더니 이 구가 밑면 ABCD와 직육면체의 네 옆면에 모두 접하였다. 태양광선이 밑면과 수직인 방향으로 구를 비출 때, 삼각기둥의 두 옆면 PFGQ, EPQH에 생기는 구의 그림자의 넓이를 각각 $S_1, S_2 (S_1 > S_2)$ 라 하자. $S_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}S_2$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{20\sqrt{3}}{3}\pi$ ② $8\sqrt{3}\pi$ ③ $\frac{28\sqrt{3}}{3}\pi$
④ $\frac{32\sqrt{3}}{3}\pi$ ⑤ $12\sqrt{3}\pi$

수학 영역(가형)

7

21. 양수 x 에 대하여 $\log x$ 의 지표와 가수를 각각 $f(x)$, $g(x)$ 라 하자. $1 < x < 10^5$ 인 x 에 대하여 다음 두 조건을 만족시키는 모든 실수 x 의 값의 곱을 A 라 할 때, $\log A$ 의 값은?

(단, $\log 3 = 0.4771$ 로 계산한다.)

(가) $\sum_{k=1}^5 g(x^k) = g(x^{10}) + 2$
(나) $\sum_{k=1}^3 f(kx) = 3f(x)$

- ① 19 ② 20 ③ 21
 ④ 22 ⑤ 23

23. 일차변환 f 를 나타내는 행렬이 $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ 이다. 합성변환

$f \circ f$ 에 의하여 좌표평면 위의 네 점 A(2, 0), B(2, 2), C(-3, 4), D(-3, -3)이 옮겨진 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 S 라 할 때, $81S$ 의 값을 구하시오. [3점]

22. 수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 3n \quad (n \geq 1)$$

일 때, a_7 의 값을 구하시오. [3점]

24. 타원 $2x^2 + y^2 = 16$ 의 두 초점을 F, F'이라 하자. 이 타원

위의 점 P에 대하여 $\frac{PF'}{PF} = 3$ 일 때, $\overline{PF} \times \overline{PF'}$ 의 값을

구하시오. [3점]

25. 이차정사각행렬 A 가 다음 조건을 만족시킨다. (단, E 는 단위행렬이다.)

(가) $A-E$ 의 역행렬은 $A-3E$ 이다.

(나) $A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 를 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 이차함수 $f(x)$ 가

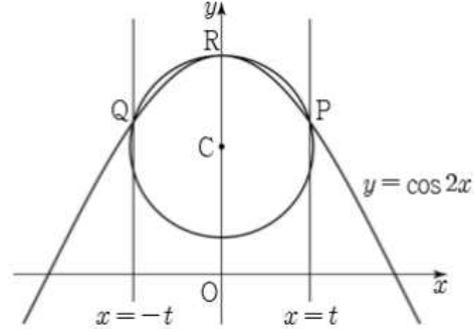
$$f(1)=2, f'(1)=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x)}{x} + \frac{1}{2}$$

을 만족시킬 때, $f(8)$ 의 값을 구하시오. [4점]

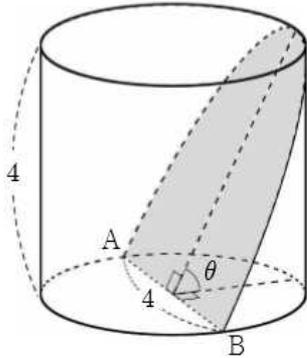
27. 좌표평면에서 곡선 $y = \cos 2x$ 가 두 직선 $x=t, x=-t$

$(0 < t < \frac{\pi}{4})$ 와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 곡선 $y = \cos 2x$ 가 y 축과 만나는 점을 R라 하자. 세 점 P, Q, R를 지나는 원의 중심을 $C(0, f(t))$ 라 할 때, $\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \alpha$ 이다. 100α 의 값을

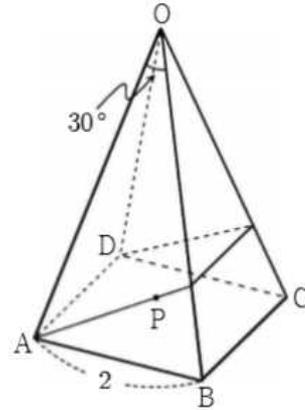
구하시오. [4점]



28. 그림과 같이 밑면의 지름의 길이와 높이가 모두 4인 원기둥이 있다. 밑면의 지름 AB를 포함하는 평면으로 이 원기둥을 잘랐을 때 생기는 단면이 원기둥의 밑면과 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 $\tan\theta=2$ 이다. 이 단면을 직선 AB를 회전축으로 하여 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 V 라 할 때, $\frac{3V}{\pi}$ 의 값을 구하시오. [4점]



30. 그림과 같이 옆면이 모두 합동인 이등변삼각형이고 밑면은 한 변의 길이가 2인 정사각형인 사각뿔 $O-ABCD$ 에서 $\angle AOB=30^\circ$ 이다. 점 A에서 출발하여 사각뿔의 옆면을 따라 모서리 OB 위의 한 점과 모서리 OC 위의 한 점을 거쳐 점 D에 도착하는 최단경로를 l 이라 하자. l 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OP}$ 의 최댓값을 $a\sqrt{3}+b$ 라 할 때, a^2+b^2 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 유리수이다.)



29. 바닥에 놓여 있는 5개의 동전 중 임의로 2개의 동전을 선택하여 뒤집는 시행을 하기로 한다. 2개의 동전은 앞면이, 3개의 동전은 뒷면이 보이도록 바닥에 놓여있는 상태에서 이 시행을 3번 반복한 결과 2개의 동전은 앞면이, 3개의 동전은 뒷면이 보이도록 바닥에 놓여 있을 확률을 p 라 할 때, $125p$ 의 값을 구하시오. (단, 동전의 크기와 모양은 모두 같다.) [4점]